I. E. "Gen. Flores da Cunha" - Porto Alegre

Esta pasta contem as traduções de vários autores. sôbre Geometria.

Relação:

1. Organização do Espaço (Nicole Picard).
Tradução da Prof. Maria Feijó Monteiro.
A - I parte: contem 9 fôlhas.
2. B - II parte: contem 8 fôlhas.

3. Ensino da Geometria da Escola Primária
"La Matemática y su Enseñanza atual"
Por Pedro Puig Adam
Contém 13 fôlhas datilografadas.

4. Exploration de l'Espace et Pratique de la Mesure de Z.P. Dienes / E.W. Golding
Tradução: Profª Anna Maria Garcia
Contem 6 páginas.

5. Técnica de Aplicação (Wilma Ward Bruning).
(contém 2 fôlhas.)

6. Teacher's Edition . Patrick Suppes.
Geometria
a) Conceitos
b) "novo vocabulário técnico
c) contem 21 fôlhas

7. Matemática elementar moderna
Autores: Morgan Ward
Assunto: Geometria; contem 36 fôlhas

Organizado por Westphalen

Maio 1978.

7

"Geometria" "Laboratório de Matemática"

LIVRO: Matemática Elementar Moderna.

AUTORES: Morgan Ward - Departamento de Matemática do Instituto Tecnológico da Califórnia

e

Clarence Ethel Hardgrove - Departamento de Matemática da Universidade de Illinois do Norte.

EDITORA: Addison - Wesley Publishing Company, inc.

CAPÍTULO: 8º - págs. 166 até 204.

ASSUNTO: Geometria.

Para o laboratório de matemática, do Instituto de Educação, de Porto Alegre esta nossa contribuição

Olinda da Rocha Lôbo

Supervisor de Matemática da C.T.P. Brasília D. Federal

Secretaria de Educação - Edifício Pioneiras Sociais 5º andar.

1. História

A geometria tem vários aspectos que só podem ser compreendidos à luz do passado. É necessário, portanto, conhecer alguma coisa de sua história e de seu lugar predominante na cultura ocidental a fim de compreender sua importância na educação e porque, está sendo introduzida no currículo da escola elementar.

A geometria é tão importante, como matéria quanto a aritmética A geometria ornamental aparece na cerâmica neolítica feita no vale do Nilo, aproximadamente, há seis mil anos atrás e desenhos geométricos têm sido traçados desde tempos pré-históricos até agora por artistas de tribos que vivem numa cultura da Idade da Pedra, como por exemplo alguns índios da América do Sul.

Geometria antiga. Acredita-se qua a geometria plana e sólida teve seu início nas civilizações que floresceram nos vales do Nilo e do Eufrates há mais de quatro mil anos. A tradição grega atribuía a invenção da geometria aos egipcios. Mas, recentemente, inscrições decifradas em tábuas de barro desenterradas na Mesopotânia durante os últimos cem anos revelam que os babilônios de 1 700 anos, A.C. conheciam um considerável número de fatos sôbre a geometria.

O sentido etinológico da palavra "geometria" é "medida de terra". Algumas das tábuas de barro babilônicas contém instruções sôbre como calcular a área de pedaços de terra com forma de triângulos e quadriláteros. Outras tábuas mostram que os babilônios utilizavam, em seus cálculos, o teorema de Pitágoras e as propriedades de triângulos semelhantes. Ainda outras tábuas dão regras para calcular os volumes de diques trapezóides e outros corpos sólidos simples. Nem tôdas essas regras são corretas. Rolos de papiro mostram que os egipcios daquêle período tinham, mais ou menos, o mesmo grau de conhecimento dos babilônios. Mas, nada prova que qualquer dêsses dois povos organizassem seu conhecimento de geometria de acôrdo com um padrão ordenado. Isto, sòmente, foi realizado mais de mil anos depois quando os gregos criaram a ciência da geometria.

Geometria e matemática grega.

No período entre 600 e 300 anos A.C. os gregos transformaram a geometria de uma simples coleção de resultados isolados e regras mecânicas para uma ciência matemática altamente desenvolvida. Durante êsse tempo descobriram muitos conceitos geométricos novos. Sua maior contribuição, no entanto, foi demonstrar que podemos obter conhecimentos importante e útil através do raciocínio dedutivo partindo de premissas explícitas. Por causa dessa atitude os gregos inventaram a matemática pura.

Apesar de nossa quase total ignorância sôbre o verdadeiro início da matemática grega, sabemos qua foi desenvolvida em estreita co nexão com a filosofia. Nenhum dos escritos dos fundadores tradicionais tais como, Thales (686 A.C.) e Pitágoras (550 A.C.) subsistiu. A geometria era altamente apreciada pelos gregos como uma revelação de harmonia e ordem do universo. Tão grande era o seu sucesso na geometria, que à tôda sua matemática, mesmo a aritmética e a álgebra, era dada uma aparência geométrica.

A famosa Academia de Platão em Atenas, atraíu muitos matemáticos; um dos maiores foi Eudoxus (370 A.C.), que foi tanto matemático como astronômo. As realizações dos matemáticos platônicos e de seus predecessores pitagóricos foram compilados cêrca de setenta anos mais tarde, na Alexandria, pelo matemático Euclides (300 anos A.C.). Foi muito bem sucedido nêsse empreendimento tendo produzido um dos mais famosos livros textos de todos os tempos, os Elementos.

Elementos de Euclides.

Os treze livros de Elementos de Euclides têm a finalidade de dar um desenvolvimento estritamente lógico à geometria plana e à geometria sólida. Todos os teoremas são demonstrados partindo de um pequeno número de definições e postulados explícitos que formam as premissas do trabalho. O tratamento, no entanto, é estritamente dedutivo. Não há motivação, nem debate sôbre como as construções são feitas e não hã aplicações de teoremas a não ser para demonstrar outros teoremas.

A importância histórica dos "Elementos" de Euclides é indicada pela seguinte citação:

> "Depois da Bíblia , os "Elementos são, provàvelmente, o livro mais reproduzido e estudado na história do mundo ocidental. Mais de mil edições apareceram desde a invenção da imprensa e antes dêsse tempo cópias manuscritas dominaram grande parte do ensino de geometria. A maior parte de nossa geometria escolar é tomada, muitas vêzes literalmente, dos (primeiros) seis dos treze livros; e a tradução euclidiana ainda pesa no nosso ensino elementar..."

No princípio da Idade Média, os"Elementos" foram, assiduamente estudados pelos árabes, mas eram conhecidos, na Europa, sòmente po alguns monges eruditos. No fim da Idade Média, a geometria plana dos primeiros seis livros, que agora de alguma forma é ensinada nos "high schools" (ginásios) dos Estados Unidos, tornou-se disciplina de Universidade na Europa. Foram realizadas conferências sôbre os "Elementos " nas universidades de Praga (fundada em 1 348), Viena (1 365)Heidelberg (1 386) e Leipzig (1 409) quase a partir da data de sua fundação. A primeira edição impressa do livro foi versão latina imprimida em Veneza em 1 486.

Euclides não gozou de popularidade entre seus alunos. Na venerá vel Universidade de Paris (fundada em 1 160), candidatos a Mestres em Arte, nos primórdios do século dezesseis, tiveram de fazer um juramento solene de que haviam assistido fielmente conferências sôbre os primeiros seis livros. Na Universidade de Heidelberg era exigido um juramento semelhante.

No século XIX a geometria, plana foi incluída como disciplina nas escolas da Europa ocidental e da América do Norte. Chama a atenção o fato de que na Inglaterra e nos Estados Unidos esta disciplina era apresentada aos meninos e meninas quase exatamente da mesma maneira como era apresentada a amadurecidos especialistas em matemática, na Alexandria a mais de dois mil anos.

Em nossos dias, a geometria plana e a geometria sólida são mencionadas conjuntamente como geometria Euclideana, em parte para diferencá-las de outros tipos de geometria, descobertas mais tarde, mas principalmente em homenagem ao gênio de Euclides como professor e expositor.

2. Importância nos dias atuais.

De um ponto de vista prático, a geometria é uma idealização e sistematização de nossas experiências espaciais ordinárias, experiências essas que todo ser humano tem quase a partir de seu nascimento. Considerada como ciência do espaço, a geometria tem dois aspectos: o lógico, mostrando nos "Elementos " de Euclides e o físico, representado pela sua aplicabilidade às nossas atuais experiências espaciais.

Êsses dois aspectos devem ser claramente compreendidos. Assim , por exemplo, do ponto de vista lógico, os teoremas da geometria euclideana ainda seriam verdadeiros, no sentido de que, necessàriamente, partem de postulados daquela geometria, mesmo se corpos rígidos não pudessem ser movidos livremente no espaço e se os ângulos de triângulos cuidadosamente traçados não formassem sempre um ângulo de 180 graus. No entanto, a importância da geometria euclideana seria insignificante , neste caso, uma vez que então seria apenas um dos muitos sistemas matemáticos que têm sido elaborados dedutivamente por matemáticos sem levar em consideração qualquer aplicação física.

De fato, a geometria euclideana concorda extremamente bem com nossas experiências espaciais ordinárias. Essa concordância é a principal razão de sua contínua importância. Além disso, os conceitos básicos da geometria euclidéana, isto é, as idéias de ponto, reta, plano e figura geométrica são coerente com nossas intuições espaciais. Finalmente, pelo fato dêsses conceitos serem abstratos e mesmo assim poderem ser visualizados, êles nos fornecem importantes caminhos de pensamentos para as imagens geométricas de situações não diretamente relaci onadas com o espaço físico. O desenvolvimento da imaginação geométrica da criança é um dos importantes objetivos que os educadores tinham em mente quando incluiram geometria no currículo da escola elementar.

3. A geometria euclideana como ciência física.

Os primeiros homens que compreenderam os aspectos físicos e lógicos da geometria foram os grandes matemáticos do século XIX, Gauss (1777 - 1855) Lobachevski (1793 - 1856) e Riemann (1826 - 1866). Antes de suas descobertas, acreditavam-se ser impossivel qualquer conceito de espaço que não fôsse o de Euclides.

Pouca atenção foi dada à geometria desenvolvida por êsses matemáticos até o século XX, quando o "insight de Albert Einstein (1879 - 1955) e a revolução no campo da física, provocada pela teoria da relatividade, conduziram ao reconhecimento geral da dupla natureza da geometria. Agora se reconhece que a geometria euclideana pode ser considerada como um dos ramos da física teórica. Como êste fato tem relação direta com a geometria estudada nas escolas, será abordado mais adiante.

Qualquer ciência tem dois aspectos, o teórico e o experimental , como foi salientado no capítulo 4. Numa ciência bem desenvolvida como a física, por exemplo, o aspecto teórico consiste de vários modêlos matemáticos escolhidos com o fim de corresponderem com a observação experimental e suscetíveis de elaboração matemática de tal maneira que as predições feitas na base do modêlo possam ser tratadas através de experimentação. Quando considerada assim, a geometria euclideana como modêlo matemático é uma parte da física teórica. Prediz o que vai acontecer quando certos experimentos simples são realizados numa porção de espaço longe de corpos materiais e em campos de fôrça ràpidamente mutáveis. O ideal seria que essa porção de espaço fôsse vazia, isto é, livre de tôda matéria ou energia. Nesta situação, unidades exatas de medida podem ser movidas vagarosamente sem qualquer mudança em seu tamanho ou forma, sinais leves caminhar ao longo de caminhos retos e se um triângulo fôr traçado numa superfície plana e seus ângulos internos fôrem cuidadosamente medidos em graus, a soma dos ângulos será de cêrca de 180 graus.

As condições pressupostas aqui não são encontradas no mundo, que em geral, nos cerca. Mas as distorções de tamanho e forma que ocorrem são geralmente tão imperceptíveis a ponto de não poderem ser descobertas. A excelente concordância da teoria geométrica com o experimento físico, na maioria dos inventos, é mostrada pelo fato de que o grande ramo fa física teórica, fundada por Newton e conhecida como mecânica-clássica, pressupõe a geometria euclideana como descrição teórica do espaço.

Com o advento da teoria da relatividade, tornou-se possível compreender contradições entre os fatos experimentais e as predições teóricas baseadas na mecânica clássica e sua geometria subjacente, as quais haviam sido inexplicáveis até então. Como resultado os cientistas desenvolveram novos modêlos matemáticos do espaço baseados na teoria da relatividade e conseqüentemente numa geometria não euclideana.

A geometria que se aplica ao mundo ràpidamente em movimento, das partículas elementares, estudadas pelos físicos, ainda é desconhecida. É quase certo, porém, que essa geometria não é euclideana. No entanto, a geometria euclideana é extremamente importante na ciência aplicada, uma vez que tôda engenharia repousa na mecânica clássica e conseqüentemente na geometria euclideana.

4. Geometria experimental

O aparelhamento tradicionalmente, usado na geometria plana experimental é disponível em qualquer sala de aula. Consiste numa fôlha de papel, um lápis apontado, um compasso e uma régua. Com êste aparelhamento simples, pode-se realizar uma grande variedade de experimentos cujo resultado pode ser predito pela geometria teórica; isto é, pelo modêlo matemático elaborado pelos "Elementos" de Euclides.

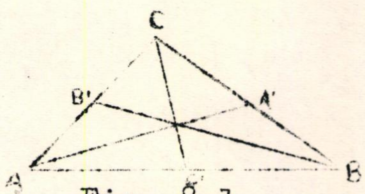


Fig. 8-1

Por exemplo, suponhamos que queremos realizar o experimento ilustrado na Fig. 8 - 1 . Procedemos com se que.

Passo 1 - Traçamos um triângulo e marcamos seus vértices com as letras A, B e C.

Passo 2 - Localizamos o meio dos lados do triângulo e marcamos com as lêtras A', B' e C'.

Passo 3 - Traçamos os fragmentos $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ e $\overline{CC'}$, unindo os vértices do triângulo ao ponto que fica no meio dos lados opostos.

Passo 4 - Observa-se a interseção dos segmentos traçados no passo nº3.

A geometria euclideana prediz que os três segmentos traçados no passo nº 3 se encontrarão num único ponto. A proximidade da concordância no passo nº 4 do experimento com a predição teórica dependerá da qualidade dos instrumentos de experimentação e da habilidade e cuidado do experimentador. Naturalmente, se a experimentação é realizada por um desenhista perito que usa instrumentos de desenho de excelente qualidade, o resultado será melhor do que se fôr realizada por uma criança em sua sala de aula. No entanto, mesmo um aluno da escola primária que desenvolve com cuidado os passos será capaz de traçar uma fi gura que esteja em concordância com a predição teórica.

Observe que nada é provado por esta experimentação, não importa quantas vêzes seja repetida e quão cuidadosamente. No entanto, o processo experimental fornece evidência indutiva para apoiar um teorema da Geometria euclideana: -

As linhas que unem os vértice de qualquer triângulo ao ponto que fica no meio dos lados opostos encontram-se num ponto.

Essa experimentação provávelmente já foi realizada milhares de vêzes. Experimentações semelhantes podem sugerir a verdade de outros teoremas da geometria mesmo naquelas situações em que a prova dedutiva seja desconhecida ou incompreensível ao experimentador. Essas experimentações, realizadas cuidadosamente, são exemplos do processo da descoberta pela indução. Já que o lado teórico da geometria é altamente desenvolvido, não é provável, como o é em ciências menos desenvolvidas que as experimentações conduzam a resultados anteriormente desconhecidos. Mas podem ser de valor considerável ao principiante em geometria se não os confudir com a prova dedutiva.

5. Definições da Geometria

Definições Verbais

Têrmos básicos, tais como "ponto","reta" e "plano", usados na geometria euclideana, são familiares a quase todos; mas desde o início da própria geometria, definir as idéias dêsses termos tem sido considerado uma tarefa difícil. Ha 2.500 anos atrás os discipulos de Pitágoras definiram o ponto como "unidade em posição". Mais recentemente, definições semelhantes tem sido propostas, tais como: "Ponto é um objeto que tem posição mas não tem dimensão" ou "Ponto é uma localização no espaço".

Tem-se tentado o mesmo tipo de definição para reta e plano.

Em cada uma das definições citadas aparecem outros têrmos, menos simples. Considere esta definição: "um ponto é um objeto que tem posição, mas não tem dimensão". Se esta assertiva deve exprimir o significado de um ponto, então o significado dos têrmos "posição" e "dimensão" também devem ser compreendidos. Presumivelmente êsses têrmos se referem a idéias mais simples do que a idéia do ponto. Mas, uma pequena reflexão o convencerá de que as idéias de posição e dimensão são muito mais difíceis de compreender e definir do que a idéia de ponto. Uma boa definição deveria usar sòmente têrmos mais fáceis de entender do que o têrmo a ser definido.

Há duas maneiras de resolver a dificuldade de exprimir o significado dos têrmos: uma, informal e intuitiva, e outra, formal e lógica Nenhuma delas tenta definir o ponto ou reta em termos qualquer idéia ' mais simples.

Definições intuitivas.

O método informal de desenvolvimento do significado de conceitos consiste em apelar para a experiência e intuição geométrica. Por exemplo o significado de um ponto é sugerido por um sinal (.) feito com giz no quadro negro, ou melhor ainda, por um sinal (·) feito com um lápis apontado sôbre uma fôlha de papel. Uma reta feita a mão livre com um giz sugere o que significa uma reta; e uma reta traçada - com um lápis apontado e uma régua fornece uma representação ainda melhor de uma reta.

Ponto, reta e plano são idéias abstratas, embora sem significado passa ser compreendido até certo ponto por um ato da imaginação sugerido por gravuras geométricas. Êsse método informal não tem justificação lógica, mas a experiência tem demonstrado que êle muitas vêzes resulta, na compreensão de idéias geométricas, consiste bàsicamente na demonstração de tipos de situaçãoes que conduzam, em primeiro lugar, às idéias de ponto e reta.

Definições matemáticas.

O segundo método para resolver a dificuldade de desenvolver o significado de conceitos é agora adotado, universalmente, em matemática. Têrmos básicos, como ponto e reta, podem ter qualquer significado desde que satisfaçam as condições que os postulados da geometria lhes impõem. Essa maneira de pensar em geometria explica-se melhor através de um exemplo. Considere a geometria rudimentar que segue.

Dado o seguinte:

Hipótese 1. Um conjunto não vazio S de objetos chamados "pontos".

Hipótese 2. Uma familia não vazia de subconjuntos distintos de S chamados "retas".

Por conseguinte, os pontos e retas de S satisfazem o seguinte:

Hipótese 3. Se A e B são pontos distintos existe uma e sòmente uma r contendo ambos, A e B .

Hipótese 4. Se a e b são retas distintas, existe, no máximo,um ponto R contido tanto em a como em b.

Definição 1. Se r é uma reta e A é um ponto, que é um dos elementos de r, A é chamado de um ponto de r. Diz-se também que r passa po A.

Definição 2. Se a e b têm sòmente um ponto em comum, diz-se - que se cortam. Em caso contrário, diz-se que são paralelas.

Hipótese 5. Tôda reta de S, contém, pelo menos, três pontos.

Hipótese 6. Se r é qualquer reta de S e A é qualquer ponto de S, existe, no máximo, uma reta contendo A, que paralela a r.

Hipótese 7. Existem, no mínimo, duas retas em S.

Definição 3. S chama-se plano.

Se você interpreta os têrmos, ponto e reta, da maneira como está acostumado pela geometria euclideana, tôdas as hipóteses e definições dadas são assertivas compreensíveis. Além disso, se você compreende os conceitos de conjunto do 2º capítulo, então as hipóteses de 1 a 7 e as definições de 1 a 3 exprimem o significado, embora a natureza precisa de S, os elementos de S e a familia de retas de S não estejam especificadas. As hipóteses de 1 a 7 são as premissas da geometria a ser considerada. Outras propriedades desta geometria são dadas na série de exercícios.

6. Modelos da Geometria experimental.

Na subdivisão nº 4 falamos sôbre a utilidade de figuras a analogias visuais bem traçadas na demonstração do significado de conceitos geométricos fundamentais. Muitos desses modêlos são usados no ensino da Geometria. Podem ser muito simples, tais como um pedaço de cartolina e 1 barrinha usados para ilustrar a interseção de um ponto e de um plano, ou então muito elaborados, tais como complicadas figuras geométricas que ilustram cada passo de uma rigorosa prova dedutiva. Uma parte importante da geometria experimental consiste no uso destas figuras ou modêlos para capacitar o aluno a aprender intuitivamente o significado de conceitos e teoremas geométricos.

A descrição detalhada da natureza e uso das figuras pertence a metodologia do ensino de geometria. Mas agora precisamos de um exemplo para esclarecer melhor a distinção entre geometria experimental e geometria teórica. Mais tarde também vamos precisar demonstrar como o raciocínio indutivo e dedutivo é combinado na geometria. O exemplo escolhido é um modêlo de fácil construção que ilustra um importante teorema geométrico.

Falando de um modo geral os modelos que ilustram definições e teoremas geométricos podem ser considerados como auxílios do aparelhamento tradicional da geometria experimental: lápis, compasso e régua. De fato o equipamento experimental auxiliar é usado em todos os níveis da aprendizagem das ciências tanto para ilustrar como para descobrir o funcionamento de leis científicas. Êsse aparelhamento deve ajudar a ilustrar importantes princípios e mesmo assim, suficientemente simples de modo que o aluno possa realizar sua própria experimentação. O modêlo geométrico que vamos descrever satisfaz tôdas essas exigências. O único material necessário é um pedaço de cartão.

<u>Teorema</u>. A soma geométrica dos três ângulos internos de um triângulo é um ângulo reto.

Êste teorema foi descoberto e provado pelos discípulos de Pitágoras cerca de 500 A.C,. Sua verdade pode ser demonstrada intuitivamente por um modêlo simples. (fig. 8-2)

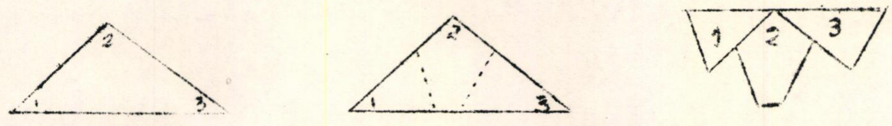


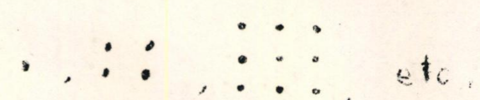
Fig. 8-2

A Fig. 8-2 ilustra os passos tomados para demonstrar o teorema experimental. A fig. 8-2 (a) é uma representação de um triângulo com seus ângulos numerados: 1,2,3. Na Fig.8-2 (b) o triângulo é cortado em três pedaços seguindo os pontinhos. Na Fig.8-2 (c) o pedaço em forma de losango e que contém o ângulo nº 2 é deixado na posição em que estava os dois pedaços triangulares que contém os ângulos 1 e 3 são virados e colocados à direita e esquerda do losango. Observe que os três ângulos, 1,2 e 3 do triângulo. A demonstração sugere, portanto, que a soma dos três ângulos internos de qualquer triângulo formam um ângulo reto.

Devemos reconhecer a natureza experimental dessa demonstração. A experimentação consiste em encaixar de outra maneira os pedaços de um modêlo. Se o modêlo fôr executado cuidadosamente a experimentação o convencerá da verdade do teorema, Mas é uma evidência indutiva, e não, uma prova lógica. Êste fato, no entanto, de modo algum diminui o valor de tais modelos como artifícios capazes de fazê-lo conhecer o significado de um teorema geométrico.

Série de Exercícios 8-1

1. Os discípulos de Pitágoras representavam certos números geomètricamente através de uma disposição padronizada de pontinhos. Representavam os quadrados 1,4,9... como segue abaixo:



Outros números, chamados triangulares, eram representados da seguinte maneira:

(a) Enumere os primeiros dez némeros quadrados.
(b) Enumere os primeiros dez números triangulares.

3. Os discípulos de Petágoras também descobriram uma meneira de representar números quadrados como a soma de números impares consecutivos. Mostre geometricamente como isto pode ter sido descoberto;

5. Escreva um breve relatório sôbre a contribuição de um dos seguintes estudiosos da geometria: Eudoxus, Thales, Pitágoras, Archimedes.

7. As afirmativas feitas por vocês no exercício 6 (a), (b) e (c) foram provados através de sua experimentação? Por que?

9. Identifique três objetos de sua sala de aula que possam ser usados

como modelos para cada um que segue. Identifique com um asterisco objeto que constitui o melhor modêlo para cada um.
(a) Ponto (b) Reta (c) Superfície.

11. Faça a seguinte demonstração provando que o teorema de Pitágoras é intuitivamente evidente.

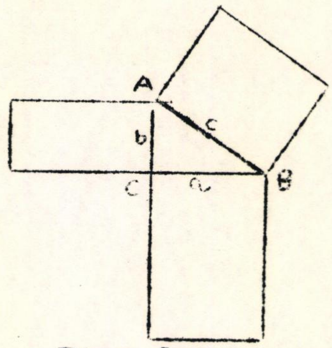


Fig- 8-3

Teorema.

O quadrado construído sôbre a hipotenusa de um triângulo retângulo ABC tem uma área igual à soma das áreas dos quadrados construídos sôbre os catetos. (Fig. 8-3)

Passo nº1. Prepare sete pedaços de cartão com as medidas mostradas na Fig. 8-4. Numere cuidadosamente cada um.

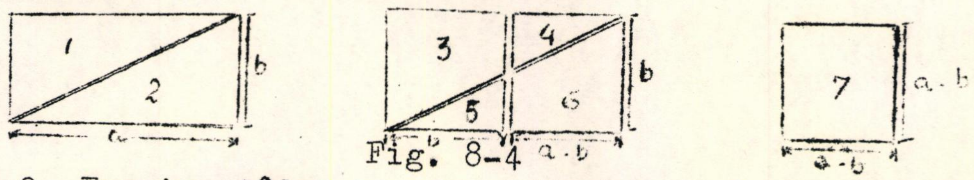


Fig. 8-4

Passo Nº 2. Encaixe tôdas as peças de modo a formar um quadrado cujas dimensões sejam c (Fig. 8-5)

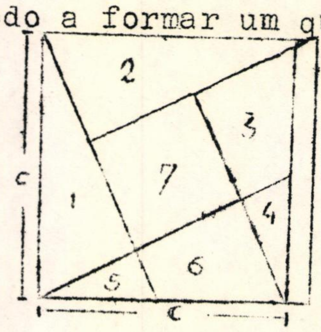


Fig. 8-5

Passo nº 3. Encaixe os pedaços 1,2,4,6 e 7 de modo a formar um quadrado cujas dimensões sejam a.

Passo nº 4. Encaixe os pedaços 3 e 5 formando um quadrado com as dimensões 6.

Explique como êsses passos dão evidência indutiva da verdade do teorema de Pitágoras. Use uma forma mais detalhada que a da Fig.8-3 para sua demonstração.

7. Objetos geométricos, considerados conjuntos de pontos.

Como idéia matemática, o espaço euclideano é um conjunto universal de elementos chamados "pontos". Objetos geométricos, tais como retas, curvas, planos, superfícíes e sólidos, os tópicos da geometria elementar, são familias de subconjuntos distintos que pertencem a êste conjunto universal.

A geometria moderna faz uso constante dos conceitos de conjuntos estudados no capítulo nº 2, no entanto, é necessário fazer algumas modificações no sistema de notação, uma vez que é costume, na geometria elementar, marcar pontos com letras maiúsculas A,P Z, e as retas ou segmentos de retas minúsculas, a,b,...,z.

Consequentemente as letras maiúsculas gregas (gamima) e (delta) serão usadas neste capítulo para designar conjuntos de pontos no espaço ou no plano. .... Diz-se que um ponto P, que é um elemento de um conjunto de pontos , pertence a . Falando mais amplamente, qualquer conjunto de pontos no espaço pode ser considerado como um objeto geométrico. Os conjuntos mais simples são os que consistem de um número finito de pontos. Vêm, em seguida, outros conjuntos mais simples ainda, isto é, os conjuntos associados às retas do espaço. Com o fim de abreviar, dizemos reta, em vez de, linha reta.

Retas, segmentos de retas e semi-retas.

O conjunto de pontos chamado reta da geometria euclideana estende-se indefinidamente para ambas as direções. A reta é determinada por dois pontos quaisquer do conjunto. Uma porção de reta unindo dois pontos quaisquer de seus pontos é chamada segmento de reta.(Fig. 8-6)

Os dois pontos P e Q chamam-se extremos do segmento que unem P e Q. Diz-se que o segmento une seus extremos. Observe que êsses dois pontos são pontos de segmento. Qualquer reta contém um número infinito de segmentos, mas qualquer segmento está contido em sòmente uma reta. Diz-se que se obtem a reta estendendo o segmento em ambas as direções.

Na geometria elementar designamos o segmento, que une os pontos, P e Q, por $\overline{PQ}$ ou por $\overline{QP}$. Lê-se "segmento PQ" e "segmento QP". Às vêzes, em segmento como $\overline{PQ}$ da Fig. 8-6 é marcado por uma simples letra minúscula, digamos, c. Se consideramos $\overline{PQ}$ como um conjunto de pontos, seus elementos são seus dois extremos P e Q e todos os pontos X da reta que estão entre P e Q.

Qualquer ponto P sôbre uma reta separa a reta em duas partes - chamadas semi-retas (Fig-8-7). Estas, estendem-se em direção oposta do ponto, que pertence a ambas semi-retas.

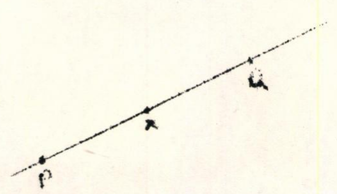


Fig.8-6. Uma reta e um segmento de reta.

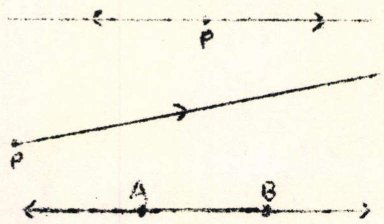


Fig. 8-7. Semi-retas

Êsse ponto chama-se extremo de cada uma das semi-retas. Suas direções são indicadas pelas retas da figura.

Se estendermos o AB da Fig. 8-7 na direção de A para B, obtem-se uma semi-reta com o extremo A. Se o segmento é estendido na direção de B para A, obtem-se uma segunda semi-reta com o extremo B. O conjunto de interseção dessas duas semi-retas é AB e o seu conjunto de união é a reta determinada por A e B.

Ângulos.

Chama-se ângulos o conjunto de pontos formado por duas semi-retas distintas com um extremo comum. O ponto comum chama-se vértice do ângulo e as duas semi-retas chamam-se os lados do ângulo (Fig.8-8). Quando a união dos dois lados do ângulo é uma reta, o ângulo chama-se ângulo reto . (Fig. '8-8b).

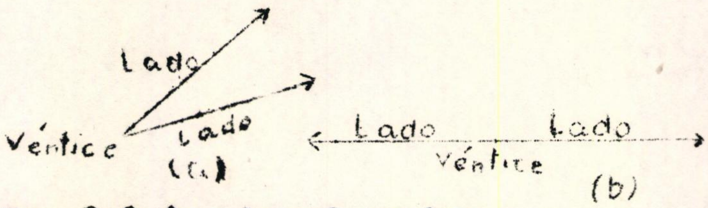


Fig.8-8 ângulos formados por duas semi-retas.

Fig. 8-9. Ângulo determinado por dois segmentos com um extremo comum.

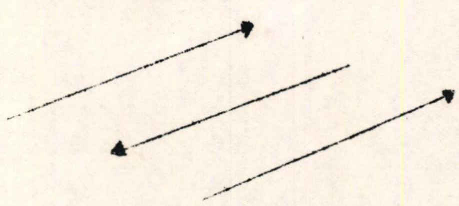
Dois segmentos $\overline{PQ}$ e $\overline{PR}$ com um extremo comum determinam um ângulo com vértice P, desde que R não está sôbre a semi-reta determinada pelo $\overline{PQ}$ (Fig. 8-9). Os lados do ângulo são as semi-retas obtidas pela extensão dos $\overline{PQ}$ e $\overline{PR}$ nas direções de P para Q e P para R.

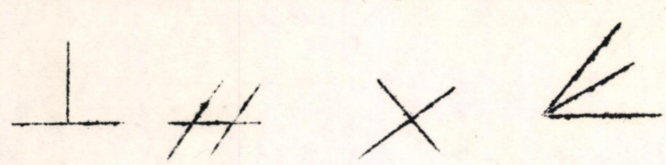
O ângulo da Fig. 8-9 é designado pelo símbolo" RPQ," " QPR" ou simplesmente por " P." Essas expressões lêem-se respectivamente: "ângulo RPQ", "ângulo QPR" e "ângulo P". Observe que o ponto que é o vértice ocupa a posição central do nome de ângulo.

Vetores.

Associa-se naturalmente uma direção à semi-reta. Um segmento de reta dirigido chama-se vetor. Na Fig. 8-10 são mostrados muitos vetores cuja direção é indicada pelas setas. Observe que a um segmento de reta se pode dar uma de duas direções.

Os vetores são amplamente usados na matemática, na ciência e engenharia com o fim de ajudar a ilustrar, geomètricamente, complicadas idéias físicas. Seu estudo agora é parte da matemática da escola primária e do "high school" (ginásio). A adição e subtração de números inteiros, através do uso de vetores, são ilustradas no capítulo 11.





Figuras planas euclideanas.

No desenvolvimento da geometria euclideana os primeiros objetos geométricos estudados são as figuras planas feitas com um número finito de retas, semi-retas e segmentos de reta . Vários dêsses objetos - são mostradas na Fig. 8-11. Uma das figuras mais conhecidas é o triângulo. Triângulo euclideano é um conjunto de pontos consistindo de três pontos distintos que não estão sôbre a mesma reta, chamados vértices do triângulo, e de três segmentos de reta unindo êsses três pontos. Os segmentos de retas são chamados os lados do triângulo. Os triângulos são designados conforme seus vértices.

No capítulo 3 foi relatado que o desenvolvimento da geometria plana de Euclides é lògicamente incompleta porque não demonstra explicitamente todos os postulados usados para provar seus teoremas; isto é êle apelou implìcitamente para propriedades de fuguras que não podiam ser provadas na base de seus postulados. A fig. 8-12 ilustra uma dessas hipóteses ocultas.

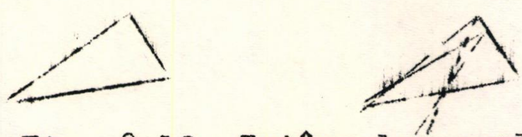


Fig. 8-12. Triângulos euclideanos.

É evidente que se traçarmos uma semi-reta através de um dos vértices do triângulo de modo que corte o interior do triângulo, ela terá de cortar o lado oposto do triângulo. Uma semi-reta assim é mostrada pela linha pontilhada da Fig. 8-12: DEF. Êste fato não pode ser provado na base dos postulados de Euclides e em um tratamento rigoroso da geometria, tem de ser levantado como hipótese. Por razões como esta os matemáticos fazem uma diferença muito acentuada entre a prova dedutiva e o raciocínio indutivo baseado na geometria experimental.

O objetivo dêste capítulo não é dar tratamento dedutivo à geometria euclideana; nosso objetivo é tornar a geometria intuitivamente mais simples. O triângulo euclideano e outras figuras planas tais como, retângulos, quadrados e círculos são redefinidos de maneira que seus pontos internos são considerados como parte da figura. Escolhemos esta abordagem porque é intuitivamente mais simples conceber o triângulo como uma superfície que consiste, não sòmente, de seus lados e vértices, mas também de todos os pontos de seu interior. Se é neces-

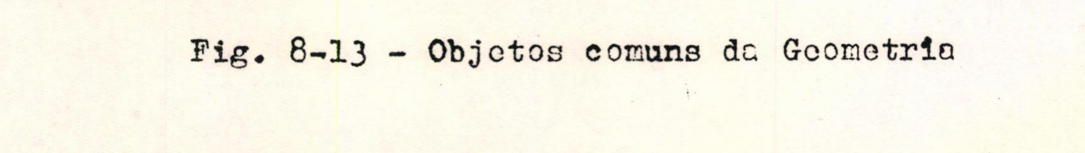


Fig. 8-13 - Objetos comuns da Geometria

14

sário fazer diferênça entre objeto geométrico e o triângulo euclideano, então o triângulo euclideano será consideradao como o limite e o interior será chamado região triangular . Nas figuras dêste livro as superfícies são indicadas por um sombreado. Algumas das figuras mais comhecidas estão representadas na Fig. 8-13. Cada uma delas é obtida da figura euclideana do mesmo nome, unindo-se esta figura com todos os seus pontos internos.

Operações de conjuntos usando conjuntos de pontos.

As operações de achar o complemento de um conjunto e o conjunto de união e o conjunto de interseção de dois ou mais conjuntos podem ser aplicadas aos conjuntos de pontos no plano ou espaço. Essas operações nos permitem muitas vêzes, vizualizar o fato de que conjuntos complicados estão geomètricamente relacionados com conjuntos muito mais simples. O complemento de um conjunto de pontos de um plano é definido como todos os pontos do plano que não pertencem ao conjunto.

Por exemplo, o complemento do triângulo da Fig. 8-14 consiste de todo o plano que está fora do triângulo.

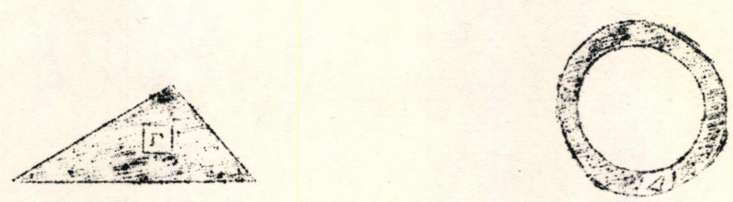


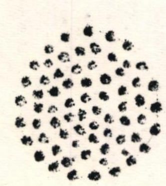
Fig. 8-14 - Complementos de um conjuntos de pontos.

Geralmente, chamamos êste conjunto de exterior do triângulo. O complemento de um conjunto pode ser mais complicado. Por ex., se o conjunto de pontos △ é o aro sombreado que mostra a Fig. 8-14, o complemento do conjunto de pontos △ é a união de dois conjuntos separados.

Conjuntos limitados e não limitados.

Diz-se que um conjunto de pontos do plano é limitado quando pode ser completamente fechado em um círculo. Quando não pode, diz-se que o conjunto não é limitado. Por ex., um triângulo é um conjunto de pontos limitado, mas o exterior de um triângulo é um conjunto de pontos não limitado. Qualquer conjunto finito de pontos é limitado. Retas semi-retas, ângulos e o plano inteiro são outros exemplos de conjuntos de pontos não limitados.

(a)



(b)

Fig. 8-15.(a) O círculo da imaginação

(b) O círculo como conjunto de pontos.

Objetos geométricos em geral.

Há uma dificuldade intuitiva no conceber objetos geométricos como conjuntos de pontos. Esta dificuldade existe porque os pontos são discretos e o espaço parece ser contínuo. Para a intuição os pontos apresentam-se como minúsculos pontos isolados, todos exatamente iguais. No entanto, a característica intuitiva que mais chama a atenção em um objeto geométrico como o círculo é que aparece na imaginação como um único todo ligado, e não, simplesmente como uma vasta reunião de minúsculos pontos. Observe as ilustrações da Fig. 8-15.

Partindo do estudo da geometria e de suas aplicações a outras partes da matemática têm sido desenvolvidos métodos de pensamento sôbre os objetos geométricos que ajudam a intuição a estabelecer uma ponte entre o discreto e o contínuo. Essas novas maneiras de pensar sôbre a geometria capacitaram os matemáticos a definir outras idéias intuitivas de modo que possam ser mais fàcilmente compreendidas. Essas novas idéias aplicam-se tanto ao espaço como ao plano. Serão descritas aqui sòmente quando aplicadas ao plano, para facilidade de ilustração e visualização. Essas novas idéias são: vizinhança de um ponto, limite de um ponto, conjuntos fechados, conjuntos abertos (convexos) e semi-planos.

Vizinhanças.

Consideremos P como qualquer ponto do plano, por ex., P da Fig. 8-16. Neste caso o conjunto interno de pontos de um círculo euclideano cujo centro é P, chama-se vizinhança de P. O limite do círculo não é parte da vizinhança. Por ex., um ponto dado, Q, tem um número infinito de vizinhanças, porque o rádio do limite do círculo da vizinhança pode ser escolhido arbitràriamante . Se Q da Fig. 8-16 é qualquer ponto do plano, distinto de P, existem vizinhanças de P quem contém Q. Existem vizinhanças de P e Q que são separadas. Observe que um ponto, digamos, P, pertence a tôdas as suas vizinhanças.

A Fig. 8-17 mostra um triângulo e três pontos P,Q e R. O ponto P é um ponto de interior do triângulo. É evidente que existem vizinhanças de P que consistem inteiramente de pontos do interior do triângulo

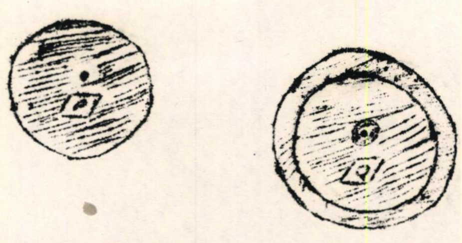


Fig. 8-16

Fig. 8-17

Assim também o ponto R, que é exterior ao triângulo, tem vizinhanças constituindo inteiramente de pontos do Exterior do triângulo.

A situação é bem diferente para o ponto Q sôbre o lado do triângulo. Qualquer vizinhança de Q contém tanto os pontos que pertencem ao triângulo como os que não pertencem. Êssse fato independe da posição de Q sôbre o limite. Assim o limite do triângulo pode ser caracterizado por uma propriedade das vizinhanças dos pontos que pertencem ao limite.

Limite de um conjunto.

Em geral, se é qualquer conjunto de pontos num plano Fig.8-18 o limite de é o conjunto de todos os pontos Q de modo que em cada vizinhança de Q, há um ponto que pertence ao complemento de

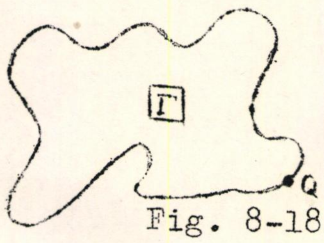


Fig. 8-18

Um conjunto pode consistir exclusivamente dos pontos limítrofes; por ex., um segmento de reta ou um triângulo euclideano é feito inteiramente de pontos limítrofes. Os pontos limítrofes de um conjunto podem, ou não, pertencer ao conjunto. Por ex. , triângulo é um conjunto que contém todos seus pontos limítrofes; o interior do triângulo não contém nenhum dos seus pontos que contém todos seus pontos limítrofes é fechado. Por ex., um segmento de reta é um conjunto fechado.

Figuras convexas.

Uma das diferenças óbvias entre o interior e o exterior de um triângulo é que um dos conjuntos é limitado e o outro, não. Mas, há ainda uma diferença mais sutil.

Na figura 8-19 (a) o triângulo é sombreado e na Fig. 8-19(b) seu exterior é sombreado. Com o fim de abreviar o exterior de será chamado ; e são conjuntos complementares sem pontos em comum.

Um exame da Fig. 8-19 (a) esclarece que se um triângulo contém ambos os extremos de um segmento de reta, êle contém todos os pontos do referido segmento. O exterior de não tem essa propriedade. A fig. 8-19 (b) mostra dois segmentos de reta, $\overline{PQ}$ e $\overline{RS}$, ambos tendo seus extremos em O conjunto contém todos os pontos de $\overline{PQ}$, mas não contém todos os pontos de $\overline{RS}$. Esta diferença entre o triângulo e seu exterior expressa-se pela afirmatição de que é um conjunto convexo, mas não é um conjunto convexo.

Falando de um modo mais geral, um conjunto de pontos, seja num plano ou espaço, é convexo quando, tôda vez que dois pontos distintos pertencem ao conjunto, o conjunto contenha todos os pontos do segmento que os une. Se, além disso, o conjunto convexo é fechado, isto é, inclui todos os pontos do limite, êle é chamado de <u>conjunto convexo</u>. Neste livro sòmente serão tratadas as figuras convexas.

Portanto, uma figura convexa sempre inclui seu limite.

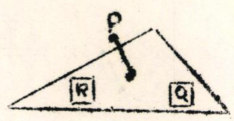
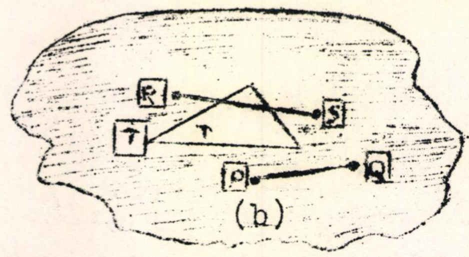


Fig. 8-19 (a)



Um conjunto convexo não necessita incluir seu limite. Por exemplo, o interior de um triângulo e a vizinhança de um ponto são conjuntos convexos, mas não são figuras convexas. Na geometria plana as figuras convexas são comuns. Por ex., tôdas as figuras geométricas da Fig. 8-13 são figuras convexas. As figuras convexas são uma familia interessante e importante de subconjuntos distintos do plano. As figuras convexas planas têm análogos no espaço. São os sólidos convexos que serão estudados mais adiante.

A reta, semi-reta e segmento de reta são figuras convexas, porque cada um dêsses objetos geométricos está de acôrdo com a definição de uma figura convexa. Por ex., a semi-reta Γ é uma figura convexa porque (1) se P e Q são qualquer dois pontos distintos de Γ, então $\Gamma \supseteq \overline{PQ}$ e Γ é convexa; (2) considerando que todos os pontos do limite de Γ pertencem a Γ, Γ é um conjunto fechado. Convém considerar um ponto único e um conjunto vazio como figuras convexas. Preenchem vagamente as condições de definição de uma figura convexa.

<u>O conjunto de interseção de duas figuras convexas qualquer também é uma figura convexa.</u>

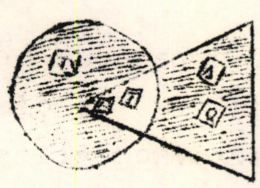


Fig. 8-20. O conjunto de interseção de figuras convexas.

O estudo anterior mostra que essa proposição é evidente se as duas figuras convexas são separadas ou se os conjuntos de pontos Γ e Δ da Fig. 8-20 são figuras convexas com, pelo menos, dois pontos distintos em comum, então $\Gamma \cap \Delta$ pode ser mostrado como sendo um conjunto convexo infinito. Segue-se a argumentação.

Suponhamos P e Q como sendo dois pontos distintos quaisquer do conjunto de pontos $\Gamma \cap \Delta$ e Γ como sendo um ponto qualquer do segmento $\overline{PQ}$. Basta mostrar que Γ pertence a $\Gamma \cap \Delta$ Considerando que $\Gamma \supseteq \Gamma \cap \Delta$, tanto P como Q pertence a Γ. Por conseguinte Γ pertence a Γ. Considerando que $\Delta \supseteq \Gamma \cap \Delta$, tanto P como Q pertencem a Δ . Por conseguinte, Γ pertence a Δ . Considerando que Γ pertence tanto a Γ como a Δ , pertence a $\Gamma \cap \Delta$. Por conseguinte $\Gamma \cap \Delta$ é um conjunto convexo por definição e contém um número infinito de pontos, porque contém o segmento de reta $\overline{PQ}$.

Além disso, também podemos mostrar através de um argumento mais envolvente de que o limite de $\Gamma \cap \Delta$ também pertence a $\Gamma \cap \Delta$. Consequentemente, $\Gamma \cap \Delta$ é uma figura convexa. Uma proposição mais geral que foi provada é a seguinte:

<u>O conjunto de interseção de um número qualquer de figuras convexas também é uma figura convexa.</u>

<u>Semi-planas.</u>

O complemento de uma reta num plano é um conjunto de união de dois conjuntos convexos separados. O objeto geométrico constituído da reta e de um dêsses conjuntos chama-se semi-plano. Depois da reta e da semi-reta, o semi-plano é a figura convexa, sem limite, mais simples. A reta **l** da fig. 8-21 é o conjunto de interseção de dois semi-planos. Assim também a reta m .

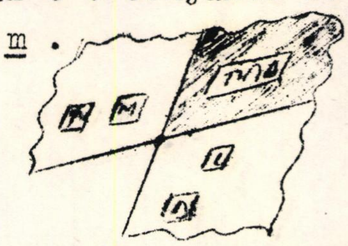


Fig. 8-21. Semi-planos e ângulos.

Os dois semí-planos e são indicados pelo sombreado da Fig. 8-21. Seu conjunto de interseção, tem como limite um ângulo euclideano com o vértice em P. Muitas outras figuras convexas importantes constituem o conjunto de interseções de semi-planos ou de semi-planos e círculos.

Fig. 8-22. Figuras convexas obtidas de semi-planos e círculos

O conjunto de interseção de dois semi-planos cujas linhas limítrofes se encontrem, em pelo menos, um ponto será chamado de ângulo se não houver perigo de confusão com o ângulo euclideano , definido anteriormente, e que é o limite da figura convexa.

8. Algumas relações geométricas importantes.

Congruência

A relação mais importante que pode haver entre objetos geométricos da geometria euclideana é a congruência. No desenvolvimento dedutivo da geometria euclideana o têrmo "congruência", não é definido. Intuitivamente dois objetos geometricos são congruentes quando têm o mesmo tamanho e forma. Neste caso, se imaginarmos que um objeto é colocado em cima de outro, êsses objetos coincidem ponto por ponto.

O símbolo usado para indicar que dois objetos geométricos e são congruentes é escrever $\cong$; ler " é congruentes com . "Os pares de retas, triângulos e círculos da fig. 8-23 são figuras euclideanas congruentes. Usando o símbolo de congruência, podemos escrever:

$$\overline{AB} \cong \overline{CD},$$
$$EEG \cong HIJ,$$
$$\text{círculo } M \cong \text{círculo } N.$$

Todos os pontos do espaço são congruentes, tôdas as retas são congruentes, tôdas as semi-retas são congruentes e todos os planos são congruentes. Pode ser usado um compasso ou divisor como instrumento para decidir experimentalmente se dois segmentos de reta são, ou não, congruentes de um divisor são separados e cobrem os extremos do primeiro segmento, e depois, ao serem transferidos para o segundo segmento, cobrem os extremos dêste segundo segmento, os dois segmentos são considerados congruentes. Pela geometria euclideana considera-se que essa comparação de segmentos sempre pode ser feita.

Uma famosa proposição de Euclides, diz que dois triângulos são congruentes quando, e sòmente quando, os pares de seus lados são congruentes. Uma proposição semelhante, no entanto, não é verdadeira para figuras euclideanas de mais de três lados.

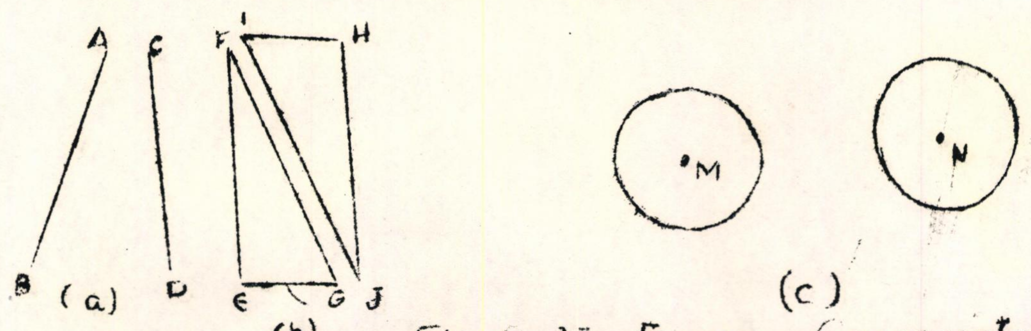


Fig. 8.23 Figuras Congruentes

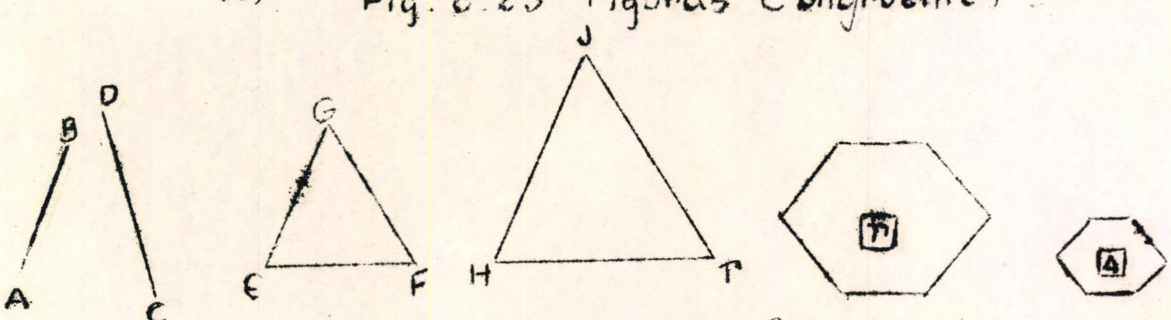


Fig. 8.24 Figuras Semelhantes

Semelhança

Outra relação importante que pode existir entre objetos geométricos é a semelhança. Dois objetos geométricos são semelhantes quando têm a mesma forma. Portanto, todos os segmentos de reta e todos os triângulos equiláteros são semelhantes. Os pares de retas, de triângulos e de exagonos da Fig. 8-24 são figuras semelhantes. Figuras semelhantes podem ter tamanhos diferentes, mas têm de ter a mesma forma. Conseqüentemente, todos os círculos e tôdas as esferas são semelhantes. A semelhança, assim como a congruência, é uma reação de equivalência do conjunto de tôdas as figuras geométricas e as figuras congruentes são necessáriamente, semelhantes. Euclides provou que dois triângulos são semelhantes quando, e sòmente quando, os pares de seus ângulos são congruentes. Uma proposição semelhante não é verdadeira para figuras euclideanas com mais de três lados.

Tamanho

Relações qualitativas de tamanho entre objetos geométricos podem ser expressas por um conjunto de conceitos. Suponhamos que Γ e Δ são dois conjuntos de pontos, fechados no espaço ou no plano. Se Δ é congruente com um subconjunto próprio de Γ, diz-se que "Γ é maior que Δ;" ou "Δ é menor que Γ." Em particular, se $\Gamma \supset \Delta$, Γ é maior que Δ. Logo, um círculo é maior que qualquer círculo contido em seu interior. Os dois casos especiais importantes quando os conjuntos são segmentos de reta e ângulo estão ilustrados na Fig. 8-25.

Tanto em (a) como em (b) da Fig. 8-25, o conjunto de pontos Δ' é um subconjunto próprio de Γ e Δ é congruente com Δ'. Observe que as comparações de tamanho descritas aqui são puramente qualitativas. As comparações quantitativas de tamanho de segmentos de reta e ângulos serão desenvolvidas mais adiante.

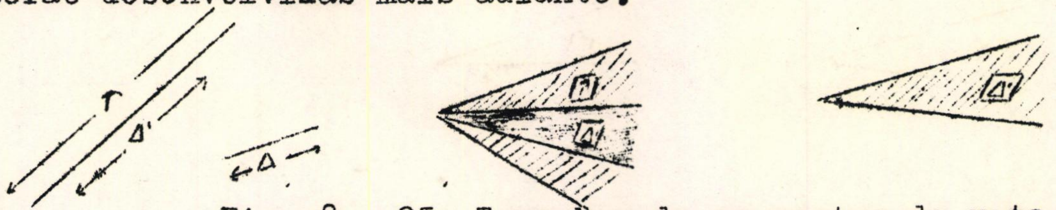
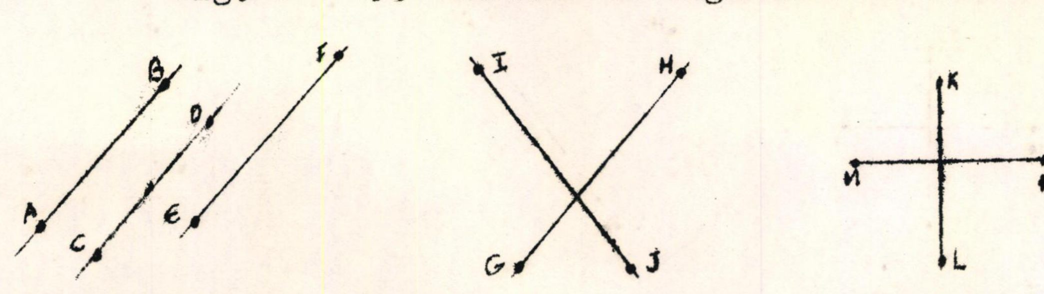


Fig. 8 - 25. Tamanhos de segmentos de reta e ângulos



Linhas Paralelas

(a)

Linhas que se interceptam

(b)

Linhas perpendenculares

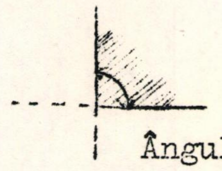
(c)

Fig. 8 - 26

Relação entre linhas.

Duas linhas num plano ou coincidem, ou não se interceptam de todo ou se interceptam em extamente um ponto, (Fig. 8 - 26). Nos primeiros dois casos, as linhas são paralelas. (Fig. 8 - 26a). Logo uma linha é sempre paralela a si mesma. Pode ser demonstrado que o paralelismo é uma relação de equivalência da família de tôdas as linhas do plano. Por conseguinte, se L, é uma linha e P é um ponto qualquer, Tem sómente uma linha através de P paralela a l.

No último caso, diz-se que as linhas se interceptam. (Fig. 8-26 b e c). Duas linhas que se interceptam formam quatro ângulos com um vértice comum. Se todos os quatro ângulo são congruentes diz-se que as duas linhas são perpendenculares entre si, e os ângulos que elas formam são chamados ângulos retos. Todos os ângulos retos são congruentes entre si. As linhas KL e MN da Fig. 8 - 26 são perpendenculares; as linhas IJ e GH não são.



Ângulo reto

Ângulo agudo

Ângulo obtuso

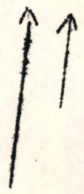
Fig. 8 - 27

Diz-se que um ângulo é agudo quando é menor que um ângulo reto e obtuso se é maior que um ângulo reto e menor que um ângulo de 180 graus. Veja a Fig. 8 - 27.

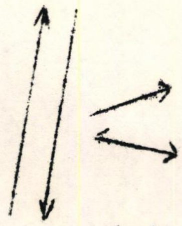
No espaço, quando duas linhas se interceptam ou são paralelas netre si, elas estão num plano. Duas linhas num espaço podem não se interceptar nem ser paralelas.

Congruência de vetores

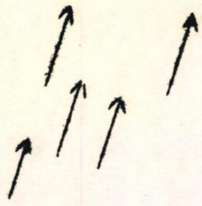
Dois vetores são congruentes quando e sòmente têm a mesma direção e os segmentos determinados por êles são congruentes. Várias possibilidades



(a)



(b)



(c)

Fig. 8 - 28 - Vetores congruentes e incongruentes.

estão ilustrados na Fig. 8-28. Congruência é uma relação de equivalência do conjunto de todos os vetores do espaço. Na maioria de suas aplicações a problemas da ciência e da engenharia, são livremente substituidos por vetores congruentes.

Exercícios da série 8 - 2

2 - Desenhe figuras que mostrem que o conjunto de interseção de duas semi - retas dadas pode ser qualquer um dos que seguem:

(a) O conjunto vazio
(b) Um ponto
(c) Um segmento de reta
(d) Uma das semi - retas dadas.

4 - Por que um ponto não tem um ponto que o segue?

6 - Lembre-se de como foi definido "triângulo" neste texto e por analogia definia os abaixos citados de tal maneira que possam ser dinstiguidas de objetos do mesmo nome da geometria euclideana.

(a) Quadrado
(b) Quadrilátero
(c) Retângulo
(d) Círculo

8 - Defina os segmentos conjuntos de um plano ilustrando cada um com uma figura:

(a) O complemento de um círculo.
(b) O complemento de um círculo euclideano.
(c) O conjunto de interseção de um círculo e um quadrado, sendo que o centro do círculo é um vértice do quadrado e o raio do círculo é menor que o lado do quadrado.
(d) O conjunto união de um triângulo e um círculo inscrito no triângulo.
(e) O conjunto união de um triângulo e um círculo circunscrito em tôrno do triângulo.

10 - Os seguintes conjuntos são fechados ?
(Contem todos seus pontos limítrofes ?)

(a) Triângulo
(b) Semi - reta
(c) Segmento de reta
(d) Círculo

(e) Exterior de um círculo

(f) Complemento de um triângulo.

12 - Mostre que a família de tôdas as figuras convexas planas é fechado no de diz respeito à operação de conjunto de interseção. Desenhe, pelo menos, cinco figuras diferentes para demonstrar isso.

14 - Usando fôlhas de papel como modelos de semi-planos, faça três ou mais modelos que se interceptam de modo a formarem as figuras abaixo. Faça desenhos para ilustrar cada uma.

(a) Semi-circulo

(b) Segmento de um círculo

(c) Setor de um círculo

16 - Trace pares congruentes de:

(a) Triângulos

(b) Retângulos

(c) Hexágonos

18 - Identifique cinco pares de figuras congruentes en sua sala de aula.

20 - Demonstre que a relação de congruência é uma relação de equivalência mostrando que é simetrica, reflexiva e transitiva.

22 - Quaisdas relações abaixo são relações de equivalência ? Justifique cada resposta.

(a) Paralelos (linhas)

(b) Perpendiculares (linhas)

(c) Interseção (linhas)

24 -Indentifique na Fig. 8 - 31:

(a) Ângulos retos

(b) Ângulos agudos

(c) Ângulos obtusos

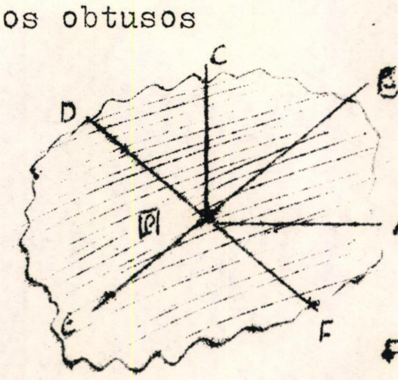


Fig. 8.31

9. Figuras geométricas e suas especializações.

Especialização

No estudo dos vários tipos de números, por ex., números inteiros, é útil examinar subconjuntos que se distingam por alguma propriedade especial, como os números pares e os números primos. O mesmo podemos fazer quando estudamos os diversos tipos de objetos geométricos, por ex., triângulos. A seleção de algum tipo especial de triângulos chama-se especialização.

A especialização é um instrumento da lógica dedutiva que nos permite chegar a uma idéia geral, ilustrando seu significado em vários casos simples. Por ex., a definição de um triângulo é obtida indutivamente através de exame de muitos triângulos. O significado da definição é, então, esclarecido através da demonstração de como se aplica a casos determinados. Quando se usa uma especialização não é necessário repetir continuamente uma propriedade geral.

Triângulos especiais

Uma vez que a diferença intuitiva mais evidente entre triângulos e seu formato, consideramos aqui aquelas especializações que simplificam a forma de um triângulo. A simplificação pode ser obtida de três maneiras, a saber:

(1) exigindo-se que dois ou mais lados sejam congruentes

(2) exigindo-se que dois ou mais ângulos sejam congruentes;

(3) impondo-se alguma outra restrição sôbre um ou mais ângulos.

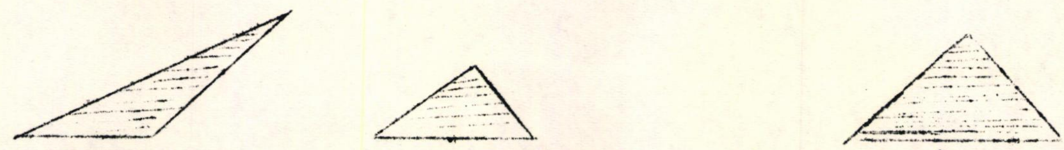
As especializações do tipo (1) levou à identificação de triângulos isósceles, isto é, triângulos com dois lados congruentes, e triângulos equiláteros, isto é, com três lados congruentes. Todos os triângulos equiláteros têm a mesma forma, mas os triângulos isósceles podem ter várias formas como mostra a Fig. 8 - 32.

Fig. 8 - 32 - Triângulos isósceles e equiláteros.

Um famoso resultado de Euclides implica em que nenhum tipo nôvo de triângulo resulta de especializações do tipo (2). Com efeito, Euclides provou as seguintes proposições:

" Um triângulo é isósceles quando, e sòmente quando dois de seus ângulos são congruentes; e um triângulo é equilátero quando, e sòmente quando todos seus três lados são congruentes."

A especialização mais interessante do tipo, (3) é a que se baseia no requisito de que um ângulo do triângulo seja um ângulo reto. Êsses triângulos chamam-se <u>triângulos de ângulos retos</u> ou <u>triângulos retos.</u>



Triângulo obtusângulo — Triângulo escaleno — Triângulo isósceles reto.

Fig. 8 - 33. Especialização de ângulos.

Se se exige que um dos ângulos do triângulo seja obtuso, o triângulo chama-se <u>triângulo obtusângulo</u>. Quando se exige que os três ângulos sejam agudos, o triângulo chama-se <u>triângulo acutângulo</u>.

Um caso especial interessante é o do triângulo isósceles reto que não é nem obtusângulo, nem acutângulo. Fig. 8 - 33.

<u>Quadriláteros e suas especializações</u>

Uma figura convexa , limitada por quatro segmentos de reta, chama-se <u>quadrilátero convexo</u>. É o conjunto de interseção de quatro semi-planos. A Fig. 8 - 34 mostra um quadrilátero euclideano com seu limite.

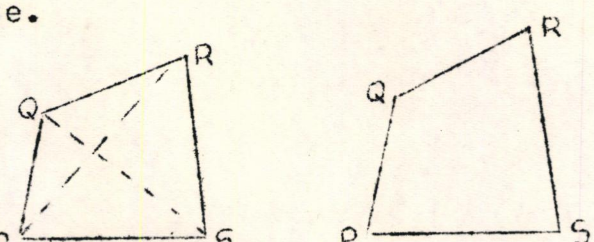
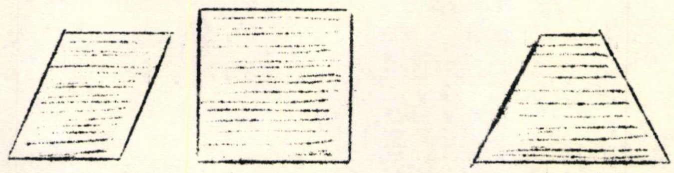


Fig. 8 - 34 . O quadrilátero.

Os pontos P.Q.R. e S são os vértices do quadrilátero e os segmentos de reta PQ, QR, RS, SP são os lados do quadrilátero. Os segmentos de reta, pontilhados, PR e QS são chamados diagonais do quadrilátero.

Os quadriláteros podem ser especializados pelas três maneiras dos triângulos e por mais uma quarta maneira, ou seja:

(4) exigindo-se que um ou mais pares de lados opostos sejam paralelos.



Rombo Quadrado Trapézio

Fig. 8 - 35. Alguns quadriláteros especiais.

Três das muitas especializações possíveis dos quadriláteros são mostrados na Fig. 8 - 35. Rombo é um quadrilátero com quatro lados congruentes. O rombo mais simples é o quadrado, cujos quatro ângulos são congruentes também. Trapézio é um quadrilátero com um par de lados opostos paralelos. Êsses lados, muitas vêzes, são chamados de bases do trapézio. Deixamos outras especializações para serem examinadas nos exercícios.

Linhas poligonais e polígonos.

Suponhamos que $K + 1$ pontos são escolhidos num plano, não necessàriamente todos distintos, mas numa ordem definida:

$P_1, P_2, P_3 \ldots, P_{k-1}, P_k, P_{k+1}$.

Depois o conjunto união de

$\overline{P_1 P_2}$, $\overline{P_2 P_3}, \ldots,$ $\overline{P_{k-1} P_k}$, $\overline{P_k P_{k+1}}$

é uma linha poligonal que une P_1 e P_{k+1}. Duas dessas linhas estão ilustradas por que na Fig. 8 - 36 (a) e (b) $K= 6$.

Os pontos $P_1, \ldots, P_{k+1}$ são chamados de vértices da linha e os segmentos de reta são chamados de lados da linha. O adjetivo "poligonal " é derivado de uma palavra grega que significa " de muitos lados". A linha pode ser complicada a não ser que a escôlha dos vértices sejam restritos.

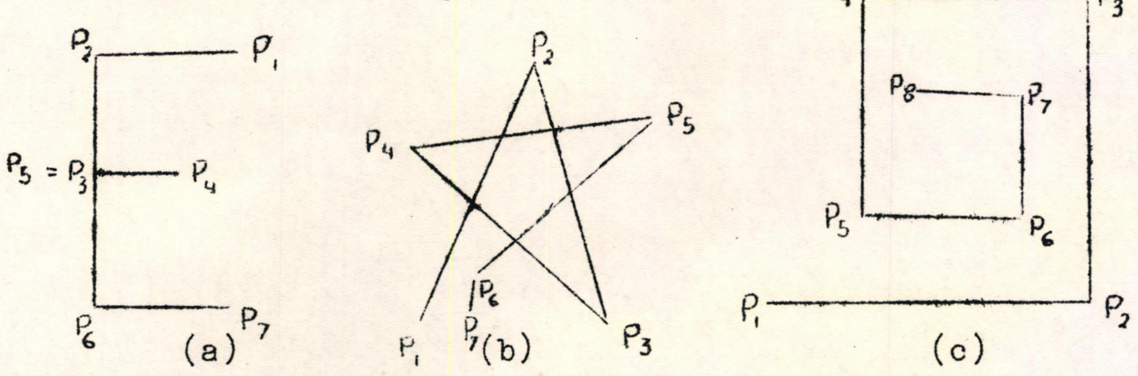


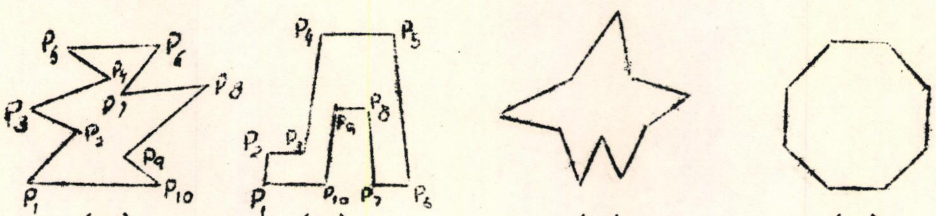
Fig. 8 - 36. Linhas poligonais.

27

Se os primeiros vértices k são distintos e quando dois lados não se encontram a não ser que sejam lados adjacentes como $\overline{P1P2}$ e $\overline{P2P3}$ com um vértice comum P2, diz-se que a linha é <u>simples.</u> Uma linha poligonal simples com oito vértices é mostrada na Fig. 8 - 36 (c). Neste capítulo só terão consideradas linhas simples.

<u>Uma linha simples P1-Pk+1</u> chama-se <u>linha fechada simples.</u> Logo, o limite de um triângulo ou de um quadrilátero é uma linha fechada simples. A figura geométrica que consiste de uma linha fechada simples e de seu interior chama-se <u>polígonos.</u> Seu Limite, muita vêzes, chama-se <u>perímetro.</u> Um polígono pode, ou não, ser uma figura convexa. Na fig. 8 - 37 mostramos quatro linhas fechadas simples que são polígonos de dez lados. As figuras (a), (b) e (c) mostram polígonos que não são convexos e (d) mostra um polígono convexo.

O Segmento de reta que une dois vértices, não adjacentes ao polígono, chama-se <u>diagonal.</u> A fig. 8 - 38 mostra dois polígonos de cinco lados, um dos quais é convexo. Suas diagonais estão indicadas por linhas pontilhadas.



(a) (b) (c) (d)

Fig. 8 - 37. Linhas fechadas simples e polígonos.

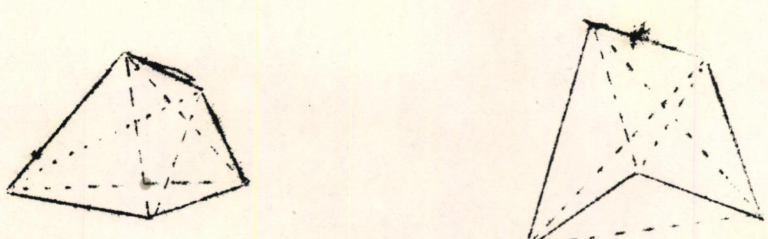


Fig. 8 - 38

A tabela 8 - 1 enumera os polígonos com oito ou menos lados e o número de diagonais de cada um.

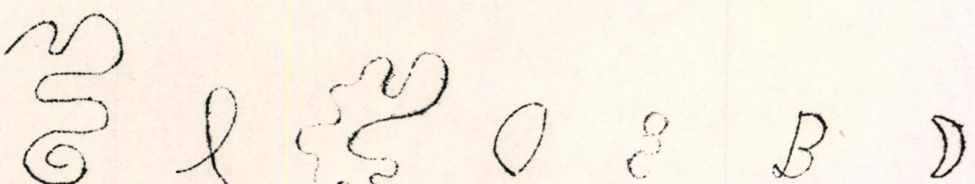
Nome Comum do Polígono	Número de Vértices	Número de Lados	Números de Diagonais
Triângulo	3	3	Nenhuma
Quadrilátero	4	4	2
Pentágono	5	5	5
Hexágono	6	6	9
Heptágono	7	7	14
Octágono	8	8	20

Quando todos os lados de um polígono são congruentes e os ângulos também o são, diz-se que o polígono é <u>regular</u>. Os polígonos regulares são sempre convexos. O triângulo equilátero e o quadrado são polígonos regulares de três ou quatro lados. Você, provàvelmente, também conhece pentágono e exágonos regulares. Todo polígono regular pode ser inscrito sum círculo. Logo, é fácil construir um exágono, traçando primeiro um círculo, localizando dois pontos, A e B, fôsse o limite de modo que sejam os extremos de um segmento de reta congruente com o raio. Localize, da mesma maneira, o ponto C, partindo do ponto B. Continue até que tenha localizado seis pontos.

<u>Curvas</u>

É impossível dar, ao mesmo tempo, uma definição elementar e lógica sôbre o que se quer dizer por uma curva, mas o significado demonstrativo é suficientemente conhecido. A fig. 8 - 39 ilustra sete curvas. As curvas (a), (c), (e) e (g) são curvas simples porque não se interceptam, mas as curvas (b), (d) e (f) não são curvas simples. As curvas (c), (e) e (g) são curvas fechadas simples.

Podemos fazer modelos de curvas colocando um pedaço de barbante ou arame sôbre uma mesa e fazendo-o girar, se o barbante não se sobrepõe a curva formada é simples e se forma um laço, resulta uma curva fechada. O significado de uma curva simples e de uma curva fechada simples é o mesmo das linhas poligonais. De fato, a linha poligonal é considerada um tipo especial de curva.



(a) (b) (c) (d) (e) (f) (g)

Fig. 8 - 39.

Em geral, qualquer curva fechada simples separa o plano em dois conjuntos separados, seu interior, que è limitado, e seu interior, que não é limitado. Mas, êste fato, que parece ser tão evidente para intuição geométrica, é difícil de ser provado. A primeira prova correta foi dada em 1905 pelo matemático americano, Osvald Veblen (1880 - 1960).

Círculos.

Círcilo é uma figura convexa, limitada, com a propriedade seguinte: existe um ponto C no interior do círculo de tal modo que todos os segmentos de reta que unem pontos do limite do círculo ao ponto C são congruentes. O ponto C chama-se centro do círculo e qualquer segmento que une um ponto do limite ao ponto C chama-se raio. Uma reta que une dois pontos do limite do círculo passando pelo centro chama-se diâmetro . O limite de um círculo chama-se circunferência . Se dois pontos forem escolhidos sôbre a circunferência, êles a separam em duas partes chamadas arcos. Êstes são análogos aos segmentos de reta.

10. Algumas construções euclideanas , úteis.

O compasso é o esquadro são usados para desenvolver quatro construções da geometria euclideana, teòricamente exatas. São apresentadas aqui por causa de sua utilidade.

Construção I. Construir um ângulo congruente a um ângulo dado.

Fig. 8-40

Para construir um ângulo congruente ao ângulo com o vértice P da Fig. 8-40, proceda da seguinte maneira:

Trace a semi-reta PR. Comqualquer raio adequado, trace um arco com o centro em P', encontrando os lados do ângulo dado em R' e S' , com o mesmo raio trace um arco com o centro em P encontrando a semi-reta em R. Chame êste arco a . Com R como centro e com o raio igual à distância de R' para S', trace um arco encontrando o arco a no pontos Trace o raio de P até S para completar a construção.

Construção II. Construir uma perpendicular a uma reta num ponto dado ou construir um ângulo reto num ponto dado sôbre uma reta.

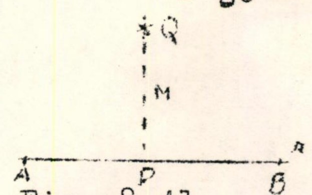


Fig. 8-41

Foram dados a reta r e o ponto P (Fig. 8-41). Trace um arco com o centro em P com qualquer raio adequado, cortando a reta r nos pontos A e B. Com A e B como centros e um raio maior que a distância de A para P, trace dois arcos que se encontram em Q. A reta pontilhada m de P a Q completa a construção. A reta m é perpendicular a r em P e os quatro ângulos formados por m e r em P são ângulos retos.

Construção III. Traçar uma reta, através de um ponto dado, paralela a uma reta dada.

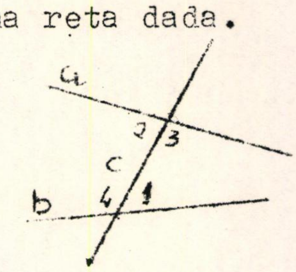


Fig. 8-42

Duas retas a e b (Fig. 8-42) são cortadas por uma terceira reta c. O par de ângulos formados por c com a e b, marcados por 1 e 2 na figura, são chamados ângulos interiores alternardos. Os ângulos 3 e 4 são também ângulos interiores alternados.

Euclides dá um critério simples para as linhas paralelas.

As linhas a e b (Fig. 8-43) são paralelas quando e sòmente quando os ângulos interiores alternados formados por qualquer transversal C são congruentes.

Usando êste critério como base para a contrução, na fig.8-44 , de uma reta partindo de um ponto dado P, paralela a uma determinada reta b, procedemos como segue.

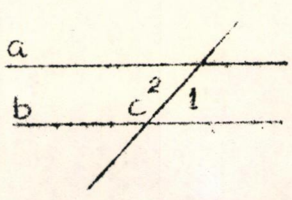


Fig.8- 43

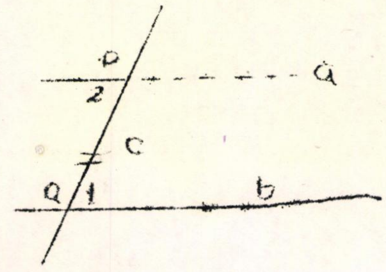


Fig. 8-44

Se P não está sôbre a reta b, trace qualquer reta c passando por P, interseptando a reta b em Q. O ângulo 1 da figura é um dos ângulos com vértice Q. Agora construa, pela Construção I, uma semi-reta em P formando o ângulo interior, alternado 2, congruente com o ângulo

1. Estendendo esta semi-reta para a direita passando po P, obtemos a paralela desejada.

Observe que se o ponto dado P estivesse sôbre a reta dada b,a construção III da Fig. 8-44 seria trivial.

Construção IV. Para dividir um segmento de reta em qualquer número de partes congruentes.

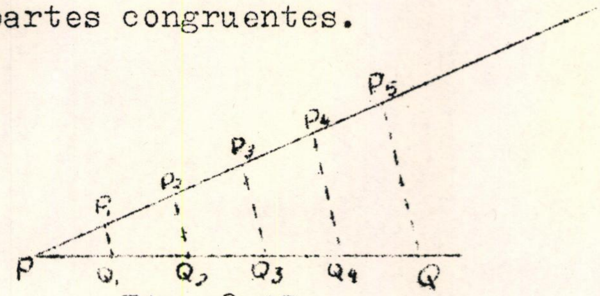


Fig. 8-45

A construção da Fig. 8-45, que divide o segmento de reta $\overline{PQ}$ em cinco partes congruentes, é feita da seguinte maneira. Seja PQ o segmento de reta dado. Trace qualquer semi-reta passando po P, e fazendo um ângulo agudo em P. Marque sôbre esta semi-reta, com um compasso, cinco segmentos congruentes, $\overline{PP1}$,$\overline{P1\,P2}$, $\overline{P2\,P3}$,$\overline{P3\,P4}$ e $\overline{P4\,P5}$. Una P5 a Q. Construa linhas paralelas ao segmento P5 Q passando por P1, P2, P3, e P4 encontrando o segmento $\overline{PQ}$ em Q1, Q2, Q3, e Q4. Êstes quatro pontos agora dividem o segmento de reta $\overline{PQ}$ em cinco partes congruentes.

Características das construções.

Nenhuma das quatro construções dadas fazem uso de medidas. Simplesmente comparam segmentos de reta com um compasso. Tôdas as quatro construções são teòricamente exatas. Se uma construção como a nº IV é necessitada para propósitos de geometria experimental, as paralelas da Fig-8-45 podem geralmente ser traçadas com exatidão suficiente alinhando-se o esquadro paralelamente ap P5Q, a ôlho.

Não existe uma construção de esquadro e compasso exata para dividir um ângulo escolhido arbitràriamente em partes congruentes K, a não ser que K seja um poder de dois . Em particular, um ângulo escolhido arbitràriamente não pode ser dividido em três partes congruentes, sòmente com esquadro e compasso. Isto não significa que um ângulo reto ou um ângulo de 180 graus não possam ser divididos em 3 partes congruentes com esquadro e compasso. Estas construções não aparecer nos exercícios.

Você deve fazer uma diferença entre consfruções exatas, como as que foram descritas aqui e as construções baseadas em medidas.Construção exata é um processo matemático e não está sujeito a êrro. Construção, baseada em medidas , é um processo físico sujeito aos erros i nerentes à mensuração (Cap. 14). De fato, qualquer ângulo pode ser dividido aproximadamente em um certo número de partes congruentes usando-se instrumentos tais como o "protector" para medir ângulos, assim como um segmento de reta pode ser dividido aproximadamente num certo número de partes congruentes usando-se a régua. Essas diferenças serão tratadas subsequentemente nos Cap. 13 e 14 quando você compreender a conexão entre número e geometria.

11. Geometria dos sólidos.

Espaço.

Se o conjunto básico de pontos qua a geometria euclideana pressupõe não está inteiramente numa reta ou num plano, a geometria chama-se geometria euclideana, e o conjunto básico chama-se espaço euclideano ou, simplesmente, espaço.
As retas, segmentos de reta, semi-retas e planos são importantes subconjuntos do espaço.

Os conceitos de conjuntos de pontos, interior, seu exterior e seu limite podem todos ser estendidos ao espaço.

A vizinhança de um ponto P no espaço é definida como conjunto de todos os pontos de uma esfera euclideana cujo centro é P.

Conjuntos fechados, conjuntos convexos e figuras convexas são definidos como no plano.

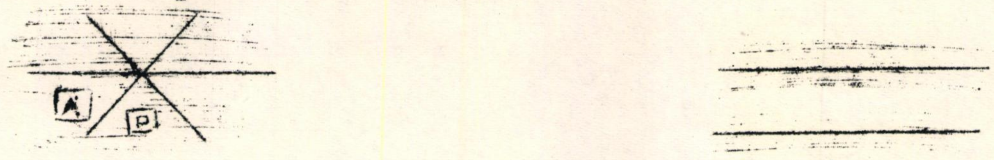
Os objetos geométricos do espaço são mais variados e complexos que os do plano. Serão tratados aqui sòmente alguns dos muitos possíveis tipos de objetos geométricos do espaço.

Planos e retas do espaço.

Assim como a reta é determinada por dois pontos qualquer distintos, o plano é determinado por três pontos quaisquer distintos. A superfície de um plano em contraste com outras superfícies, como a de uma esfera ou de um cilindro, é demonstrada pelo fato de que é a única superfície do espaço de tal modo que tôda reta que tenha dois pontos em comum com ela está inteiramente dentro da superfície. Consequentemente, duas retas que se interceptam sempre determinam um plano no qual estão as duas retas.

Por ex., você pode escolher como três pontos que determinam um plano, o ponto de interseção de duas retas e outro ponto sôbre cada reta. Também pode ser demonstrado que se l é uma reta do espaço e P um ponto fixo sôbre l, o conjunto de tôdas as retas do espaço que sejam perpendiculares à reta l em P estão no plano (Fig.8-46a)

Duas retas podem estar no mesmo plano mas não, necessàriamente, se interseptarem (Fig. 8-46b). Neste caso, são paralelas naquêle plano é, por definição, paralelas no espaço. No espaço, como no plano, a reta e´considerada paralela a si mesma.



(a) (b)

Fig. 8-46 (a)

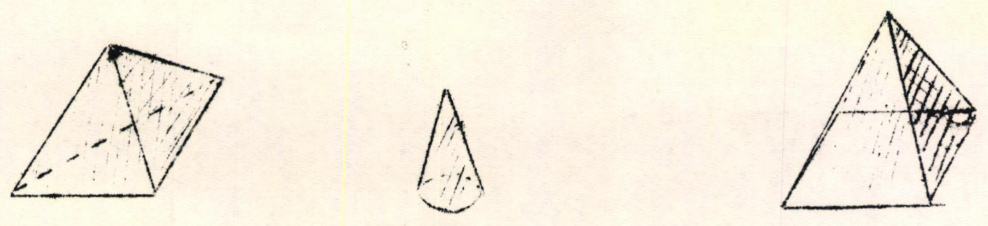
Quando as linhas não se interseptam nem são paralelas são chamadas linhas inclinadas . As linhas inclinadas nunca estão no mesmo plano. Quando não se interseptam, a linha e o plano são paralelas. Neste caso, todo o plano da linha, exceto um, corta o plano dado numa linha paralela à linha dada. O plano, que é a excessão nunca se encontra com o plano dado e diz-se ser paralela a êle.

Dois planos dados não são paralelos nem se encontram, ou então se interceptam numa linha chamada linha de interseção. Três planos em geral encontram-se num plano, e a linha de interseção de dois planos encontra o terceiro ponto num único ponto. As excessões que podem ocorrer são deixadas para você descobrir.

Sólidos convexos do espaço.

No espaço, o análogo de um quadradro é um cubo e o análogo de um círculo, é uma esfera. Êstes objetos geométricos são sólidos e cada um consiste da superfície limite e de seu interior e cada um é convexo. O análogo de um triângulo não é tão conhecido. É um sólido convexo denominado tetraedro (alguns sólidos convexos são ilustrados na fig.8-47.) O tetraedro tem quatro vértice, seis arestas e quatro faces triangulares que constituem sua superfície limite. A especialização análoga ao triângulo equilátero é um tetraedro regular com seis arestas congruentes. Cada face do tetraedro regular é um triângulo equilátero.

Muitos sólidos convexos interessantes podem ser considerados como sendo obtidos por um dos seguintes métodos.



Tetraedro Cone Pirâmide quadrada.

Fig. 8-47 - Sólidos convexos.

Primeiro método

Escôlha uma figura conversa num plano e relacione um ponto P fora do plano . Imagine que os segmentos de reta são traçados partin do de P para todos os pontos de . O corpo conexo constituido de todos os pontos sôbre tôdos êsses segmentos de reta chama-se <u>sólido cônico</u>, Todos os corpos convexos da Fig. 8 - 47 são sólidos cônicos.

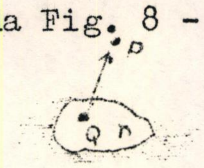
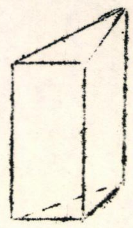
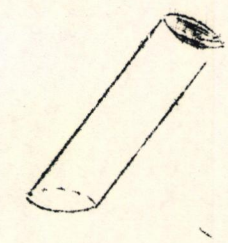


Fig. 8-48





Prisma triangular — sólido retangular — cilindro

Fig. 8-49 - Sólidos cilíndricos.

<u>Segundo método</u>

Escolha uma figura convexa em um plano e selecione (a)um pontoP no plano de (Fg, 8 - 48). Você assim determina num vetor P P que não está no plano . Depois trace partindo de cada ponto de , paralelo e congruente com o vetor PP. O corpo conexo constituído de todos os pontos sôbre todos êsses vetores chama-se <u>sólido cilíndrico</u>. Na Fig. 8 - 49 estão ilustradas três <u>sólidos cilíndricos</u>. Nos exercí - cios deixamos para você examinar outros sólidos que também podem ser obtidos por êsses métodos.

12. <u>O lugar da geometria euclideana na Matemática Moderna</u>

Na ciência e tecnologia atuais existem várias geometrias úteis, além da geometria euclideana. Essas geometrias foram desenvolvidas e estudadas por matematicos nos séculos XVIII e XIX, muitas vêzes, sem o intuito de uma aplicação imediata uma das mais importantes é a topologia, cujas idéias e métodos impregnam quase tôda matemática moderna.

O movimento crítico dos matemáticos do século XIX produziu os primeiros sistemas de postulados adequados para a geometria euclideana, Alguns textos modernos da geometria ensinada no segundo ciclo da escola secundária tão baseadas nestes novos sistemas. infelizmente,tão complicados. Segundo o ponto de vista de muitos matemáticos da atualidade, nem a geometria euclideana, como foi concebida pelos gregos, nem o estudo detalhado dos métodos de geometria usados por êles para demonstrar teoremas, são especialmente importantes como ramo da matématica pura Êsses métodos não podem ser usados com vantagem em outras partes da matemática. O importente é algo desprezado nos "Elementos" de Euclides a conexão entre geometria e número. Está conexão é desenvolvida no Cap. 13 e é a chave das aplicações da geometria euclideana na ciência e engenharia, Uma conexão semelhante com número foi descoberta para as geo metrias desenvolvidas mais recentemente. O uso de coordenadas que estabelecem a conexão entre pontos e números impregna quase tôda geometria atual. A geometria coordenada agora é introduzida no segundo ciclo da escola secundária por ser um requisito para a compreensão do cálculo e de tôda matemática superior.

Exercícios - Série 8 - 3

1. Aplique a seguinte especialização em quadriláteros e descreva o quadrilátero especial resultante,
   a) É requisito que os lados opostos sejam paralelos.
   b) É exigido que os lados opostos sejam congruentes.
   c) Exige-se que todos os lados sejam congruentes.
   d) Todos os ângulos são congruentes.
   e) Todos os lados e todos os ângulos devem ser congruentes.

3. Descreva a figura geométrica para a qual um papagaio possa ser usado como modêlo.

5. Mostre que todo quadrado é um conjunto união de quatro triângulos retos isósceles.

7. Qual é o número máximo de ângulos obtusos que um quadrilátero pode ter ? Por quê ?

9. Identifique modelos, para cada um dos que seguem, do seu meio-ambiente imediato.

   a) Paralelograma b) Retângulo
   c) Quadrado d) Trapezóide
   e) Rombo f) Quadrilátero

11. (a) Esboce dois exágonos, fazendo sòmente um dêles convexo.

13. Verifique que o número de diagonais enumerada na Tabela 8 - 1 para diferentes tipos de polígonos é correto fazendo um esbôço para cada um.

15. (a) Você pode predizer o número de diagonais de um polígono de vinte lados ?

    (b) Quantas diagonais tem um polígono de n lados ?

17. Identifique cinco exemplos de curvas fechadas simples encontradas na natureza.

19.a) Trace três segmentos de reta que não sejam congruentes. Marque-os com a, b e c.

(b) Usando sòmente o compasso e o esquadro, construa os segmentos de reta a', b', c' congruentes às linhas de (a).

21. (a) Trace uma reta e localize dois pontos fora dela.

(b) Construa uma paralela a uma reta dada através de cada um dos pontos.

(c) Qual é a relação das duas retas que você construiu ?

(d) Você acha que esta relação é sempre verdadeira para as condi - ções da construção ? se sua resposta é sim, formule a generalização apropriada.

(e) Sua experimentação prova a generalização de (d)? Explique.

(f) Se a generalização de (d) não é provada, deve ser rejeitada como idéia matemática ? Explique.

23. (a) Imagine uma construção para dividir em duas partes iguais um segmento de reta dado.

(b) Imagine uma construção para dividir em duas partes iguais um ângulo.

(c) Imagine uma construção para dividir um ângulo reto em três ângulos congruentes.

(d) Imagine uma construção para dividir um ângulo de 180 graus em três ângulos congruentes.

25. Descreva a diferença entre o interior, o exterior e o limite de um cubo no espaço por meio da idéia da vizinhança de um ponto.

27. Rosca é um sólido convexo? Explique.
(As roscas podem ter formas diferentes).

29. (a) Quais são as relações que podem existir entre uma reta e um plano no espaço?

31. Defina os seguintes sólidos convexos como conjunto de pontos.
(a) Esfera (b) Cubo (c) Tetraedro

33. Determine se existe ou não um tetraedro cada uma de cujas faces seja um triângulo isósceles. (Use modelos de papel para as superfícies.)

-|-|-|-|-|-|-|-|-|-+-|-|-|-|-|-|-|-|-|-|-|-|-|-|-|-|-|-|

COORDENAÇÃO DE EDUCAÇÃO PRIMÁRIA
CENTRO DE MATEMÁTICA

Tradução de Ingeborg Stracke
Brasília, 8 de novembro de 1.967.

IS/lsf