A GEOMETRIA PELAS TRANSFORMAÇÕES

Fonte bibliográfica: "A Geometria pelas Transformações - Vol.I- Topologia ,Geometria Projetiva e Afim -por Z.P.Dienes e E. W. Golding

Resumo elaborado pela prof. Zely Nunes

A Geometria é o estudo das propriedades do espaço. A melhor forma de explorarmos êste espaço é deslocarmo-nos nele ou observarmos o que acontece com os objetos deste espaço quando se efetua uma mudança, isto é, um tipo de transformação qualquer.

Nós nos deslocamos; mudamos a posição dos objetos no espaço; modificamos os próprios objetos, dobrando-os, esticando-os, deslocando-os no espaço. Estes são alguns exemplos de transformações

As transformações são a base do estudo da Geometria e as propriedades destas transformações constituem um ramo da Geometria, pois, cada vez mais esta é considerada como o estudo das propriedades das figuras que permanecem invariantes quando nelas se faz uma ou algumas transformações.

Os diferentes domínios da Geometria como a Topologia, a Geometria Projetiva, a Geometria Afim, a Geometria Euclidiana, estudam as propriedades das figuras que permanecem invariantes por estas transformações. O que determina o domínio de cada um dos ramos citados, é o tipo de transformação que se efetua com a figura ou objeto.

Exemplo I- TOPOLOGIA- A Topologia estuda as propriedades das figuras que permanecem invariantes por transformações bicontínuas, como os estiramentos, as torções e todas as deformações que não produzem nem dilaceramento, nem rutura da figura. São transformações mais gerais, que não conservam nem as distâncias nem os ângulos.

O que então é conservado, ou o que permanece invariante, ou que propriedades são mantidas, numa transformação topológica?

- o interior e o exterior
- pontos que eram vizinhos se conservam vizinhos.

Por exemplo, consideremos um balão de borracha oco. Façamos nele uma depressão, sem furá-lo. Pontos que eram vizinhos permanecem vizinhos, o interior e o exterior permanecem os mesmos. É impossível passarmos de dentro para fora do balão, sem atravessarmos sua superfície(película de borracha). Tal transformação (depressão) é uma transformação contínua. Há, entretanto, uma transformação inversa desta: a transformação que faz desaparecer a depressão e restitue ao balão sua forma primitiva. Nesta ~~tran~~ transformação inversa, pontos vizinhos são ainda vizinhos; conservam-se ainda o mesmo interior e o mesmo exterior. Assim, a transformação é bi-contínua.

Se fizéssemos, entretanto, um furo no balão, que aconteceria?

- Não mais se conservaria o interior. Não haveria nem interior, nem exterior. Pontos que eram vizinhos, não mais o seriam, particularmente os pontos que ficassem de um e de outro lado do furo. Por isso, "furar" não é uma transformação contínua; não é uma transformação topológica, pois não ficam invariantes as propriedades topológicas : interior, exterior, vizinhança.

Exemplo II-GEOMETRIA PROJETIVA - A Geometria Projetiva é o estudo das propriedades das figuras que permanecem invariantes por projeções, a partir de uma fonte puntiforme (projeção central) e compreende, particularmente o estudo da perspectiva. Na Geometria Projetiva estudamos uma espécie muito simples de transformação - a transformação de uma figura em sombra; a transformação projetiva.

A projeção é também uma transformação contínua.

- Quais as propriedades projetivas, ou melhor, que propriedades permanecem invariantes pela projeção?

Se tomarmos uma folha de cartolina, nela fizermos uma fenda retilínea e a iluminarmos, a projeção desta fenda será um segmento de reta. SE fizermos uma fenda (B) cortando a primeira (A), num ponto X, as projeções das fendas A e B serão segmentos de reta que se cortam em um ponto que é a sombra do ponto X. Se projetarmos uma reta L que passa por 2 pontos M e N, a sombra da reta L passará pela sombra dos pontos M e N.

<u>Retas</u> e <u>intersecções</u> são invariantes em Geometria Projetiva.

<u>Ordem</u> também é propriedades projetiva: se marcarmos sôbre uma reta 3 pontos A, B, C, nesta ordem, verificamos que a projeção do ponto B se encontra entre a projeção do ponto A e do ponto C. Assim, a ordem dos pontos A,B,C, se conserva.

<u>Convexidade</u> é uma noção projetiva. Dizemos que uma figura fechada é convexa, se todo segmento de reta que une dois pontos de sua fronteira

está inteiramente situado no interior da figura. A noção de convexidade implica, pois, na de segmento de reta e na de interior e exterior. As noções de reta e de interior e exterior são projetivas. Um ponto interior de uma figura projeta-se em um ponto interior da figura projetada (interior e exterior são propriedades invariantes em projeção). Por outro lado, a projeção de um segmento de reta que une dois pontos interiores de uma figura é um segmento de reta quese encontra no interior da figura projetada. Daí, a projeção de uma figura convexa, é convexa.

Retas, intersecções, ordem, interior, vizinhança, convexidade são propriedades projetivas.

Vejamos agora, que propriedades não são invariantes pela projeção.

Recortemos um quadrado de madeira e o apresentemos à luz. Veremos que a sombra do quadrado é uma figura de 4 lados(a menos que coloquemos o quadrado numa posição tal, que sua sombra fique reduzida a uma linha). A igualdade dos lados dependerá do modo como segurarmos o quadrado e ainda do ponto em que se encontra a fonte de luz. Sendo esta puntiforme, cujos raios divergem em todas as direções, os lados do quadrado na projeção, nem sempre serão paralelos, tornando-se mais paralelos a medida que a fonte de luz puntiforme se afasta do quadrado.

Consequentemente, a medida, o paralelismo, e os ângulos não são propriedades projetivas. Se observarmos as portas de uma casa, veremos que elas estão sempre em ângulo reto em relação ao assoalho; numa fotografia, entretanto, ~~elas~~ quase nunca aparecem retos êsses ângulos, embora sejam a projeção de um ângulo reto , na realidade.

Exemplo III- GEMETRIA AFIM- A transformação afim é um caso particular da transformação projetiva. É o estudo das propriedades invariantes, por projeções a partir do infinito (projeções paralelas). Tomando como fonte o Sol, obtemos uma idéia aproximada da projeção de uma fonte puntiforme que cada vez mais se distancia. O sol está tão longe que seus raios chegam a nós praticamente paralelos.

Em uma projeção desse tipo, retas paralelas são transformadas em ~~ret~~ retas paralelas. Outra propriedade que se mantem, em uma projeção paralela é a relação entre os comprimentos de dois segmentos situados sôbre duas retas paralelas, De fato, se a razão entre dois segmentos paralelos for dois (i.é, se um for o dobro do outro) a razão entre os comprimentos das respectivas sombras será dois.

O paralelismo e a proporcionalidade(permanência de razão) são propriedades afins.

O caso particular mais importante da Geometria Afim é o estudo das semelhanças. De fato, as noções de Geometria Projetiva e Geometria Afim estão a meio caminho entre a Topologia e a Geometria Euclidiana.

Exemplo IV- GEOMETRIA EUCLIDIANA- A Geometria Euclidiana é o estudo das propriedades das figuras que se mantém invariantes em um deslocamento no espaço, conservando as dstâncias, os ângulos, as posições relativas dos pontos linhas e superfícies das figuras.

Assim, distância e ângulos são noções ou propriedades euclidianas. Os teoremas de congruência são pefras angulares da maior parte das demonstrações clássicas de Geometria Euclidiana.

É importante entender que a Geometria Euclidiana baseia-se em axiomas que são relações entre retas paralelas e ângulos. Não há razão para se acreditar que essas relações continuem verdadeiras, quando se trata de grandes distâncias. Os gregos, com os instrumentos de que dispunham, não podiam medir senão pequenas distâncias. Por isso, para distâncias astronômicas, os teoremas Euclidianos sobre retas paralelas não são mais verdadeiros. Daí porque, certos teoremas e idéias chamadas topológicas, projetivas e afins são independentes das noções euclidianas.

É claro que quanto mais liberdade tivermos para construir figuras, menos elas serão conservadas nas transformações.

Nas transformações topológicas, em que podemos torcer, dobrar ou esticar a figura, poucas propriedades são conservadas, porque nos permitimos coisas demais, com as figuras. Nas transformações projetivas, menos coisas são permitidas, e, por isso, maior número de propriedades se mantém. P.ex; as linhas retas em transformação projetiva são conservadas; enquanto que em Topologia não o são. Dentro da Geometria Afim, em que afastamos o centro de projeção para muito longe, de modo que os raios luminosos se tornam quase paralelos. Noções de razão entre dois segmentos sôbre uma reta e de paralelismo são conservadas aí.

As noções de ângulos e distâncias são propriedades apenas da Geometria Euclidiana, em que as transformações consistem apenas em tomar uma figura e fazê-la repousar em outro lugar.

Quanto maior número de coisas nos permitimos na transformação de nossa figura, menos relações verdadeiras teremos, enquanto que, se nos permitimos poucas coisas, mais relações verdadeiras teremos.

É por isso que a Geometria Eucclidiana é a mais rica de todas as geometrias, enquanto que as relações topológicas são as mais gerais.

Tudo o que é verdadeiro em Toplogia, é verdadeiro em Geometria Projetiva e Geometria Afim e em Geometria Euclidiana. Entretanto, o que é verdaeiro em Geometria Euclidiana não é necessariamente verdadeiro nas outras geometrias. Pode sê-lo ou não.

Extraído do livro: Aritmética com os nºs em côres: Arit. Qualitativa
Mat. Cuisenaire - Nº 1 G. Gattegno

12- Tomem todos uma barrinha marrom. (Como antes, mas haverá maior número de crianças interrogadas e elas lerão um maior número de séries

13- Idem ao anterior.

14- Idem ao anterior.

15- Se eu puser uma barrinha vermelha e uma côr de laranja ponta à ponta ficará maior ou menor do que a azul? Do que a marrom? Do que a preta? Do que a laranja e a branca? ETC.

16- Se eu tomar esta barrinha, vocês podem dar-me uma que seja igual a ela? Uma menor? Uma maior? Duas ponta à ponta que lhe sejam iguais? Ou menores ? Ou maiores?

17- Se eu tomar esta barrinha e depois aquela, vocês podem encontrar outra que, com a primeira, alcance o mesmo comprimento da segunda? (A primeira deve ser maior).

Tomem outras duas e experimentem encontrar o que falta

18- Ponham duas barrinhas ponta a ponta. Agora tomem uma menor e encontrem a que falta para fazer o mesmo comprimento das outras duas. Recomecem escolhendo outras barrinhas.

19- Se agora misturarmos as 4 barrinhas assim escolhidas, quais colocaremos juntas para formar comprimentos iguais?
Misturem-nas novamente e coloquem-nas duas a duas sem as escolher. O que acontece? Troquem suas barrinhas com um vizinho que não tinha as mesmas e recomecem.

20- Agora tomemos uma barrinha de cada côr e construamos uma escada, começando pela branca.(As barrinhas, digo, barrinhas devem ser colocadas na posição vertical, começando da esquerda.)

21- Qual é a maior?
Qual é a menor?
Qual é a que vem antes da maior?
Qual é a vem depois da menor?
Subam a escada dizendo a côr das barrinhas que vocês encontram.
Desçam-na dizendo a côr das barrinhas que vocês encontram. Vocês podem refazê-lo com os olhos fechados, começando pela barrinha branca. Começando pela laranja?

22- Olhemos nossa escada. Que barrinhas precisamos acrescentar se quisermos que cada degrau chegue a mesma altura da barrinha laranja?

23- Retirem-nas agora e deixem suas escadas como antes.
Quem pode dizer que barrinhas precisamos acrescentar a azul para que ela tenha a altura da côr de laranja? A amarela? A Verde-claro?

24- Tomem uma outra barrinha laranja e coloquem contra ela uma preta. [illegible] barrinha é preciso pôr com a preta para fazer o mesmo comprimento da côr de laranja? Qual é preciso pôr com a verde escuro? Com a amarela? Etc.

25 - Coloquemos ponta a ponta uma barrinha preta e uma verde-claro. Qual a barrinha que tem o mesmo comprimento delas? Qual tem o mesmo comprimento da carmim e a verde-escuro, etc?

26 - Façam o mesmo com a vermelha e a preta; com a branca e a marrom; com a verde-claro e a verde escuro; com a amarela e a carmin.

27 - Coloque a marrom e a amarela ponta a ponta e encontrem outras barrinhas que dêem, ponta a ponta o mesmo comprimento.

28 - Tomem uma barrinha e depois outra menor. Coloquem-na embaixo da maior. Encontrem a barrinha que deve ser posta com a menor para formar o comprimento da maior:

1º - Servindo-se das barrinhas;

2º - Olhando apenas e mostrando a barrinha que falta;

3º - Escutando apenas e dizendo o que falta;

29 - Tomem duas barrinhas e as ponham ponta à ponta e encontrem todos os pares de barrinhas possíveis que dêem, ponta a ponta, o mesmo comprimento. Agora coloquem mais de duas barrinhas ponta a ponta e façam comprimento iguais com outras.

30 - Refaçam o exercício nº 28 com barrinhas da mesma côr. Depois, partindo de 2 barrinhas ponta a ponta.

31 - Experimentem formar o comprimento de qualquer barrinha usando apenas as vermelhas.
Pode-se fazer isto sempre? E com que barrinhas? (verde-claro, maravilha, amarela) pode-se fazê-lo sempre?

32 - Quais são as barrinhas que podem ser cobertas ùnicamente com o auxílio das carmins? ùnicamente com as vermelhas? Com o auxílio das verde-claro? Com o auxílio das amarelas?

33 - Qual é a barrinha que falta para completar o comprimento quando vocês não conseguem cobrir as barrinhas só com as vermelhas? Quando vocês não conseguem com as verde claro?

34 - Façam em primeiro lugar um trem de barrinhas vermelhas ponta a ponta, em linha reta. Tomem, na seqüência da escala, barrinhas da mesma côr e coloquem-nas sôbre o trem, numa extremidade, antes apenas as verde-claro e depois (a partir da parte inferior) apenas carmim, depois só amarelas, etc. Quais são as barrinhas que terminam bem na extremidade de uma das barrinhas vermelhas do trem? Quais as que não coincidem?

35 - Façam um trem de barrinhas verde claro e, como antes, coloquem alternadamente, sôbre o trem, a partir de uma extremidade, barrinhas

da mesma côr. Quais são as que terminam bem na extremidade do trem? Quais são as que não coincidem?

36 - Façam o mesmo com as barrinhas carmins e depois, com barrinhas amarelas.

37 - Façam trens formados de barrinhas da mesma côr: um vermelho, um verde claro e um carmim. Coloquem um contra o outro, fazendo coincidir uma de suas extremidades. Vocês podem dar-lhes o mesmo comprimento se elas forem vermelho e carmim? Se forem vermelho, verde-claro e carmim?

38 - Façam 2 trens, usando só barrinhas verde-escuro para um e só pretas para outro. Elas podem ter o mesmo comprimento?

39 - Façam um trem marrom e um côr de laranja. Êles têm o mesmo comprimento?

40 - Tomem qualquer barrinha e outra da mesma côr. Elas têm o mesmo comprimento? Coloquem uma sôbre a outra e empurrem levemente uma delas para a direita, de modo que uma parte de cada uma fique descoberta. O que se observa em seu comprimento? Empurrem-na mais um pouco para a direita, agora encontrem as barrinhas que preencherão os espaços vazios nas extremidades. O que vocês notam quando começam com as barrinhas vermelhas? Com as verde-claro? Com as pretas?

41 - Pode-se fazer o mesmo empurrando a barrinha para esquerda? Experimentem. Agora, empurrem a que estava imóvel e preencham os espaços vazios nas extremidades.

42 - Façam um trem com duas barrinhas quaisquer. Depois, encontrem duas outras que, ponta a ponta dêem o mesmo comprimento. Empurrem um dos trens para a direita ou a esquerda, enquanto o outro fica imóvel. O que vêem vocês? Empurrem-no um pouco mais longe, olhando sempre a outra imóvel. Encontrem as barrinhas que vão preencher os espaços.

43 - Façam o mesmo de trens com 3 barras pretas, ponta a ponta.

44 - Façam o mesmo com trens de mais de 3 barras.

45 - Nossa barrinha marrom agora é um trem. Coloquemos a seu lado um outro trem feito de uma barrinha vermelha e de duas verde-claro. Êsses dois trens são do mesmo comprimento? Ponham a vermelha entre as duas verde-claro. Retirem a vermelha e empurrem uma das verdes contra a ponta da outra. Que barrinha é preciso pôr para que êsse trem seja tão comprido como o marrom?

46 - A barrinha laranja é um trem e vocês farão um outro com a amarela. Ela é do mesmo comprimento que o trem laranja? Se vocês retirarem a barrinha verde-claro e se vocês empurrarem para a direita ou para a

esquerda uma das barrinhas que ficam na ponta da outra, qual barrinha será necessária para que êsse trem seja do comprimento, digo, seja do mesmo comprimento que a laranja?

47 - Façam o seguinte: a) Tomem 1 barrinha azul, depois duas brancas que vocês colocarão sob a azul; cada uma numa extremidade. Que barrinha é necessária para preencher o intervalo? Qual é necessária, se vocês puserem barrinhas vermelhas em lugar das brancas? Se puserem verde-claro? Se puserem carmim?

b) Tomem uma barrinha azul; coloquem em seguida quaisquer barrinhas, que juntas sejam menores que a azul. Qual a barrinha é necessária para preencher o intervalo? Quando vocês tiverem colocado uma branca e uma vermelha? Uma branca e uma preta? etc.

48 - Façam o mesmo com uma barrinha preta, com uma marrom, com uma côr de laranja.

49 - Podem vocês dizer, sem o fazer, quais são as barrinhas que faltam para preencher o intervalo dentro dos quadros das barrinhas seguintes?

a - uma barrinha verde-escuro com duas barrinhas brancas postas em baixo, cada uma numa extremidade?

b - uma barrinha preta com uma vermelha e uma verde claro em baixo, cada uma numa extremidade? Com duas vermelhas? Com duas verde claro?

1 - Quando as barrinhas estão diante de vocês;

2 - Quando vocês apenas ouvem o nome das barrinhas.

50 - Tomem uma das três barrinhas maiores. Escutando o nome das barrinhas e usando apenas os olhos, encontrem a barrinha que preencherá o intervalo se pusermos uma vermelha em cada extremidade. Se pusermos uma branca numa extremidade e uma vermelha na outra. Uma branca numa extremidade e uma amarela na outra, etc.

Extraído do Livro
Aritmética com os números em côres
Aritmética Qualitativa
Material de Cuisenaire - Nº 1 C. Gattegno.
Curso de Matemática - 2ª etapa.

/Ins.-