FUNDAMENTOS DA MATEMÁTICA

Idéias primitivas:

Conjunto (classe, coleção, família)

Elemento (Indivíduo)

$a \in A$

elemento conjunto

Axiomas - (são necessários para as operações)

São proposições que se pedem ser aceitas sem demonstração. Não devem ser contraditórias. Devem ser independentes entre si.

Teoremas

Definições

Números reais

Sistema de números reais: Consideremos um conjunto de elementos $a, b, c, \ldots$ que chamaremos de números reais.

$a \neq b$; $a = b$

Propriedades da igualdade: 1 - reflexiva: $a=a$; 2 - simétrica: se $a=b$ então $b=a$; 3 - transitiva: $a=b$, $b=c$, então $a=c$.

Para êstes elementos ficam definidas duas operações: adição e multiplicação.

Axiomas:

1) O conjunto de números reais é fechado sob as operações de adição e multiplicação.

Isto significa: $a+b$ é ainda um número real.

ab é ainda um número real.

$a + b$ adição soma

têrmos operação resultado

ab multiplicação produto

fatôres

ab e ba - resultarão ambos números reais.

2) axioma: A adição e a multiplicação possuem a propriedade da unicidade.

3) axioma: <u>A adição e a multiplicação possuem a propriedade comutativa; isto segnifica que:</u>

$$a + b = b + a \qquad\qquad ab = ba$$

4) axioma: <u>A adição e a multiplicação possuem a propriedade associativa</u>: $(a+b) + c = a + (b+c) \qquad (ab)c = a(bc)$

Indução - observando-se casos particulares, chega-se à generalização.

5) axioma: <u>A multiplicação é distribuitiva em relação à soma.</u>

Isto é: $a(b+c) = ab+ac$

EXERCÍCIOS:

1 - $a + (b+c) = (c+b) + a$ comutativa

$= (b+c) + a$ "

$= (c+b) + a$ "

2 - $(a+b) + c = (a+c) + b$ "

$= c + (a+b)$ "

$= (c+a) + b$ "

3 - $(ab)\ (c+d) = a(bc + bd)$

$= a[b(c + d)]$ associativa

$= a(bc + bd)$ distribuitiva

4 - $a(b+c) = (c+b)a$

5 - $(a+b)(c+d) = (d+c)(b+a)$

6 - $(ab)(c+d) = (d+c)(ba)$

7 - $a(bc) = b(ca)$

8 - $(pq)(ab) = q[(pa)]b$

<u>Subtração</u>

$a + x = b$

6) axioma: <u>A igualdade $a + x = b$ tem uma e uma só solução</u>

Significa que existe um único número real x tal que $a + x = b$

Definição: $x = b - a$

$$a + (b-a) = b$$

$$(b-a) + a = b$$

1) Que número somado a $(a-p) - (b-q)$ para obter **a**?

somar $(b-q)$, fica $a-p$ somar p fica **a**

2) Transformar

$c + [(m-c) + b]$ em $b + m$

$[c+(m-c)] + b$ associativa

$[(m-c) + c] + b$ comutativa

$m + b$ segundo definição de subtração

$b + m$ comutativa

EXERCÍCIOS

$(a+c) - b = c + (a-b)$ somar **b** a ambos os membros

$[(a+c) - b] + b = [c + (a-b)] + b$

$a+c = c + [(a-b) + b]$

$a + c = c + a$

2 - transformar $(a-b) + (b+c)$ em **a**

3 - " $a(x+c) + (b - ac)$ em $ax + b$

4 - $(a-b) - c = (a-c) - b$

5 - $a - (b-c) = (a-b) + c$

TEOREMA: $(a+b) - b = a$

Se da soma de dois têrmos se subtrair um dêles, fica o outro.

Teorema da propriedade distribuitiva da multiplicação em relação a subtração.

$(c-b) + b = c$

$a(c-b) + b = ac$

$a(c-b) + ab = ac$

$\underline{a(c-b) = ac - ab}$

<u>Z E R O</u>

$a + x = b$ $b + y = b$

$a + x = a$

Ambos só terão uma resposta, mas será a mesma?

Somsndo b, teremos:

$(a + x) + b = a + b$

$b + (a + b) = a + b$

$(b + a) + x = a + b$

$(a + b) + x = a + b$

somando a, teremos:

$a + (b + y) = a + b$

$(a + b) + y = a + b$

Comparando ambos, logo teremos que $x = y$.

Existe, então um único número que satisfaz $a + x = a$, qualquer que seja **a**.

Definição de zero - o número real que satisfaz $a + x = a$, qualquer que seja **a**.

0 é o símbolo

$\underline{a + 0 = a}$

Multiplicar por **b**

$b(a + 0) = ba$

$ba + b.0 = ba$

logo

$b.0 = 0$

Tese: $b.0 = 0$

$a + 0 = a$

Negativo de um número

$a + x = b$

$a + x = 0$

O número x que somado a **a** dá 0 é o negativo de **a** é um número real. $-a = x$

1) propriedade

$a = 0$

$0 + x = 0$ pela definição de subtração $x = 0$

pela definição anterior $x = -0$

$\underline{0 = -0}$

2) O negativo de um número diferente de zero é também diferente de 0

$a \neq 0$, se o negativo de **a** fôsse zero:

$a + \underbrace{0}_{\text{neg.ativo de } a} = 0$

$0 + a = a \Longrightarrow a = 0$ (contra a hipótese)

Logo o negativo de **a** não pode ser zero.

1 Teorema: $\underbrace{a - b}_{x} = \underbrace{a + (-b)}_{y}$

$x = a-b$

$x + b = a$

$y = a + (-b)$ somar b a ambos os têrmos

$y + b = [a + (-b)] + b$ associativa

$y + b = a + (-b) + b$ definição do negativo de um número

$y + b = a + (b - b)$

$y + b = a$

Comparando ambos os resultados vem:

2 Teorema: $-(a+b) = (-a) + (-b)$

$x = -(a+b)$ somar $(a+b)$ a ambos os têrmos

$x + (a+b) = [-(a+b)] + (a+b)$ comutativa

$x + (a+b) = (a+b) + [-(a+b)]$

$= (a+b) - (a+b)$

$x + (a+b) = 0$ comutativa

$x + (b+a) = 0$ associativa

$(x+b) + a = 0$ definição de negativa de um número

$x + b = -a$ definição de diferença

$x = (-a) - b$ pelo teor anterior

$x = (-a) + (-b)$

xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

xxxxxxxxxxxxxxxxxxx

Revisado em 4/10/79 Westphalen