

Caleb Gattegno

Livro 5

Primeira parte

Tradução: Yolanda Leal Lemos

Estudo das frações

1. Que representa a barra branca comparada à barra vermelha? E a vermelha à carmin? E a verde clara à verde escura? E a carmin à marrom? E a amarela à alaranjada?

Nós obtemos portanto entôda a parte a mesma resposta pois medimos sempre a barra pequena pela grande. Será o mesmo se nós medirmos a grande pela pequena.

Se formamos um comprimento (colocando barras ponta com ponta) depois uma outra contendo duas vêzes a primeira ponta à ponta, podemos considerar de duas maneiras o par formado dêsses dois comprimentos. Medindo com a pequena podemos dizer que a grande é o seu dôbro; medindo com a grande, podemos dizer que a outra é a sua metade.

Vamos adotar um modo de escrever muito simples, utilizando os parênteses nos quais poremos, separados por um ponto e vírgula, os dois números ou letras que representam o par considerado. (c; C) e o par de dois comprimentos e escreveremos sempre o comprimento que serve de medida em segundo lugar. Assim (2; 4) e (4; 2) são dois pares formados da barra vermelha e da carmin; no primeiro, é a carmin que mede a vermelha: $(2; 4) = \frac{1}{2}$; no segundo é a vermelha que mede a carmin: $(4; 2) = \frac{2}{1}$.

Podemos pois escrever agora as frações, seja sob a forma de pares ordenados postos entre parênteses, seja sob forma de dois números separados por uma barra.

Escreve sob forma de pares ordenados:

$\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{2}, \frac{1}{7}, \frac{3}{8}, \frac{5}{17}, \frac{12}{77}, \frac{21}{75}, \frac{27}{8}, \frac{14}{15}, \frac{99}{19}$.

$93/12, 41/57, 62/63.$

Escreve sob a forma de frações os pares ordenados seguintes:

$(1;2), (2;1), (3;7), (8;3), (7;12), (8;27), (27;5), (14;5), (62;67).$

2. Escreve sob a forma de frações e sob a forma de pares ordenados, os pares dados no princípio do nº 1.

Faz a barra branca e a verde clara e forma os pares que elas podem dar. E também as frações. Podes encontrar outros pares que dêem as mesmas frações?

Faz o mesmo com a branca e a carmin; com a branca e a amarela.

Dá as frações dos pares que formaste.

Quando os pares ordenados dão a mesma fração, dizemos que são equivalentes.

Assim $(1;2), (2;4), (3;6), (5;10)$ são todos iguais a $1/2$.

Escreveremos de duas maneiras ou $1/2 = 2/4 = 3/6 = 4/8 = 5/10 = \dots$ ou $(1;2) = (2;4) = (3;6) = (4;8) = (5;10) = \dots$

Podes escrever os primeiros termos da família de pares equivalentes a:

$1/3 = 1/4 = 1/5 = 2/3 = 3/4 = 2/7 =$

Utiliza tuas barras sempre que não souberes e para verificar as respostas.

3. Se te dermos um par ordenado, podes encontrar um par equivalente que seja de números menores? Ensaia com os pares seguintes:

$(5;10) \quad (6;18) \quad (15;25)$

Podemos, também formar dois comprimentos e procurarmos, se existe uma barra que contenha um número exato de vezes êsses dois comprimentos, observando bem o número de vezes.

Assim com $(14;21)$ os dois comprimentos podem ser formados com o auxílio da barra negra que entra duas vezes na primeira e três vezes na segunda. Logo: $(14;21) = (2 \times 7; 3 \times 7) = (2;3)$. Por êsse

método obtemos logo o par que tem o número menor ou, como diremos de agora em diante, os têrmos menores.

Esse par é o primeiro da família. Nós o chamamos, às vezes, o par irredutível, porque não podemos tornar seus têrmos menores. Começando com (28;42) e procedendo da mesma maneira, veremos que se podem utilizar as barras verselhas, porque os dois têrmos são pares, ou as barras negras; assim temos:

$$(28;42) = (14 \times 2; 21 \times 2) = (14;21) = (2 \times 7; 3 \times 7) = (2;3)$$

$$(28;42) = (4 \times 7; 6 \times 7) = (4;6) = (2;3)$$

$$(28;42) = (2 \times 14; 3 \times 14) = (2;3)$$

Escrevendo tudo isto sob forma de frações, temos:

$$\frac{28}{42} = \frac{14 \times 2}{21 \times 2} = \frac{14}{21} = \frac{2 \times 7}{3 \times 7} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{28}{42} = \frac{4 \times 7}{6 \times 7} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{28}{42} = \frac{2 \times 14}{3 \times 14} = \frac{2}{3}$$

No nº 2, nós formamos as famílias de frações ou de pares de números ordenados equivalentes, começando pelas irredutíveis. Aqui, nós começaremos com não importa qual fração e encontraremos a que família ela pertence, procurando a que fração irredutível ela é equivalente.

Encontra a família a qual pertence cada uma das frações seguintes:

$(35;70)$

$(81;27)$

$(18;54)$

$(25;125)$

$(72;12)$

$(91;169)$

4. Cada vez que uma fração nos é dada, sabemos como obter outras que lhe são equivalentes. Podes explicar como fazes?

Se escrevermos (a;b) para um par ordenado qualquer, com o qual o comprimento a é medido pelo comprimento b, podes dizer se os pares seguintes são equivalentes ou não?

$(a;2 \times b)$

$(5 \times a;b)$

$(\bullet \times a;7 \times b)$

$(3 \times a;3 \times b)$

$(5 \times a;5 \times b)$

$(7 \times a;7 \times b)$

$(a/b ; b/2)$

$(a/3 ; b/3)$

$(a/7 ; b/7)$

$(a/3 ; b/5)$

$(a/5 ; b/7)$

$(a/9 ; b/11)$

5. Escreve quais quer frações equivalentes às seguintes:

$(A;B)$

$(B;A)$

$(A;C)$

$(Z;P)$

6. Quando nos dão uma fração onde os termos são números, em vez de letras, elas têm um fim para a série das frações equivalentes?

Ex.: $2/3 =$

$7/5 =$

Ao contrário, se não precisamos quais são os comprimentos e se escrevemos em vez de $2/3$ e $7/5$, a/b e c/d ?

$a/b =$

$c/d =$

Tudo isso que te pedimos, é para notares o que fizeste em cada um dos casos precedentes e de o refazeres no caso onde ^{os} números não são dados.

7. Se $(a;b)$ é uma fração, $(b;a)$ é uma outra fração, chamada sua recíproca.

Encontra as recíprocas das frações seguintes:

$(7;3)$

$(2;5)$

$(11;13)$

$(41;93)$

$(11;97)$

$(51;15)$

Qual é a recíproca da recíproca de uma fração?

Se começamos com os pares seguintes:

$(1;2)$

$(1;3)$

$(1;4)$

$(1;5)$

$(1;6)$

suas recíprocas são:

Mas até agora, quando a barra branca estava contida um certo número de vezes num comprimento formado por outras barras, nós dávamos a isso um nome. 13 era a medida da barra laranja e da verde clara ponta a ponta, servindo-nos da barra branca como medida. 13 é pois equivalente àquilo que nós escrevemos agora $(13;1)$ ou $13/1$. Conseqüentemente, os números inteiros são pares ordenados onde o segundo termo

é 1 (um) e não se escreve. Quando reencontramos, por exemplo, o par (5;1) nós o escreveremos $5/1$ ou 5 como julgarmos mais útil.

Escreve quais são as formas possíveis que podem tomar:

- | | |
|---------|--------|
| (12;1) | $9/1$ |
| $7/1$ | (17;1) |
| 72 | $15/1$ |
| $121/1$ | 83 |
| (57;1) | (73;1) |

Podes encontrar as respostas para:

$$9/1 + (13;1) + 8 =$$

$$(17;1) - (12;1) + 6/1 =$$

$$(11;1) + (17;1) + 3/1 - 6/1 - 4 =$$

$$7 + (21;1) - 1/3 \times (15;1) =$$

8. A recíproca de 13 escrevemos $1/13$ se utilizamos a notação com a barra.

Com essa notação, podemos escrever a recíproca da recíproca $\frac{1}{\frac{1}{13}}$ e sabemos que ela é igual a 13.

Escreve a recíproca da recíproca da recíproca de 13 utilizando a mesma notação, e encontra seu valor. Faze o mesmo com 12, 121, / 372.

Se continuarmos a tomar as recíprocas, não é necessário mais do que ajuntar novas barras e novos 1 (uns).

Podes ler:

$$\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{9}}}}$$

$$\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{21}}}}}$$

Começa de baixo.

Encontra o valor destas frações.

Se começamos com $2/3$ sua recíproca é:

Podemos também escrever, empregando a notação $\frac{1}{\frac{2}{3}}$

A recíproca de $\frac{1}{\frac{2}{3}}$ é $\frac{1}{\frac{2}{3}}$ e assim por diante.

Qual é a quarta recíproca de $5/7$?

Qual é a sétima recíproca de $3/4$?

Viste como podemos saber se um só esforço o valor dum número qualquer de recíprocas de uma fração?

9. Se escrevemos $12 + 13$ sabemos que a resposta é 25.

Se escrevemos $(12;1) + (13;1)$ qual é a resposta?

Podemos adicionar dois pares ordenados de números, quando o segundo termo destes pares é igual a 1.

Mas os comprimentos 12, 13 e 25 podem ser medidos com não importa qual outra barra que nós escolhemos. Substituímos então simplesmente esses números por pares ordenados, conservando a relação da adição. Se, por exemplo, medimos com ajuda da barra amarela, temos então $(12;5) + (13;5) = (12 + 13;5)$; o sinal + do lado esquerdo significa somente que juntamos o primeiro número e que deixamos o segundo intacto, pois que ele representa a barra que serve de medida.

Quando adicionamos frações que têm a mesma unidade de medida, basta juntar as quantidades medidas e escrever a resposta indicando que a unidade foi conservada idêntica.

$$(7;2) + (5;2) = (12;2) \text{ porque } 7 + 5 = 12$$

$$(15;3) + (17;3) = (32;3) \text{ porque } 15 + 17 = 32$$

Se utilizamos a barra, a notação vem a ser:

$$\frac{7}{2} + \frac{5}{2} = \frac{7+5}{2} = \frac{12}{2}$$

$$\frac{15}{3} + \frac{17}{3} = \frac{15+17}{3} = \frac{32}{3}$$

Encontra o valor das adições seguintes, operando como acima:

$$(2;13) + (4;13) + (9;13) =$$

$$4/9 + 3/9 + 1/9 =$$

$$1/6 + 2/6 + 3/6 + 4/6 + 5/6 =$$

$$2/7 + 11/7 =$$

$$(8;15) + 9/15 + (7;15) =$$

$$(7;22) + (12;22) + (24;22) + (36;22) =$$

10. Vemos que $6=10 - 4$ pode também ser escrito $(6;1) = (10;1) - (4;1)$. Podemos subtrair os pares, quando o segundo termo é o mesmo em cada um dos dois, ainda que ele seja diferente de 1?

Mediremos a barra verde escura, a laranja e a carmin pela

barra verde clara. Temos sempre $6 = 10 - 4$, o que, desta vez, escreveremos:

$$(6;3) = (10;3) - (4;3)$$

Assim, quando vamos subtrair dois pares tendo o mesmo segundo termo, basta subtrairmos um do outro os dois primeiros termos e escrever a resposta sob a forma de um par em que a unidade de medida seja a mesma.

$$(15;7) - (9;7) = (6;7) \text{ porque } 15 - 9 = 6$$

$$(21;11) - (13;11) = (8;11) \text{ porque } 21 - 13 = 8$$

Isso que notamos assim, utilizamos a barra:

$$\frac{15}{7} - \frac{9}{7} = \frac{15 - 9}{7} = \frac{6}{7}$$

$$\frac{21}{11} - \frac{13}{11} = \frac{21 - 13}{11} = \frac{8}{11}$$

Encontra o valor das subtrações seguintes:

$$(7;13) - (2;13) =$$

$$(11;23) - (6;23) =$$

$$(31;9) - (7;9) =$$

$$\frac{7}{15} - \frac{4}{15} =$$

$$(8;19) - \frac{7}{19} =$$

$$\frac{11}{12} - (\frac{5}{12}) =$$

11. Combinamos agora as duas idéias de adição de frações e de frações equivalentes.

Se temos $(7;18) + (6;18)$ sabemos que é igual a $(7 + 6;18)$.

Mas, $(6;18) = (1;3)$.

Se pois, nos dão $(7;18) + (1;3)$, devemos pensar em todas as frações equivalentes a $(1;3)$ e escolher aquela cujo segundo termo é igual a 18.

Procederemos como se segue:

$$(7;18) + (1;3) = (7;18) + (6;18)$$

Se desejamos, podemos escrever toda a seqüência das frações equivalentes a $(1;3)$ que são necessárias para chegar a um segundo termo igual a 18:

$$(1;3) = (2;6) = (3;9) = (4;12) = (5;15) = (6;18)$$

Mas podemos ganhar tempo, pois que se sabe que $3 \times 6 = 18$ e que $(1 \times 6; 3 \times 6) = (1;3)$

Se nos dão $(7;25) + (3;5)$, poderemos proceder assim:

$(7;25) + (3;5) = (7;25) + (3 \times 5; 5 \times 5) = (7;25) + (15;25) = (22;25)$
porque vemos incontinentemente que 5×5 nos dá o segundo termo da primeira fração.

O mesmo se nos dão $(3;7) + (5;21)$, é preciso substituir $(3;7)$ por sua equivalente $(9;21)$ e ajuntar 9 e 5. A resposta é $(14;21)$ ou $(2;3)$.

Encontra a resposta para:

$(7;12) + (5;36) =$	$(15;64) + (11;8) =$
$(1;14) + (3;28) =$	$(1;15) + (2;5) =$
$(3;16) + (5;8) =$	$(7;45) + (13;15) =$
$2/21 + 9/42 =$	$(7;32) + 1/16 =$

12. Para substituímos, podemos proceder da mesma maneira.

Encontra a resposta:

$(7;12) - (5;36) =$	$14/55 - 1/11 =$
$(5;8) - (3;16) =$	$9/10 - 17/100 =$

13. Podemos naturalmente adicionar mais de duas frações, dentro da medida em que é possível encontrar as frações equivalentes das frações dadas e que têm uma unidade de medida igual.

$$(2;7) + (3;14) + (9;28) =$$

$$= (2 \times 4; 7 \times 4) + (3 \times 2; 14 \times 2) + (9;28) =$$

$$= (8 + 6 + 9;28) = (23;28)$$

Podemos mesmo reunir adições e subtrações e operar da mesma maneira.

$$(2;7) - (3;14) + (9;28) =$$

$$= (8;28) - (6;28) + (9;28) =$$

$$= (8 - 6 + 9;28) = (11;28)$$

Encontra a resposta para:

$1/9 + 5/18 + 7/36 =$	$(1;15) + 7/30 - 1/5 =$
$2/3 + 5/6 + 7/12 =$	$(3;5) - 2/10 + 7/20 =$

14. A que chegamos se, das duas barras que medem, não há mais // que uma que é múltiplo de outra como anteriormente.

Seja por exemplo $(5;7)$ e $(7;9)$ para adicionar. Entre as frações equivalentes à $(5;7)$ temos:

$$5/7 = 10/14 = 15/21 = 20/28 = 25/35 = 30/42 = 35/49 = 40/56 = 45/63 = 50/70 = \dots \text{ e entre aquelas que são equivalente a } (7;9)$$

temos:

$$7/9 = 14/18 = 21/27 = 28/36 = 35/45 = 42/54 = 49/63 = 56/72 = 63/81 = \dots$$

Nelas há duas:

$$45/63 \text{ e } 49/63$$

que apresentam a mesma unidade de medida, seja aqui 63.

Podemos portanto adicioná-las e obter:

$$(5;7) + (7;9) = (45;63) + (49;63) = (45 + 49;63) = (94;63).$$

É necessário escrever todas as frações equivalentes?

$$(5;7) + (7;9) = (5 \times 9; 7 \times 9) + (7 \times 7; 9 \times 7) = (45;63) + (49;63)$$

seria suficiente.

Esse processo é mais curto. Podes dizer porque é correto e como fizeste para encontrá-lo?

Resolve as adições seguintes procedendo da mesma maneira:

$$(2;3) + (4;5) = \qquad (1;11) + (3;7) =$$

$$(5;6) + (4;7) = \qquad (2;9) + (1;13) =$$

$$(7;8) + (5;9) = \qquad (4;7) + (3;10) =$$

$$1/3 + 2/5 = \qquad 2/13 + 1/6 =$$

$$3/7 + 2/11 = \qquad 5/12 + 7/6 =$$

$$4/9 + 3/10 =$$

Para as subtrações operamos da mesma maneira.

Encontra as respostas para:

$$2/9 - 1/13 = \qquad (4;5) - (2;3) =$$

$$7/8 - 5/9 = \qquad (5;6) - (4;7) =$$

$$3/7 - 1/11 = \qquad (4;7) - (3;10) =$$

15. Se escrevemos duas frações ao acaso seu segundo termo pode ter um fator comum. Isso torna sua adição ou sua subtração mais difícil?

Tomemos um exemplo: $(7; 8) + (5; 27)$.

Podemos escrever:

$$\begin{aligned}(7; 18) + (5; 27) &= (7; 2 \times 9) + (5; 3 \times 9) = \\ &= (7 \times 3; 2 \times 9 \times 3) + (5 \times 2; 3 \times 9 \times 2) = \\ &= (21; 54) + (10; 54) = \\ &= (31; 54)\end{aligned}$$

Aqui, levamos em consideração o fato de que 9 é um fator comum de 18 e de 27, o que permite abreviar para encontrar as frações equivalentes.

18 = 2 x 9 e 27 = 3 x 9, assim para obtermos uma unidade de medida que contenha por sua vez 18 e 27, é suficiente escolher 54 ou 3 x 2 x 9 ou 2 x 9 x 3 ou 6 x 9. Ora, 6 contém o outro fator de 18 que é 2 e o outro fator de 27 que é 3.

É sempre verdadeiro quando nós nos encontramos em face de frações desta espécie?