



ESTADO DO RIO GRANDE DO SUL  
SECRETARIA DE ESTADO DOS NEGÓCIOS DA EDUCAÇÃO E CULTURA

## AS RELAÇÕES DE EQUIVALÊNCIA

Lucienne Félix

"Cahiers Pedagogiques D'Enseignement des Mathematiques"

15<sup>e</sup> année n<sup>o</sup> 21 - Pág. 69

15 / 5 / 1960

Tradução de Sandra #cauan

As noções de relação de equivalência e de classe de equivalência são tão fundamentais, que a sua aquisição constitui a primeira aprendizagem no Jardim da Infância, e que depois são utilizadas constantemente. É porque essas noções tornam-se inconscientes e parecem novas, desde que a tomemos como objeto de estudo num nível superior. Antes de examinar a sua sequência ao longo da escolaridade, recordemos de que se trata.

### I - Noção de Classe de Equivalência

A noção de classe de equivalência é o princípio fundamental de toda classificação: dentro do conjunto mais ou menos conhecido dos elementos dos quais falamos, conjunto "referencial", como o chamamos, certos elementos são considerados análogos, como equivalentes entre eles, sob um certo ponto de vista. Sob este ponto de vista, nós os consideramos como pertencentes a uma mesma classe de elementos. Para que esta classe seja definida sem ambigüidade, é preciso poder afirmar o que se segue:

1<sup>o</sup> - Cada vez que nós retomamos um mesmo elemento, devemos reconhecer nele a permanência dos caracteres utilizados para a classificação, de modo que o elemento seja bem equivalente a ele mesmo.

2<sup>o</sup> - Se um segundo elemento é reconhecido como equivalente ao primeiro, o primeiro também deve ser equivalente ao segundo. Não importa a ordem para concluir que os dois elementos devem ser postos na mesma classe.

3<sup>o</sup> - Sendo dois elementos equivalentes, e se um terceiro for equivalente a um deles, esse terceiro é equivalente ao outro também. Daí resulta que cada elemento de uma classe determina perfeitamente esta classe.

4<sup>o</sup> - Sendo uma classe definida, todo elemento ou pertence à classe, ou determina uma outra classe; assim, todo o referencial é dividido em classes sem elementos comuns: há divisão.





Tomemos um exemplo: Queremos classificar lápis pela cor da sua madeira. Colocamos os lápis amarelos dentro de uma caixa; constituimos assim a classe amarela; da mesma maneira será constituída a classe vermelha, a classe azul, e, se houver lugar, a classe de cor indecisa, para que todos os lápis sejam repartidos.

Esta linguagem, que concerne os subconjuntos chamados "classes de equivalência", pode ser traduzida em outra linguagem, que concerne "relações".

Tomemos um lápis e depois outro lápis. Todos os dois são da mesma cor? "Ter uma mesma cor" é uma relação entre os pares de elementos do referencial; é uma relação binária (entre 2 elementos).

Uma relação é definida sobre o referencial se, por cada par de elementos, à pergunta "O par convém?", pode-se responder "Sim" ou "Não". Se a resposta for "Sim", os elementos são equivalentes, sob o meu ponto de vista, e eu os colocaria na mesma classe. Esta classificação é possível?

Tomemos o nosso exemplo da classificação dos lápis de cores; apliquemos as 4 condições enumeradas acima:

1ª- Tomo um lápis, e depois o mostro uma segunda vez. Se a classificação for possível eu devo, à pergunta "eles são da mesma cor?" responder "Sim". A relação é dita "reflexiva": qualquer que seja o elemento "a", ele é equivalente a ele mesmo.

2ª- Tomo 2 lápis, se, à mesma pergunta, a resposta for "Sim", esta resposta é independente da ordem na qual os elementos são considerados: a relação é dita "simétrica".

3ª- Se a resposta for "Sim" para o par (a, b) de elementos e também para o par (b, c), a resposta também é "Sim" para o par (a, c) a relação é "transitiva"; ela se propaga de qualquer maneira.

Assim, as condições 1ª, 2ª e 3ª exprimem propriedades da relação; a 4ª exprime que a comparação se estende a todos os elementos do referencial, que a resposta "Sim" ou "Não" pode ser dada para todos os pares. Quando estas condições são realizadas, diz-se que se trata de uma relação de equivalência definida sobre o referencial.

Insistimos um pouco sobre os dois aspectos da questão: nós podemos pensar nos subconjuntos, nas classes de equivalência, ou pensar na relação. Se o referencial é repartido em classes, subconjuntos sem elementos comuns, pode-se formular uma relação de equivalência que descreve o princípio de classificação. De maneira inversa,





ESTADO DO RIO GRANDE DO SUL  
SECRETARIA DE ESTADO DOS NEGÓCIOS DA EDUCAÇÃO E CULTURA

-3-

uma ~~revelação~~ de equivalência é um princípio de classificação e determina as classes de equivalência.

Portanto, a todo estudo feito sobre as classes, corresponde um estudo sobre as relações. Por exemplo: consideremos dois princípios de classificação sobre um mesmo referencial, em relação aos lápis, esses princípios podem ser: quanto à cor da madeira e quanto à cor do grafite. Seja E o conjunto de lápis de madeira amarela, e F o conjunto de lápis de grafite preto. A operação de "interseção" sobre E e F o conjunto G de lápis comuns às duas classes. Eles são caracterizados como tendo ao mesmo tempo a madeira <sup>amarela</sup> e o grafite preto; há "conjunção" das duas qualidades: é uma operação sobre as duas relações de equivalência (ver Dubreil: "As relações de equivalência", conferência no Palácio da Descoberta, 1954).

Lembremos disto apenas que nós temos duas maneiras de nos exprimir: — Um elemento é de tal classe (pertence a esta classe), é o aspecto da teoria dos conjuntos — ou ele tem tal qualidade (possui esta qualidade, satisfaz à relação).

Acrescentemos que nós temos uma necessidade imperiosa de nomear as <sup>classes</sup> classes de equivalência, porque somos levados a considerá-las como elementos de um tipo superior; esta hierarquia de tipos é bem conhecida nas Ciências Naturais (Zoologia ou Botânica), mas é também essencial para as outras matérias de estudo.

Ser uma bilha amarela, ser um polígono trilátero, ser um animal herbívoro, ser contemporâneo de Augusto (considerado como a população que viveu na época de Augusto). Assim, designa-se a classe por um substantivo que pode ser o nome de uma qualidade, (o amarelo), um indefinido (o triângulo), um nome <sup>no</sup> plural (os herbívoros), ou cita-se um elemento particularmente notável da classe (Augusto, evidentemente o mais notável dos homens de seu tempo, sob o ponto de vista onde nos colocamos).

É um caso muito favorável para a classificação que aquele onde, dentro de cada classe de equivalência, um elemento particular, um representante bem reconhecível se impõe como protótipo, como elemento standard: ele é chamado (na técnica das matemáticas elevadas) "Elemento canônico". Se está num caso como este, é necessário precisá-lo; veremos exemplos depois.





Mas se pretende-se estudar uma classe por apenas um dos seus representantes é preciso ter-se cuidado. Assim, para estudar os herbívoros, uma criança tomará como tipo "a vaca" (o que já é melhor do que "uma vaca"). Mas a vaca pertence a outras classes de equivalências determinadas por outros princípios de classificação: é necessário considerar <sup>as</sup> interseções de conjuntos.

Está claro que estudando as matemáticas elementares, nós estamos nas situações privilegiadas onde a classificação é particularmente simples.

## II - As Classes de Equivalência no Ensino

Abramos o programa e reconhecamos as relações e classes de equivalência onde elas estão, isto é, quase que em todo lugar.

### No Jardim da Infância

É o momento privilegiado para a álgebra dos conjuntos e das classes de equivalência (antes do número), como também para a topologia (antes da medida). Se a criança classificar objetos por cor e procurar os amarelos, se ela perguntar: "Este ou aquele?", em lugar de responder: "É a mesma coisa", responderemos: "É equivalente" e falamos sobre a classe dos objetos amarelos.

### No Curso Elementar e no Curso Ginásial

O número aparece. Contar, medir: novas operações.

O que é o número natural? Trata-se de diversos referenciais: o conjunto dos meus dedos, um conjunto de ovos, um porta-ovos, um conjunto de etiquetas com sinais que as distingam. Consideremos um subconjunto de cada um, por ex. um (cesto) <sup>cesto</sup> panier de ovos e um cartão com orifícios para colocar ovos, um pacote de etiquetas. Poderei estabelecer correspondências bi-unívocas, pôr cada ovo num orifício, de modo que não sobrem nem ovos sem lugar para serem postos, nem lugares sem ovos? E o mesmo com as etiquetas? Se a experiência responder "Sim", o cesto, o cartão, o pacote são da mesma classe. A classificação é possível, há transitividade. Eu dou um nome a esta classe, por exemplo, digo "cinco", como diria "amarelo", se eu colorir o cesto, o cartão e o pacote de amarelo.

O difícil aqui é que eu estabeleci a relação de equivalência entre elementos de tipo superior, cesto, cartão, pacote, entre os subconjuntos e não entre os objetos primitivos. As barrinhas coloridas





ESTADO DO RIO GRANDE DO SUL  
SECRETARIA DE ESTADO DOS NEGÓCIOS DA EDUCAÇÃO E CULTURA

-5-

do material Cuisenaire simbolizam perfeitamente a mais simples dessas classes que nós chamamos de números, e sôbre as quais definem-se as operações.

Contar é, depois de ter aprendido de cor uma lista de palavras, um, dois, três, quatro, cinco, ..., atribuir a cada classe uma dessas palavras. Dêste modo, nós voltamos à correspondência bi-unívoca entre os elementos de um protótipo de classe estudada (por ex., o conjunto dos meus dedos) e as palavras da lista tomadas em ordem a partir de "um". A última palavra pronunciada é o nome do número. Eu digo "cinco", mas se houvesse tomado a lista "violeta, azul, verde, amarelo"..., eu teria dito "amarelo".

Tudo isto é certamente muito complexo, mas a criança é tão inteligente que bastam um ou dois anos para ter um conhecimento de 100 primeiros números, suficiente para utilizá-los e fazer algumas operações. No 1º ano elementar, ela ainda não esqueceu que se trata de classes de equivalência dentro dos conjuntos que ela manipula ou desenha.

Medir: Trata-se, em 1º lugar, de definir, por uma experiência conveniente, uma relação de equivalência entre (des tiges), (des ficelles tendues), para considerar como da mesma classe os objetos que nós dizemos terem o mesmo "comprimento". Da mesma maneira, a balança indica os objetos que têm a mesma massa, etc. Em seguida, é preciso associar a cada classe um elemento do conjunto dos números, de modo que haja correspondência bi-unívoca.

Não somente o conjunto dos números naturais não basta mais, e é preciso, no curso ginásial, introduzir os números decimais, mas ainda uma classe de equivalência definida por "ter a mesma medida", torna-se terrivelmente rica: 5 metros, 5 gramas, 5 horas, 5 francos, é bem mais variado do que 5 ovos, 5 porta-ovos, 5 dedos, e isso não ~~é~~ ~~de~~ realmente, ~~ser~~ desenvolvido, digo desenhado. Deve-se fazer intervir uma outra relação de equivalência: "ser de grandezas da mesma espécie". Mas logo o espírito não segue mais: o sinal 5 substitui toda a idéia; o cálculo torna-se mecanismo, a álgebra dos conjuntos e esquecida e dá lugar à álgebra dos números, que a traduz. É <sup>as mesmas coisas</sup> talvez um progresso técnico e uma <sup>perda de</sup> consciência, o abandono de todo um domínio matemático. Precisamos bem em toda ocasião a correspondência bi-unívoca entre o conjunto de grandezas e o conjunto de números.





Estudo Sériô da Medida

Sobretudo, não confundir "relação de equivalência" e "correspondência bi-unívoca". Se, por exemplo, a criança vê em seu livro:

preço de 3 metros = Cr\$300,00

ela escreverá em abreviado: 3m = 300cr, e depois, um dia, 3 = 300.

Habitue-mo-la a traduzir a relação completa pelo esquema:

comprimento em metro	preço em Cr\$
3	300

A flecha curva indica a correspondência.

comprimento em metro	preço em Cr\$
3	300

*Finalizado*  
*em 4/10/79*  
*Wendel de S.*