L A B O R A T Ó R I O   D E   M A T E M Á T I C A

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO "GEN. FLORES DA CUNHA"

Círculo de Estudo de Matemática

2º curso de Matemática promovido pelo Círculo

Professôras bacharéis em Matemática:

Adair Vera

Maria Águeda de O. Freitas

1º assunto: Teoria das frações

Professôra Adair Vera

Biblipgrafia consultada:

Omar Catunda   Análise Matemática

Sausone - ITÁLIA

Monteiro, Antônio Aniceto
e
Paulo, José da Silva   ARITMÉTICA RACIONAL

Resumo da aula cedido pela professôra:

TEORIA DAS FRACÕES

1. - Introdução

2. - Definição

3. - Propriedades da Igualdade

   a) - Reflexiva.

   b) - Simétrica

   c) - Transitiva (Lei de Euclides)

4. - **Propriedades das Frações**

   a) - Frações com mesmo denominador e iguais, têm mesmo numerador.

   b) - Fração igual a um inteiro o numerador é múltiplo do denominador.

1. Fração aparente

2. Número inteiro

3. Representação de um número inteiro $\left(\frac{a}{1}\right)(a,1)$

c) - Fração nula ou fração zero.

d) - Uma fração é nula só se o seu numerador é zero.

e) - Duas frações iguais e de mesmo numerador têm denominadores // iguais.

f) - Multiplicando numerador e denominador de uma fração por um número, digo, por um mesmo número, obetém-se uma fração igual à anterior.

g) - O mesmo quando se divide.

5. - Propriedade da Adição

a) - Unívoca (lei)

b) - Associatifa (lei)

c) - Lei Modular

d) - Lei do Corte

A - Medida de grandezas

B - Solução ao problema da divisão exata

TEORIA DAS FRAÇÕES

A noção de número inteiro é insuficiente para resolver certas problemas como por exemplo: se quatro indivíduos quiserem repartir uma maçã não utilizam o algorítimo da divisão D = q.d+r que atribui zero maçãs para cada indivíduo, sendo o resto igual a 1; o que êles fazem é cortar a maçã em quatro partes iguais e cada um dêles fica com "um quarto" da maçã (ou seja com uma fração da maçã)

O estudo que faremos a seguir não será pròpriamente uma recapitulação das diversas interpretações concretas da noção de fração, mas ùnicamente o estudo da elaboração de uma teoria das frações formalmente independente dessas interpretações. Nós nos introduziremos assim numa técnica de construção de números fracionários.

Vamos partir então do seguinte: Consideremos a equação do 1º grau:

$$bx = a$$

onde a e b são números inteiros sendo $b \neq 0$. Esta equação nem sempre é resolúvel na classe dos inteiros. (Entendemos aqui "resolver" a equação", determinar o valor da incógnita x). Só será resolúvel se b fôr fator de a.

Trataremos então de generalizar a noção de número, de modo a alterar essa situação.

Vamos partir então da equação de 1º grau:

$$bx = a \qquad b \neq 0$$

O conhecimento das equações do 1º grau nos leva a indicar a solução dessa equação pelo símbolo: $\frac{a}{b}$ (lê-se a sôbre b).

O inteiro a tem o nome: numerador.

O inteiro b tem o nome: denominador. (Note-se que aqui não foi levado em consideração o fato de ser ou não b um fator de a. Simplesmente consideramos o símbolo $\frac{a}{b}$.

Pois bem, o nosso objetivo é estudar a classe de todos os símbolos $\frac{a}{b}$ onde : - a: inteiro (0,1,2,.............)

b: natural (1 2 3, ...)

Para que o símbolo $\frac{a}{b}$ se possa dar o nome de fração é ainda necessário definir uma relação de igualdade e duas operações (adição e multiplicação) sôbre aquêles símbolos.

Apresentaremos pois a seguinte definição:

Definição: A classe F das frações é formada por todos os pares ordenados de inteiros que representaremos por $\frac{a}{b}$,(onde $b \neq 0$).

a = numerador

b = denominador

desde que se estabeleçam as seguintes definições:

1 - Igualdade:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{se e só se } ad = bc \text{ onde } b \neq 0 \quad d \neq 0$$

2 - Adição: Dá-se o nome de soma $\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right)$ das duas frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ à fração $\frac{ad + bc}{bd}$ (notámos que $bd \neq 0$)

3 - Multiplicação: Dá-se o nome de produto $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$ das duas frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ à fração $\frac{ac}{bd}$ (note-se que $bd \neq 0$)

{Igualdade
{Adição
X

Não basta portanto afirmar que um par osdenado de inteiros // constitúa uma fração; é necessário que estejam satisfeitas as definições 1, 2, 3. Essas definições fazem parte integrande da teoria das frações elaborada a partir da noção de número inteiro.

As definições 1, 2, 3, não são dadas arbitràriamente, mas são fundamentadas na resolução de problemas concretos.

O objetivo da teoria das frações é agora estudar as propriedades da relação de igualdade e das operações de Adição e Multiplicação.

I - Igualdade

A relação de igualdade goza das seguintes propriedades:

1- Reflexiva:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \therefore \quad ab = ba$$

2 - Simétrica:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \therefore \quad \frac{c}{d} = \frac{a}{b}$$

$$ad = bc \;\therefore\; bc = ad$$

$$ad = bc \qquad ad = bc$$

3 - Transitiva (ou lei de Euclides)

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}; \quad \frac{a}{b} = \frac{e}{f}; \quad \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$$

Demonstração:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \qquad\qquad \frac{a}{b} = \frac{e}{f}$$

$$(1)\ ad = bc \qquad\qquad (2)\ af = be$$

Multipliquemos os membros de (1) por f e de (2) por d

$$fad = fbc \qquad\qquad daf = dbe$$

$$f\cancel{b}c = d\cancel{b}e$$

$$b = e$$

Pela lei de cancelamento

$$fc = de$$

ou seja $$\boxed{\frac{c}{d} = \frac{e}{f}}$$

Propriedades das frações

1. - Se duas frações têm o mesmo denominador e são iguais, então os numeradores são iguais.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{b} \qquad a\cancel{b} = c\cancel{b} \qquad b \neq 0$$

lei do corte

$$\boxed{a = c}$$

2. - Se uma fração $\frac{a}{b}$ é igual a um inteiro c, então a é múltiplo de b

$$\frac{a}{b} = c \qquad a = bc \qquad c = a : b$$

a - Chamaremos de fração APARENTE àquela cujo numerador é múltiplo do denominador; uma fração aparente é igual ao quociente entre o numerador e o denominador.

$$\frac{a}{b} = a : b = c$$

b - Um número INTEIRO é igual a uma fração que tem para denominador um inteiro arbitrário diferente de zero e para numerador o produto do inteiro dado pelo inteiro arbitrário.

c - Um número inteiro pode ser representado por (a , 1)

3 - Uma fração é nula se é nulo o seu numerador

$$\frac{a}{b} = 0 = \frac{0}{1} \qquad \frac{a}{b} = \frac{0}{1} \therefore a \cdot 1 = b \cdot 0 = 0$$

$$a \cdot 1 = 0$$

$$\boxed{a = 0}$$

4 - Se duas frações não nulas e têm o mesmo numerador e são iguais, então os denominadores são iguais.

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{c} \qquad \cancel{a}c = \cancel{a}b \qquad a \neq 0$$

Lei do corte $c = b$

5 - Multiplicando o numerador e o denominador de uma fração por um

número diferente de zero, obtém-se uma fração igual à anterior.

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n} \qquad n \neq 0$$

$$a(b \cdot n) = b(a \cdot n)$$

$$\boxed{abn = ban}$$

No caso clássico diz-se que as frações assim obtidas são equivalentes; mas de acôrdo com nossa definição inicial de igualdade, dizemos que as frações são iguais.

6 - Dividindo numerador e denominador de uma fração por um divisor comum obtém-se uma fração igual à primitiva.

$$\frac{a}{b} = \frac{a : m}{b : m}$$

$$a(b : m) = b(a : m)$$

$$ab : m = ba : m$$

$$\boxed{ab : m = ab : m}$$

II - <u>Adição</u>

A operação de adição goza das seguintes propriedades:

1 - <u>Lei da Unicidade</u>: Se $\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}$ e $\frac{c}{d} = \frac{c_1}{d_1}$, então

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a_1}{b_1} + \frac{c_1}{d_1}$$

<u>Demonstração</u>:

(1) $\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1} \therefore ab_1 = a_1b$

(2) $\frac{c}{d} = \frac{c_1}{d_1} \therefore cd_1 = c_1d$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \boxed{\frac{ad + bc}{bd}}$$

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{c_1}{d_1} = \boxed{\frac{a_1d_1 + b_1c_1}{b_1d_1}}$$

Queremos demonstrar que estas duas frações são iguais ou o que / equivale a:

$$b_1d_1(ad + bc) = bd(a_1d_1 + b_1c_1) \quad \text{ou ainda:}$$

(3) $(d_1d)(ab_1) + (b_1b)(cd_1) = (dd_1)(a_1b) + (bb_1)(c_1d)$

Devemos mostrar que (3) é uma conseqüência de (1) e (2). Das // fórmulas (1) e (2) resultam respectivamente as igualdades:

$$dd_1(ab_1) = dd_1(a_1b)$$

$$bb_1(cd_1) = (c_1d)bb_1$$

Somando membro a membro:

$$dd_1(ab_1) + bb_1(cd_1) = dd_1(a_1 b) + (c_1 d)bb_1$$

o que nos dá a relação (3)

2 - Lei Associativa:

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f} \qquad \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right)$$

(1) $$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f} = \frac{ad + bc}{bd} + \frac{e}{f} = \boxed{\frac{adf + bcf + bde}{bdf}}$$

(2) $$\frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} + \frac{cf + de}{df} = \frac{adf + b(cb + de)}{bdf} =$$

$$= \boxed{\frac{adf + bcf + bde}{bdf}}$$

(1) = (2)

LeiModular

3 - Lei Modular: Existe uma fração 0 tal que $\frac{a}{b} + 0 = \frac{a}{b}$

Consideremos a fração $0 = \frac{0}{1}$ a qual daremos o nome de fração // ZERO.

$$\frac{a}{b} + 0 = \frac{a}{b} + \frac{0}{1} = \frac{a.1 + 0.b}{b.1} = \frac{a}{b}$$

4 - Lei Comutativa:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

$$\frac{c}{d} + \frac{a}{b} = \frac{bc + ad}{db}$$

Como $ad + bc = cb + ad$ e $bd = db$, teremos: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} =$

$$= \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$$

5 - Lei do Corte: Se $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a}{b} + \frac{e}{f}$, então $\boxed{\frac{c}{d} = \frac{e}{f}}$

Demonstração:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \boxed{\frac{ad + bc}{bd}}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{e}{f} = \boxed{\frac{af + be}{bf}}$$

$$\frac{ad + bc}{bd} = \frac{af + be}{bf}$$

$(ad + bc).bf = (af + be)bd$

1 - Pela lei do corte para a multiplicação de inteiros - $(b \neq 0)$

$(ad + bc)f = (af + be)d$

$adf + bcf = afd + bed$

2 - Pela lei do cancelamento da adição de números inteiros:

$$bcf = bed$$

Como $b \neq 0$ pode-se cancelar, e se tem $cf = ed$ ou seja

$$\boxed{\frac{c}{d} = \frac{e}{f}}$$

Revisado em 2/10/70
Westhaller