A ESCOLA OPERANTE

PSICOPEDAGOGIA DA ELABORAÇÃO MATEMÁTICA

Michel Margot

Algumas aplicações

Cap. IV - Págs. 125 - 152

1. Convenções e ortografia matemática

Para se ter direito de exigir dos alunos notações e expressões técnicas corretas e precisas em todos os seus trabalhos, // precisa primeiro assegurar-lhes os conhecimentos indispensáveis. Pode haver professôres que pensem que uma longa freqüência de // testos bastou a um aluno para que êle se ponha expontâneamente a escrever, segundo as convensões em uso. É um êrro da mesma ordem aquêle que consiste em crer que é suficiente ler literatura para aprender a ortografia. Os meios de expressão devem ser estudados por êles mesmos, em matemática como em linguagem onde o ditado / semanal não se confunde com os ensaios de composição e de redação. Logo, resolver um problema, inventar uma solução, é mais // próximo de uma composição que de um ditado, e não pode bastar à aquisição das convenções da escrita.

Há verdades mais simples a dizer aos alunos: uma definição (ex.: chama-se vértice ao ponto comum de dois lados retilínios consecutivos de uma figura) ou uma convenção (ex.: a barra de // fração pode substituir o sinal de divisão partitiva) deve ser // aceita e não discutida ou compreendida. Muitas crianças procuram compreender o porquê de uma convenção. Não chegam a compreender o que não pode existir, êles têm um sentimento de inquietação, / que é por vêzes a origem das dificuldades manifestadas em conseqüência. Porque uma couve se chama couve? Nenhuma explicação nos é dada. A etimologia do nome dá a história dêste, mas não mostra porque o objeto leva tal nome.

Estas coisas simples, tão simples que temos qualquer hesitação a introduzí-las neste estudo são de uma importância insuspeita.

Os sistemas de notação, pensados e construidos pelos professôres, devem ser aprendidos pelos alunos, primeiro como tendo um fim em si próprios; mais tarde, serão empregados para exprimir as descobertas feitas. Pois o aluno não deve inventar notações que lhe seriam pessoais; isto não é da sua idade, êle não tem uma bagagem de conhecimentos autorizando uma tal liberdade, que, de resto, lhe é interditado em ortografia. Um filósofo, um homem de letras ou de ciências podem crear um neologismo, se fôr preciso, mas a criança deve primeiro adquirir o vocabulário corrente dos adultos; é da própria matemática onde a tradição assegura a compreensão entre iniciados.

Quando um sistema de notações é perfeitamente construido, êle goza das quatro propriedades seguintes:

1) é completo, pois suficientemente rico para permitir expressar todo o possível;

2) é homogêneo: todos os sinais ou símbolos são da mesma natureza; por exemplo são tôdas as letras, ou tôdas as combinações de letras ou de algarismos, obtidas segundo a mesma lei de formação;

3) não é ambíguo: cada sinal só pode ser compreendido de um só modo, o que não é o caso, por exemplo, no sistema usual de notação algébrica;

4) é lógico: a lei de formação do sistema é conhecida e permite escrever os sinais que o formam sem êrro possível.

Quando um sinal tem duas significações possíveis, a criança corre grandes perigos, tão grandes que muitas vêzes, ela não é consciente desta ambigüidade. Por exemplo, é lastimável de ver as du-

Colaboração [illegible] de [illegible]

as divisões (divisão partitiva e divisão por medida) indicadas pelas crianças, nos seus escritos, por meio do mesmo sinal, os dois pontos colocados um abaixo do outro.

Num sistema de notação, o sinal, a seus olhos (olhos da criança) faz parte do conceito que êle representa.

O esfôrço de tomada de consciência exigida pela notação aumenta ainda o valor formativo da matemática.

Ao lado do sistema de notação puramente técnico empregado em matemática, tôda solução faz intervir frases explicativas tiradas da linguagem corrente. Pensamos que, para estas últimas, as exigências, sob o ponto de vista da ortografia e sintaxe, devem ser tão grandes como se tratasse dum trabalho preparado numa lição de linguagem. Com efeito, nenhuma razão poderia explicar porque, bruscamente, o aluno negligenciaria a forma, ainda que êle estivesse em classe para aprender a exprimir seus pensamentos. A intransigência sôbre êste ponto de vista manifesta o desejo de manter o principal objetivo do ensino.

Só a França citou o auxílio que a linguagem matemática, precisa e concisa, pode trazer ao estudo da língua materna.

Da mesma maneira, mais tarde, as aproximações que inventarem para exprimir seu pensamento matemático nascente poderão ser apreciadas pelo poeta que se oculta em todo o educador, mas não admissíveis pelo matemático que as substituirá pelas notações convencionais.

2. Princípio das diferenças acentuadas

Algumas aplicações:

Para a real e positivo, as convenções empregadas são:

1) $(+\sqrt{a})$ é um número relativo positivo.

2) $(-\sqrt{a})$ é um número relativo negativo.

2) $\sqrt{a}$ é o valor absoluto de um dos dois números precedentes.

[illegible]

Vejamos agora alguns exemplos de diferenças entre noções vizinhas em aparência, mas que não faz confusão:

1) No estudo do vocabulário de línguas estrangeiras ou do latim, os alunos encontram palavras que não diferem muitas vêzes mais de que uma letra e da qual os sentidos são muito afastados. "Ad augusta per angusta" - (Chega-se a resultados sublimes por caminhos estreitos) - êste exemplo, muito comum, é uma forma e uma significação que convêem particularmente bem a nosso propósito.

Um rápido inquérito nos tem feito pensar que a metade dos alunos são avantajados e outra metade embaraçados para a comparação destas palavras vizinhas. Há ali uma reação pessoal, revelada igualmente no estudo da leitura pelo método global ou ideo-visual, mas que não temos observado em matemática. Um estudo dêste fenômeno nas disciplinas literárias poderia ser muito interessante.

2) Diferença entre fração e relação (rapport); estas duas noções tendo por infelicidade representações gráficas muito parecidas, de modo que os alunos se espantam ao saber que há uma diferença entre elas.

Em sua origem "fração" significa "parte de" ou "separação". A fração é, pois, a parte do inteiro, um certo número de vêzes menor que êsse inteiro: $\frac{12 \text{ metros}}{3 \text{ vêzes}} = 4 \text{ metros}$

Diferença relação, fração

Mas a relação (ou razão?) é a expressão matemática duma comparação feita entre duas quantidades concretas; a relação indica quantas vêzes a quantidade menor está contida na maior:

$\frac{12 \text{ metros}}{3 \text{ metros}} = 4 \text{ vêzes}.$

Se a notação das unidades é completa, denominadores e resultados indicam sem dificuldade o que separa uma fração duma relação, mesmo se os numeradores são iguais, como no nosso exemplo.

3. Princípio de totalidade

No curso de um trabalho, quer seja longo e complicado ou curto e esclarecido, exposto a um êrro fácil de cometer, o aluno deve ter a cada instante a idéia geral do conjunto, todo // ocupado no menor detalhe. Desta maneira se anuncia o princípio de totalidade. Noutros têrmos, a análise de todos os casos não deve impedir a síntese consciente de seu conjunto.

A primeira medida prática que é preciso tomar em favor das crianças para lhe permitir aplicar êste princípio gerador de // claridade, é de os tornar capazes de sempre saber quantos casos são possíveis, qual é os que estão a tratar, qual é sua importância em relação aos outros, e qual é sua situação entre êles.

Freqüentemente, basta para atender êste resultado que as / crianças aprendam a trabalhar, sob a direção de um professor // cujo pensamento é claro e metódico; em função do mimetismo, êles poderão passar a pesquisar estas diretrizes gerais. Quando a // questão a tratar é, aos olhos de um iniciado, de uma certa complexidade, é bom recorrer a uma notação manifestando a estrútura do conjunto. Nosso quarto exemplo abaixo é uma ilustração.

Eis aqui alguns exemplos:

1) Operações simples sôbre frações: encontram-se alunos que, para multiplicar duas frações, transformam-nas ao mesmo denominador, primeiramente; é a confusão muito freqüente entre adição e multiplicação. Como, finalmente, após as dificuldades, êles encontram o resultado, pensam que êste proceder vale bem ao outro e ficam espantados que estão errados. Para fixar definitivamente os diversos mecanismos relativos aos cálculos sôbre frações, empregamos os exercícios seguintes:

Problema 27: Dão-se duas frações desiguais (para cada aplicação, o professor indica os valores numéricos destas frações). Pergunta-se:

a) adicioná-las, d)dividir a maior pela menor,

b) subtraí-las , e)dividir a menor pela maior.

c) multiplicá-las,

Na solução da primeira aplicação, o professor indica o melhor caminho para qualquer um dêstes cinco cálculos. Serão sempre apresentados na mesma ordem afim de que os alunos descubram que é mais simples e mais fácil dividir duas frações uma pela outra que as adicionar, nesse caso em geral, as crianças têm o sentimento contrário. Se êstes cálculos devam se fazer finalmente sem nenhum esfôrço e ràpidamente, é portanto muito importante obter a perfeita compreensão das razões que explicam as muito grandes diferenças que os separam. Êstes aqui são postos em evidência pelo fato de que os cinco cálculos partem das mesmas frações dadas, e as explicações completas evidenciam um automatismo cego à ao mecanismo assimilado. Em seguida, se no decurso da solução de um outro problema, um dos cinco cálculos sôbre frações intervir, o aluno o recolocará mentalmente na série bem conhecida que exige obrigatòriamente o denominador comum duas vêzes, para em seguida o suspender três vêzes. Suas oportunidade de tornar-se bom calculador serão aumentadas nêle.

4. <u>As origens de algumas dificuldades encontradas pelos alunos</u>

....

Atacar de frente o ponto de resistência não é sempre melhor método de se tratar de uma perturbação intelectual.

....

O verdadeiro remédio é muitas vêzes de rever as bases, os primeiros elementos, que sendo mal compreendidos e mal assimilados, impedem tôda construção ulterior.

Um exemplo a meditar nos é dado pela educação musical e é ré resumida pela seguinte imagem <u>geométrica</u>:

Uma montanha cônica é subida por um caminho que o aluno percorre girando em tôrno dela. Êste caminho conduz ao cume até alcançar , mas durante tôda a subida, o viajante pode não ter observado o alvo. Êle ali chega sem sacrifício, se o caminho é bom.

A respeito dos livros, êle faz lembrar o modo de um educador que não era professor, mas conhecia bem as dificuldades das crianças: "Os livros escolares foram escritos por adultos que pensavam mais na <u>opinião dos seus colegas</u> que no bem da criança. É por isso que êles são muitas vêzes pedagògicamente falsos".

Assinalamos algumas dificuldades encontradas pelos alunos: notações e expressões que não são empregadas.

1) Multiplicação escrita ao inverso: 2 x 11m = 22m, quando que, segundo a teoria da multiplicação, deve-se escrever:
11m tomados 2 vêzes seguidas = 22m ou 11m x 2 = 22m.

É preciso respeitar esta convenção, em aritmética, para / evitar mais tarde sérias complicações em álgebra.

2) Cálculos em cadeia: 17dm - 4dm = 13dm - 7dm = 6dm - 1dm = = 5dm - 5dm = 0. Evitar que o sinal = esteja entre quantidades desiguais:

17dm - 4dm = 13dm
13dm - 7dm = 6dm
6dm - 1dm = 5dm
5dm - 5dm = 0

3) Faltas em linguagem transformando uma noção matemática:

"Para pintar a cêrca que contorna o jardim, o pintor <u>toma</u> 40 minutos..."; "... a <u>quantidade</u> de rendimento..."

4) Imprecisões:

" Um camponês semeia trigo sôbre um campo de 72m de comprimento e 3m de largura. Quantos m^2 semeia êle?"

5) Enunciado destinado às crianças de 5 a 7 anos, incompreensível para numerosos adultos: "Eis aqui bolinhas de gude de Luís (o desenho mostra um grupo linear de 5 bolitas). Eis aqui as de João (o desenho mostra 6 grupos lineares de 5 bolitas). Quantas vêzes João tem mais bolitas que Luís?"

Enderessando-se a adultos, pode-se obter as três respostas seguintes: 5 vêzes; 20 bolitas; 4 vêzes. Nossa conclusão será que as dificuldades começam muito cedo para as crianças!

"O preço de um metro de tela: 2,50f

Preço de tôda a tela: 50 f

Número de m de tela: 50 : 2,5 = 20m", pois dividindo francos por francos, acha-se metros! É verdade que o autor do livro (Margot e Buxcel, Arithmetic - grau superior -pág. 19 e 30) para colocar sua consciência ao abrigo, toma a precaução de igualar as unidades do dividendo e do divisor, mas isto é bem insuficiente para evitar às crianças de continuar a pensar que 50 et 2,5 são expressos em francos. Esta supressão de unidades não é uma simplificação, mas uma ocasião de êrro que o ensino impõe às crianças. Melhor seria notar:

Número de m de tela: 50 francos : 2,5 francos = 20 vêzes, pois 20 metros. Os três pontos indicam que se fêz uma divisão por medida que, noutros têrmos, chama-se também uma relação. É o fracionamento de 50m em 2,5 partes que poderia dar imediatamente 20 m como resultado. Há aqui pois confusão entre relação e fração, não no autor destas notações, mas na confusão dos alunos que a empregam.

7) Êrro claro e portanto dado em exemplo:

$$\frac{600}{84} = 7$$

Isto é grave porque de uma parte o cálculo não está terminado, logo nada o indica, e doutra parte, o sinal de igualdade é empregado abusivamente.

8) Repetição de um sinal dentro de um polimônio: quando um polimônio é muito longo para ser escrito sôbre uma linha só, é / perigoso para as crianças repetir ao início da segunda linha, o sinal que termina a primeira. É preciso então pôr o polimônio sob a forma de uma lista ordenada, estando cada monônio ~~p~~ precedido de um só sinal, e jamais escrever de modo algum ao fim da linha.

9) Notações muito abstratas indicadas por um professor: o enunciado era: "Sôbre uma mercadoria , eu obtive uma redução de // 3,5%. Economisei assim 287 francos. Qual era o preço marcado?"

O cálculo indicado foi: 287 francos : 3,5% = ...

O aluno via que o resultado final, era justo, mas não compreendia porque um tal resultado pudesse ter dado. Estava pasmado ao ver dividir francos por % ! A mesma dificuldade é imposta à criança quando se multiplicam entre si; exemplo: "O preço da compra de uma mercadoria vale os 80% do preço da venda. O preço da compra é diminuida de seus 2%. Quanto vale a diminuição, em % do ~~pr~~e preço da venda?"

Se, matemàticamente, pode-se multiplicar as relações entre elas, isto é muito abstrato sob formas de %:

(80% do P. V.) . (2%) = 1,6 do P. V.

Fazendo a notação $\frac{2}{100}$ no lugar de 2% evita-se a multiplicação dos %, o que facilita a compreensão.

5. Os operadores

Chamam-se "operadores" os simais indicando que os elementos, colocados à continuação ou imediatamente adiante, são para submeter a uma operação determinada.

Os primeiros operadores encontrados pelos alunos são os sinais das operações fundamentais. Como o sistema que êles formam não é perfeito e provoca confusões, vale a pena analisá-l

Adição	+ mais	aumentado de
Subtração	- menos	diminuído de
Multiplicação	x vêzes	multiplicado por
Divisão	:	dividido por

Tem-se o hábito de ler êstes sinais: mais, menos, vêzes, é dividido, o que não é homogênio, como mostra o quadro acima. É também um sistema encompleto, porque há pelo menos, duas divisões fundamentais e fundamentalmente diferentes. Dêste fato, os dois pontos superpostos, representam duas noções diferentes, / formando ambíguo. Estas imperfeições fazem crer que há sòmente quatro operações fundamentais, o que é falso e origina muitos erros.

Já vimos que (fl. 2) um sistema perfeitamente construído é completo, homogêneo, sem ambigüidade e lógico. Propomos o sistema seguinte que não é inteiramente homogêneo, mas que tem grandes vantagens por relacionar ao precedente.

19 francos + 4 francos = 23 francos - lê-se 19 fr. mais 4 fr. igual a 23 francos

19 francos - 4 francos = 15 francos - lê-se 19 fr. menos 4 fr. igual a 15 francos

19 francos x 4 vêzes = 76 francos - lê-se 19 fr. tomado 4 vêzes igual a 76 francos

18 francos ⋮ 4,5 francos = 5 francos - lê-se 18 fr. contêm 4,5 francos 4 vêzes

20 francos : 4 vêzes = 5 francos - lê-se 20 fr. partilhados em 4 partes dão 5 francos

Êstes cinco cálculos formam um sistema de base que as crianças assimilariam, antes de completar por elas mesmas. Observar que cada número e seguido de um nome, sem exceção, o que / força à reflexão e simplifica finalmente, porque sabe-se sempre o que se deve achar como resultado. Para indicar um número abstrato, basta fazer seguir da palavra "vêzes". Veremos então que distinguir as duas divisões prepara a respeitar a diferença entre relação e fração.

Certos livros elementares introduzem a divisão como uma sérei de subtrações e não como a operação inversa da multiplicação. Distinguem-se as duas divisões introduzindo duas operações diferentes, como se vê:

1) a série de subtrações explica muito bem a divisão por medida, mas não a partitiva: 18 francos : 4,5 = ? vêzes pode-se escrever sob a forma de subtrações, porque se eleva então os francos a uma soma expressa em francos;

2) a operação inversa explica muito bem a divisão partitiva e a por medida: 20 francos : 4 vêzes = ? francos tornando a encontrar um número de francos que, tomados 4 vêzes, dão 5 francos; é a partitiva. 18 francos : 4,5 francos = ? vêzes tornando a encontrar quantas vêzes a pequena soma está contida na grande; é a por medida. Uma série de multiplicações feitas a têilo de ensaio dá o resultado procurado.

A primeira cousa a ensinar às criancinhas por um material concreto, é que um objeto pode ser dividido, partido em 20 pedaços, 4 pedaços, 2 pedaços, mas que um objeto não pode ser partido em menos de 2 pedaços; em outros têrmos o divisor de uma divisão partitiva é sempre maior que ou eventualmente igual a 2, mas nunca maior que 2.

Supomos aqui três verdades:

a) uma divisão partitiva não se pode fazer por um número menor que dois;

b) uma divisão por medida compara duas quantidades concretas e seu resultadochama-se quociente,é "um número de vêzes". Em latim, quotiens ou quoties significa "quantas vêzes" e sòmente a divisão por medida tem um resultado que se pode chamar, / em todo rigor, um quociente;

c) a barra horizontal indica que êle precisa fazer uma ou outra das duas divisões citadas, ou eventualmente, uma outra ainda.

Se escrevemos nos exemplos de divisão por medida e de divisão partitiva em colunas, obtemos uma relação e uma fração:

Por medida: 18 francos ⋮ 4,5 francos = 4 vêzes; $\frac{18 \text{ francos}}{4,5 \text{ francos}} = 4$ vêzes - Relação

Partitiva: 20 francos : 4 vêzes = 5 francos. $\frac{20 \text{ francos}}{4 \text{ vêzes}} = 5$ francos - Fração

Para uma relação, a barra horizontal é lida "contém" e para uma fração "partido em" ou "sôbre"; isto permite pôr em evidência uma nova diferença entre relação e fração. Se muitos alunos têm tendência a confundir estas duas noções, as definições que se encontram nos seus manuais são em parte responsáveis.

Uma observação ainda antes de resumir esta primeira parte.

Número de metros de tela: 50 francos ⋮ 2,5 francos = 20 vêzes, portanto 20 m. Êste é o momento de chamar a atenção, explicando: "Tantas vêzes 2,5 francos estão contidos em 50 francos, tantas vêzes há 1 metro de dela na peça, portanto 20 metros." Isto exprime noutros têrmos, a igualdade de duas relações.

Em resumo:

Adição	+	<u>mais</u>	aumentado de	
Subtração	-	<u>menos</u>	diminuído de	
Multiplicação	x	<u>tomado</u>	multiplicado por	
Div. por medida	⋮	<u>contém</u>		Relação
" partitiva	:		partido em	Fração

Êste primeiro sistema de base é destinado às crianças de 8 a 11 anos. Pela prática temos estabelecido que isto permite ao aluno melhor saber o que é feito com o sistema habitual parecendo mais simples. Sôbre êste ponto sòmente, a experiência de controle não pôde ser feita: para evitar o emprêgo de um sinal que os professôres não conhecem geralmente não introduzimos o sinal de "contém" (três pontos superpostos); os pais dos alunos também ficaram muito espantados de ver aparecer êste sinal, porque "êles nunca tinham feito nada com isso"! Precisam então que nos graus primário e secundário, os resultados sejam satisfatórios.

A partir dos llanos, é preciso que os alunos comecem o estudo da multiplicação e da divisão generalizadas, e um pouco mais tarde a da multiplicação e da divisão físicas. Êstes quatro cálculos formam o sistema complementar:

1) Multiplicação generalizada: tôdas as unidades são suprimidas:

$$9,42 \times 0,64 = 6,0288$$

Não é portanto qualquer cálculo que deve ser <u>interpretado</u> em função do texto matemático onde êle se coloque.

2) Divisão generalizada: todás as unidades são suprimidas. A isto se devem portanto uma relação entre números absolutos, relação a interpretar como divisão partitiva ou por medida, conforme o contexto.

$$6,0288 : 0,64 = 9,42$$

Procura-se aqui im número que multiplicado por 0,64, dê ... 6,0288. Os três números são então expressos sem unidades. O divisor pode ser agora, qualquer um.

3) Multiplicação física: 3,5 kg . 6,2m = 21,7 kgm

É um cálculo fundado sôbre uma definição das unidades.

4) Divisão física: 14,921 m : 4,3 s = 3,47 m/s

Esta divisão cria as unidades derivadas.

Êste sistema complementar é tão bem empregado que o sistema de base é mais seguro. Com os dois, formam ao todo 9 operações fundamentais.

A prática da divisão detem freqüentemente os alunos. Ao observar que seus livros contêm boas cousas que êles não empregam nunca, embora sabendo que existem. Ex.: Na divisão 212 : 27 = ? observar-se-á que 27 está mais perto de 30 que de 20. Em vez d dizer "em 21, quantas vêzes há 27", para obter ràpidamente o quociente, dir-se-á "em 21 quantas vêzes há 3?". De outra pa te,, podemos estabelecer que é melhor traçar as unidades que os valores para explicar a mudança da vírgula:

4,75f : 0,46f = ? vêzes, será substituído por 475c : 46c = =? vêzes, de tal maneira que as importâncias em comparação não trocam. Comparando 475f a 46f, acrescenta-se uma dificuldade suplementar para as crianças porque as importâncias são trocadas, nesse caso os adultos acham esta forma muito simples. É preciso portamto trocar os números e as unidades e obter assim a invariabilidade dos valores.

Em face das frações, relações e porcentagem podemos ainda fazer quaisquer observações:

1) Etimològicamente, uma fração é uma parte de um todo; ela não deveria portanto jamais ser superior à unidade. É bom atrair a atenção das crianças sôbre a extensão dada a esta palavra em matemática.

2) A teoria completa das operações sôbre frações deveria ser refeita em álgebra com uma notação literal, porque os valores numéricos ajudam demais o aluno em aritmética; não pode entretanto tomar inteiramente consciência das propriedades empregadas. Felizmente, o tempo deixa freqüentemente para refazer êste estudo a fundo, no momento em que êle é verdadeiramente útil, isto é, aos 14 anos e meio.

3) Um êrro corrente é de chamar "fração" uma relação escrita, / por meio de uma barre horizontal; exemplo:

"Exprimir em fração irredutível a razão ou relação seguinte: $7\,{}^{1}/_{2}\,\%$"

$7^{1}/2\% = \frac{7,5}{100} = \frac{15}{200} = \frac{3}{40}$; êste último valor é também uma relação!

4) Para ser inteiramente claro, é preciso sempre voltar, novamente às definições seguintes: Uma relação é o quociente de duas quantidades concretas da mesma espécie; êste quociente exprime quantas vêzes uma das quantidades está contida na outra. Uma fração é uma quantidade concreta, menor ou maior que a unidade concreta empregada e obtida por um seccionamento desta

última.

Assim: 5 % é uma relação e (5% de 40) é uma fração. Neste último exemplo, o seccionamento é dado pela relação, mas a expressão entre parênteses é uma fração.

5) O problema seguinte dá como exemplo o mesmo número, primeiro como relação, depois como fração:

Um tarro de leite está cheio sucessivamente com água , depois com leite. Um litro de leite pesa 1,032kg. O pêso do tarro cheio dágua é de 3,6666kg, e cheio de leite pesa 3,753kg. Pergunta-se:

a) o pêso do tarro vazio,

b) o número de litros que pode conter o tarro .

Solução:

A diferença total é de: 3,753kg - 3,6666kg = 0,0864kg

A diferença parcial calculada sôbre um litro é de:

1,032kg - 1kg = 0,032kg

A relação dêsses pesos é: $\frac{86,4\text{kg}}{32\text{ kg}}$ = 2,7 vêzes (Relação)

Conteúdo do tarro: 1kg . 2,7 vêzes = 2,7kg (Fração)

Pêso da água que enche o tarro:

1kg . 2,7 vêzes = 2,7kg (Fração)

Pêso do tarro vazio: 3,6666kg - 2,7kg = 0,9666kg = 966,6g

O número decimal 2,7 pode-se escrever $\frac{27}{10}$ e entrar no texto desempenhando funções de fração ou de relação. É o que êste // exemplo devia mostrar. A natureza dessas duas noções sendo diferente, a notação deve revelar.

Alguns professôres terão hesitações antes de introduzir no seu ensino de nítidas distinções entre fração e relação, como entre divisão partitiva e divisão por medida, para seus alunos mais jovens.

Tôdas as crianças, qualquer que seja sua idade, preferem um grande número de noções simples e bem compreensíveis a um pequeno número de armadilhas ambíguas e vagas, as quais êles não saibam jamais explicar com segurança. O adulto benevolente crê facilitar-lhe a tarefa, evitando de introduzí-los num labirinto de casos múltiplos, tais como as prentendidas simplificações que incomodam o espírito em curso de formação. Ter a coragem de ver as realidades face a face, que, sem nenhuma deformação arbitrária, é a atitude que finalmente cpnduz ao "simples" e como tal ao sucesso.

Para poder distinguir, é preciso ter à sua disposição uma notação que objetive as diferenças. Já a demos, mas achamos útil de resumirmos, mas uma vez, afim de fixar a vista do conjunto.

Divisão pa rtitiva: 1t5,5francos : 2 vêzes = 8,75 francos;

Fração $\frac{17{,}5 \text{ francos}}{2 \text{ vêzes}} = 8{,}75$ frs.

Divisão por medida: 6,5ℓ ⋮ 0,4ℓ = 16,25 vêzes;

Relação $\frac{6{,}5 \text{ litros}}{0{,}4 \text{ litro}} = 16{,}25$ vêzes

Como isto já era o caso nos nossos outros exemplos, cada número é sefuido de uma palavra, sostematização esta que tem grandes vantagens na prática.

Enfim, alguns pensarão que o sinal de contido (3 pontos superpostos) não é indispensável. Em todo caso. evita uma confusão grave, e seria muito interessante introduzir a um grande número de crianças para fazer a prova de sua utilidade até aos 11 ou 12 anos, utilidade da qual não duvidamos porque permite à criança de satisfazer sua necessidade de clareza.

Todos os sinais que empregamos eram relativamente recentes nada se opõe a que o sistema habitual seja completado. Os sinais + e − foram introduzidos por Widmann, em 1489; os sinais x e ÷ por Recerd em 1577; quanto ao sinal de"contido em" ⋮ foi empregado por Wittmann desde 1933. Sua introdução ajudava os jovens e permitia de voltar às noções simples pqrq definir mais tarde Fração e Relação.

Revisado em 2/10/78
AWestphal

G. Cuisenaire - C. Gattegno: "L'Arithmetique avec les nombres en Couleurs" - II parte: livro nº 5 pág.ª 40.
Tradução: Izabella Kertész

Exercícios

1. Se se mede a barra verde-clara e a laranja, servindo-se de diferentes barras, a mesma relação pode-se escrever de diferentes maneiras. Escreve-se 3/10, quando é a barra branca que serve de medida. Quando é a laranja que mede as duas barras, escrever-se-á 0,3. Esta notação substitui 3/10 e se lê "zero vírgula 3". Esta não é uma nova fração; é uma maneira nova de escrever a fração que tem a barra laranja como unidade de medida. Escrevemos igualmente, nesta notação, a medida de cada uma das barras pela barra laranja.

2. Quanda se mede uma barra por ela mesma, escreve-se (1:1). Quando se mede a barra laranja por ela mesma, pode-se também escrever 1,0 - com uma vírgula após o um - se se quer mostrar que se utiliza a notação decimal: 1,0 = 1 e vice-versa. Pois que se sabe que 11/10 = 10/10 + 1/10, na notação decimal se escreveria: 11/10 = 1,1 (um vírgula um). Escrevemos duma maneira semelhante tôdas as frações nas quais a barra laranja é a unidade de medida e os comprimentos medidas são iguais a 12, 13,.....,19 barras brancas. Sabe-se que 20/10 é (2:1) ou 2. Em notação decimal pode-se escrever 2,0. Escreve as frações seguintes sob a forma de números decimais:

30/10   40/10   50/10   60/10   70/10   80/10   90/10   100/10   110/10.

3. Escreve as seguintes frações sob a forma de números decimais:

21/10   23/10   27/10   29/10   32/10   35/10   37/10   38/10

41/10   42/10   47/10   49/10   53/10   54/10   58/10   59/10

72/10   63/10   68/10   69/10   72/10   73/10   75/10   76/10

81/10   83/10   87/10   89/10   92/10   94/10   98/10   100/10   105/10

109/10   115/10   121/10

4. Escreva os números decimais seguintes sob forma de frações, tendo 10 como denominador:

0,5   0,7   0,9   0,3   0,2   2,4   2,5   3,1   1,9   2,8   7,7   5,6
6,5   8,3   9,4   4,8   7,3   6,9   5,8   8,6   o,7   7,9   8,8   6,4
3,8   11,9   12,3   13,0   14,5   17,7   72,9   29,8   66,6   73,2   34,5
25,4   26,7   29,3   19,4   19,4   88,8   93,0   84,0   60,8   50,0   50,4

5. Se vocês sabem operar a adição:	Saberão adicionar?
3/10 + 2/10	0,3 + 0,2
7/10 + 1/10	0,7 + 0,1
11/10 + 2/10	1,1 + 0,2
17/10 + 13/10	1,7 + 1,3
19/10 + 12/10	1,9 + 1,2
7/10 + 32/10	0,7 + 3,2
5/10 + 38/10	0,5 + 3,8

Examina as seguintes adições:

0,3 + 0,7   0,4 + 0,6   0,8 + 0,2   0,3 + 0,9   0,7 + 0,3
0,6 + 0,4   0,2 + 0,8   0,9 + 0,3
0,5 + 0,5

E nas seguintes, que notas?

0,3 + 1,7 1,4 + 0,6 1,8 + 0,2 1,9 + 0,1 1,3 + 0,7 0,4 + 1,6
1,2 + 0,8 1,1 + 0,9
1,5 + 1,5

E nestas?

2,3 + 0,7 1,7 + 2,3 2,3 + 2,7 2,3 + 5,7 3,8 + 0,2 3,8 + 1,2
3,8 + 2,2 3,8 + 3,2 4,6 + 0,4 4,6 + 1,4 4,6 + 4,4 4,6 + 5,4
6,7 + 0,3 6,7 + 1,3 6,7 + 3,3 6,7 + 7,3 1,9 + 2,1 1,9 + 6,1
1,9 + 4,1 1,9 + 9,1

6. Se tu sabes subtrair: Saberás fazer estas subtrações? subtrair

$^3/10 - ^1/10$	0,3 - 0,1
$^5/10 - ^3/10$	0,5 - 0,3
$^7/10 - ^4/10$	0,7 - 0,4
$^{11}/10 - ^6/10$	1,1 - 0,6
$^{15}/10 - ^9/10$	1,5 - 0,9

Examina as seguintes subtrações:

0,7 - 0,3 0,3 - 0,2 0,8 - 0,4
0,9 - 0,5 0,5 - 0,1
0,9 - 0,5 0,7 - 0,4 0,6 - 0,3
0,4 - 0,1 0,8 - 0,5
0,8 - 0,3 0,6 - 0,1 0,7 - 0,2
0,9 - 0,4

Que notas?

Procura o resto das seguintes subtrações:

1,7 - 0,3 1,6 - 0,2 1,8 - 0,4
1,9 - 0,5 1,5 - 0,1
1,9 - 0,6 1,7 - 0,4 1,6 - 0,3
1,4 - 0,1 1,8 - 0,5
1,8 - 0,3 1,6 - 0,1 1,7 - 0,2
1,9 - 0,4

E das seguintes:

1,7 - 1,3 1,6 - 1,2 1,8 - 1,4
1,9 - 1,5 1,5 - 1,1
1,9 - 1,6 1,7 - 1,4 1,6 - 1,3
1,4 - 1,1 1,8 - o,5
1,8 - 1,5 1,6 - 1,1 1,7 - 1,2
1,9 - 1,4

Quando a resposta é <u>0</u>, podes escrever <u>0</u> ou <u>0,0</u>. Escreve a resposta das seguintes subtrações:

0,9 - 0,9 1,1 - 1,1 3,2 - 3,2 7,8 - 7,8

7. Subtrai:

1,7 - 0,9 1,6 - 0,7 1,5 - 0,8 1,5 - 0,8 1,4 - 0,7

2,4 - 1,8	2,7 - 1,9	3,3 - 2,5	5,2 - 4,8	6,1 - 3,2
7,4 - 5,8	8,2 - 6,3	9,1 - 7,9	5,5 - 4,8	6,3 - 5,9
7,1 - 6,2	4,0 - 3,8	5,0 - 2,1	6,0 - 3,9	7,0 - 1,4
		9,0 - 8,0		

8. Pode-se dispor verticalmente essas adições e subtrações. Deve-se colocar vírgula abaixo de vírgula a proceder como habitualmente.

3,1	4,2	3,8	7,1	13,2
+ 4,7	+ 5.6	+ 5,4	+ 6,9	+ 17,8

Escreve as respostas das seguintes:

5,4	6,3	7,1	8,3	10,3	32,5
+ 4,5	+ 3,6	+ 2,9	+ 3,8	+ 10,8	+ 32,5

34,5	32,9	38,4	36,6	44,7	59,9
+ 35,8	+ 44,3	+ 41,5	+ 35,3	+ 56,4	+ 43,7

Que notas sôbre a maneira de subtrair os números decimais?

9. Adiciona estas colunas de números decimais:

3,2	2,3	5,2	6,4	7,9	6,2
5,4	4,5	7,4	5,3	4,8	7,3
7,1	1,7	3,1	7,1	6,0	8,4
6,3	3,6	6,2	8,0	7,3	9,5

10,3	12,7	14,9	18,2	29,1	33,3
11,4	20,7	23,6	19,3	32,5	44,1
13,2	23,3	34,5	20,4	45,6	50,5
15,6	31,6	40,0	21,5	56,4	66,6

Verifica, contando de baixo para cima se adicionaste de cima para baixo ou inversamente. (Achar o mesmo resultado)

Procura as respostas das adições seguintes, escritas, horizontalmente:

7,3 + 4,4 + 6,2 + 1,5 =
6,4 + 7,9 + 3,8 + 2,9 =
7,7 + 6,3 + 8,3 + 1,1 =
8,4 + 9,2 + 3,6 + 2,2 =
7,6 + 6,7 + 6,5 + 5,6 =

e verifica a resposta, refazendo a adição no sentido oposto ao da primeira vez.

10. Se, como medida se usarem dez barras laranjas, ponta à ponta, tem-se um comprimento igual a cem barras colocadas ponta à ponta, barras brancas. Diz-se que todo outro comprimento formado de barras colo-ccadas pontaà ponta. pode ser medido com o auxílio dessa medida e podem-se escrever assim as respostas:

(7;100) ou $^{7}/100$ se é a barra preta que se med

(23;100) ou $^{23}/100$ se é o comprimento que medimos.

 4

Vamos, agora, escrever estas frações de outro modo, utilizando novamente a notação dos números decimais:

7/100 se escreve 0,07   23/100 se escreve 0,23
1/100 " " 0,01   11/100 " " 0,11
3/100 " " 0,03   99/100 " " 0,99

Escreve as seguintes frações sob forma de números decimais:

8/100   4/100   6/100   5/100   2/100   9/100   12/100
17/100   19/100   21/100   27/100   34/100   38/100   44/100
46/100   50/100   51/100   60/100   68/100   71/100   73/100
77/100   78/100   84/100   85/100   89/100   92/100   97/100

Escreve sob a forma de frações os números decimais seguintes:

0,02   0,05   0,07   0,18   0,25   0,28   0,33   0,40   0,53
0,56   0,67   0,88

Como 100/100 é (1:1) ou 1/1 ou 1, escrever-se-á também 1,0 ou 1,0I e como 115/100 = 100/100 + 15/100, pode-se escrever 1,15 por seu número decimal.

Escreve sob forma de número decimal:

117/100   123/100   144/100   150/100   165/100   170/100   124/100
199/100   e sob forma de fração

1,18   1,29   1,36   1,48   1,59   1,60   1,72   1,80   1,86   1,90

11. 200/100 = 2, escrever-se-á também 2,0 e 2,00 e como 213/100 = = 200/100 + 13/100, escrever-se-á 2,13 por seu número decimal.

Escreve os números decimais correspondentes a:

300/100   400/100   900/100   209/100   218/100   285/100   800/100
245/100   256/100   222/100   500/100   600/100   700/100   234/100
274/100   301/100   308/100   315/100   320/100   354/100   366/100
377/100   392/100   406/100   409/100   416/100   436/100   463/100
475/100   489/100   499/100   503/100   605/100   702/100   803/100
901/100   Dá

Escreve a fração correspondente a:

5,04   5,09   5 06   5,17   5,71   5,84   5,96   6,01   6,02   6,03
6,11   6,11   6,23   6,77   6,93   7,03   7,05   7,07   7,13   7,24
7,37   7,48   7,84   8,00   8,20   8,30   8,32   8,41   8,53   9,60
8,90   9,10   9,11   9,21   9,22   9,33   9,44   9,71   9,88

12. Como 1000/100 = 10; 1100/100 = 11; 2000/100 = 20; etc, pode-se escrever estas frações sob a forma de números decimais: 10,0 ou .. 11,0 ou 11,00; 20,0 ou 20,00.

5

Como 1234/100 = 1200/100 + 34/100, isto pode ser escrito 12,34.
Quais são os números decimais correspondentes às seguintes frações?

1064/100 1073/100 1096/100 1106/100 1199/100 1154/100 1196/100

1272/100 1355/100 1429/100 1616/100 1734/100 1868/100 1999/100

2021/100 3056/100 4072/100 5084/100 6088/100 7091/100 8002/100

9008/100. Quais são as frações correspondentes aos n.^os^ decimais seg.^tes^?

10,11 11,17 12,13 13,09 14,20 17,10 18,41 19,02 27,51 33,15

56,66 77,70 83,33 91.16 96,16 99,99

13. Como 1/10 = 10/100; 2/10 = 20/100; ... 9/10 = 90/100

0,1 = 0,10. 0,2 = 0,20; 0,9 = 0,90

Se podemos adicionar	também adicionaremos
7/100 + 5/100	0,07 + 0,05
17/100 + 5/100	0,17 + 0,05
19/100 + 15/100	0,19 + 0,15
6/100 + 23/100	0,06 + 0,23
8/100 + 134/100	0,08 + 1,34
12/100 + 207/100	0,12 + 2,07

podemos adicionar

Se podemos subtrair	também subtrairemos
7/100 - 5/100	0,07 - 0,05
17/100 - 5/100	0,17 - 0,05
19/100 - 15/100	0,19 - 0,15
36/100 - 23/100	0,36 - 0,23
808/100 - 134/100	8.08 - 1,34
812/100 - 207/100	8,12 - 2,07
173/100 - 153/100	1,73 - 1,53

Dá

Procura as respostas:

0,01 + 0,02	0,03 + 0,04	0,06 + 0,07
0,07 + 0,09	0,08 + 0,13	0,09 + 0,17
0,10 + 0,11	0,13 + 0,19	0,23 + 0,24
0,27 + 0,33	0,41 + 0,29	0,45 + 0,35
0,51 + 0,48	0,56 + 0,55	0,58 + 0,69
0,67 + 0,39	0,72 + 0,77	0,59 + 0,88
0,89 + 0,98	0,92 + 0,93	

Dá as respostas a:

0,03 - 0,01	0,06 - 0,04	0,07 - 0,05
0,08 - 0,07	0,09 - 0,04	0,08 - 0,02

0,06 - 0,01
0,24 - 0,06
0,39 - 0,27
0,47 - 0

...09 - 0,08 0,13 - 0,09 0,14 - 0,07
... 0,24 - 0,12 0,36 - 0,23 0,35 - 0,24
... 0,40 - 0,20 0,45 - 0,39 0,46 - 0,43
...58 0,52 - 0,44 0,55 - 0,53 0,56 - 0,50
...52 0,64 - 0,59 0,67 - 0,66 0,68 - 0,67
...73 0,85 - 0,82 0,89 - 0,83 0,99 - 0,97

...a tua resposta, usando frações em que o denominador é 100.

...ciona:

...0 0,2 + 0,10 0,30 + 0,2 0,40 + 0,3 0,50 + 0,40

...50 + 0,60 0,1 + 0,2 + 0,3 0,10 + 0,2 + 0,30 " 0,4 + + 0,50 + 0,6

...trai:

0,4 - 0,30 0,50 - 0,4 0,60 - 0,3 0,5 - 0,2 0,60 - 0,30
0,6 - 0,5

14. Se sabemos multiplicar uma fração por uma fração, sabemos que o produto de $^2/10$ por $^3/10$ é $^6/100$, Em notação decimal: 0,2x0,3= = 0,06

Como $^{12}/10 \times ^3/10$, $^{15}/10 \times ^4/10$, $^{15}/10 \times ^{12}/10$ e como em notação decimal 1,2 x 0,3; 1,5 x 0,4; 1,5 x 1,2 e como as respostas são ...... $^{36}/100$; $^{60}/100$ e $^{180}/100$, fêz-se:

1,2 x 0,3 = 0,36 1,5 x 0,4 = 0,60 1,5 x 1,2 = 1,80

Procura as respostas:

0,3 x 0,3	0,4 x 0,3	0,5 x 0,4	0,6 x 0,2	0,4 x 0,7
0,8 x 0,5	0,9 x 0,3	1,3 x 0,2	1,4 x 0,5	2,4 x 0,3
4,1 x 0,4	4,2 x 0,6	5,3 x 0,3	6,6 x 0,4	7,4 x 0,5
8,2 x 0,6	9,1 x 0,3	1,3 x 1,2	1,4 x 1,5	1,5 x 1,5
2,7 x 2,1	3,2 x 2,2	3,5 x 2,5		

Que notaste sôbre a maneira pela qual obtiveste a resposta?

Verifica os resultados, usando frações cujo denominador é 10.

15. Se x $^3/10$ = $^6/10$ = 0,6 e 3 x $^4/100$ = $^{12}100$ = 0,12 pode-se escrever estas multiplicações em notação decimal:

2 x 0,3 = 0,6 3 x 0,04 = 0,12

Procura as respostas em:

3 x 0,3	2 x 0,4	5 x 0,1	4 x 0,2
6 x 0,2	7 x 0,3	8 x 0,4	9 x 0,6
3 x 0,12	5 x 0,11	6 x 0,13	7 x 0,10
9 x 0,20	8 x 0,25	4 x 0,27	2 x 0,51

Que notaste sôbre a maneira como encontraste a resposta?

Procura a respostas em:

30 x 0,3	20 x 0,4	50 x 0,1	40 x 0,2
60 x 0,2	70 x 0,4	80 x 0,3	90 x 0,6

Que notaste sôbre a maneira como encontraste a resposta?

Procura as resp

30 x 0,3

60 x 0,2

Que not

ostas em:

20 x 0,4	50 x 0,1	40 x 0,2
70 x 0,4	80 x 0,3	90 x 0,6

Repetido!

, se comparas estas respostas com algumas das que obtiv[e]s
riormente?

ultiplicar:

33 x 0,3	22 x 0,4	55 x 0,1
66 x 0,2	77 x 0,3	88 x 0,4

enunciar uma regra que permite obter o resultado de uma
ão, seja de um número por um número decimal, seja de dois
imais um pelo outro?

ando-se cem barras laranjas, ponta à ponta, obterá um com
ual a 1 000 barras brancas. Com êle pode-se medir qualquer
outro comprimento formado não importa por quantas barras colocadas ponta à ponta.

Por exemplo, $^{8}/1\,000$ é o comprimento da barra marrom medida por êsse comprimento. As frações em que o denominador é 1 000, usadas sob forma de números decimais, escrever- se- á assim:

$^{8}/1\,000$ será 0,008 $^{5}/1\,000$ será 0,005

Mas como $^{80}/1\,000$ é igual a $^{8}/100$, pode-se escrever o 0,080 ou 0,08 e $^{83}/1\,000$ se escreve 0,083. Como $^{800}/1\,000$ é $^{80}/100$ ou $^{8}/10$, pode-se escrever 0,8000 ou 0,80 ou 0,8 e $^{830}/1\,000$ se escreve 0,830 ou 0,83. E agora, já que $^{835}/1\,000 = {}^{800}/1\,000 + {}^{30}/1\,000 + {}^{5}/1\,000$, escrever-se-á para o número decimal $^{835}/1\,000 = 0,800 + 0,030 + 0,005$ ou seja 0,835.

Escreve as frações seguintes sob a forma de números decimais:

$^{9}/1\,000$	$^{2}/1\,000$	$^{1}/1\,000$	$^{6}/1\,000$	$^{7}/1\,000$	$^{10}/1\,000$
$^{12}/1\,000$	$^{15}/1\,000$	$^{27}/1\,000$	$^{73}/1\,000$	$^{97}/1\,000$	$^{100}/1\,000$
$^{110}/1\,000$	$^{115}/1\,000$	$^{120}/1\,000$	$^{127}/1\,000$	$^{200}/1\,000$	$^{250}/1\,000$
$^{259}/1\,000$	$^{500}/1\,000$	$^{505}/1\,000$	$^{555}/1\,000$	$^{601}/1\,000$	$^{603}/1\,000$
$^{690}/1\,000$	$^{700}/1\,000$	$^{702}/1\,000$	$^{702}/1\,000$	$^{751}/1\,000$	$^{760}/1\,000$
$^{800}/1\,000$	$^{810}/1\,000$	$^{816}/1\,000$	$^{831}/1\,000$	$^{900}/1\,000$	$^{901}/1\,000$
		$^{907}/1\,000$		$^{970}/1\,000$	

Dá a fração correspondente aos números decimais seguintes:

0,020	0,002	0,200	2,000	0,006	0,007	0,015	0,009
0,017	0,170	1,170	2,001	0,73	0,703	0,730	0,905
0,864	0,85	0,9	4,000	5,002	6,012		

17. Como se pode adicionar e subtrair frações, pode-se também fazê-lo quando elas estão sob forma de números decimais.

Procura as respostas de:

0,813	0,009	0,103	0,111	0,234	1,2	1,040
+0,115	+0,731	+0,032	+0,889	+0,567	+0,003	+0,107
1,212	0,003	4,013	1,006	0,104	0,317	0,713
+0,015	+0,009	+1,209	+2,005	+0,206	+0,683	+0,9

0,451
+0,82

Que notas quanto à maneira pela qual encontraste as respostas?

Verifica os resultados, usando frações com denominador 1 000.

Dá as respostas:

1,301	0,091	0,009	2,205	3,139
-1,2	-0,072	-0,003	-1,102	-0,992

Que notas quanto à maneira pela qual encontraste as respostas?

Verifica tuas subtrações ajuntando a resposta ao segundo número.

Acha as respostas das seguintes adições:

0,003	0,023	0,61	1,701
0,307	0,105	2,017	2,039
0,412	0,41	3,4	1,91
0,515	0,6	1,005	2,010

Verifica as respostas, adicionando em ordem oposta.

18. Sabendo multiplicar uma fração por uma fração, também se pode multiplicar as que têm denominador 10 e 100.

Para encontrar o que dá 0,2 x 0,03 se diz: 0,2 é $^2/_{10}$, 0,03 é $^3/_{100}$, o produto é então $^6/_{1\,000}$ que se pode escrever 0,006.

Donde 0,2 x 0,03 = 0,006

Procura do mesmo modo, as respostas de:

0,3 x 0,02	0,4 x 0,03	0,5 x 0,05	0,6 x 0,04
0,7 x 0,06	0,8 x 0,05	0,9 x 0,04	0,9 x 0,06

E das seguintes:

1,3 x 0,02	1,4 x 0,03	1,5 x 0,05	0,6 x 0,04
1,7 x 0,06	1,8 x 0,05	1,9 x 0,04	1,9 x 0,06

Que notas nas respostas?

Encontras as respostas de:

0,3 x 0,12	1,4 x 0,130	1,8 x 0,206	1,9 x 0,240
2,1 x 0,15	2,4 x 0,16	2,7 x 0,210	3,3 x 0,060
4,5 x 0,040	5,1 x 0,11	5,6 x 0,16	6,3 x 0,07

19. Sabemos multiplicar uma fração por um número. Como será se tratarmos com frações decimais?

Multiplica 0,701 por 3. Escreveremos logo a resposta sob esta forma: $^{2103}/_{1\,000}$, que se escreve também 2,103. Nota que 0,701 x 3 = 3 x x 0,701, pois os dois produtos são iguais a $^{2103}/_{1\,000}$.

Acha as respostas:

0,621 x 4	2,101 x 5	0,732 x 6
9 x 0,312	8 x 1,215	4 x 3,145

...nto à maneira de obter a resposta?
...por 10 um número decimal qualquer. Que notas?
...ca por 100 um número decimal qualquer. Que notas?
...ica por 1 000 um número decimal qualquer. Que notas?
...as multiplicações podes dar uma regra que indique quantas
...m que direção é preciso deslocar a vírgula?
...epois de multiplicar por 10 um número qualquer, que deves
...reencontrar êsse mesmo número?
...e multiplicar um número por 100, que deves fazer para re-
...e mesmo número?
... se aplica aos números decimais?
...a 0,73 por 10 e diz o que deves fazer com a resposta, para
...nôvo 0,73?

...ecomeça com os números seguintes:

1,15 2,3 4,03 5,52 0,012 0,009 0,109 0,102

2 Multiplica 0,73 por 100 e dize o que deves fazer com a resposta, para obter de nôvo 0,73?

Recomeça a mesma coisa com:

2,001 0,170 0,207 3,102 5,012 3,11 6,011 9,315.

Podes dizer, em primeiro lugar, o que acontecerá se multiplicares êsses números por 1 000 e, depois disso, o que terás de fazer para obter novamente os mesmos números?

Reencontram-se os números de início, dividindo êsses números decimais por 10, 100, 1 000.

Enuncia esta operação assim:

"Para dividir um número decimal por 10 desloca-se a vírgula....." por 100..., por 1 000..., completando as frases.

21. Tudo qeu se disse das frações em que o denominador é 10, 100 ou 1 000 pode-se aplicar às frações em que o denominador é igual a ... 10 000. 100 000.etc.

As frações como $^{2}/10\,000$ ou $^{31}/100\,000$ podem ser escritas sob forma de números decimais: $^{2}/10\,000 = 0{,}0002$ $^{31}/100\,000 = 0{,}00031$

Escreve-se em primeiro lugar o numerador; depois, para colocar a vírgula, começa-se pelo algarismo direita e, contando em direção à esquerda, seguem-se tantas casas quantas forem os zeros do denominador, colocando zero nas ordens vazias. Para $^{724}/10\,000$, partindo do 4; não há senão uma ordem a mais; assim, não ajuntarás mais do que um zero antes de colocar a vírgula. Em seguida, coloca outro zero antes da vírgula. Obtens. $^{724}/10\,000 = 0{,}0724$. Toma cuidado em não colocar a vírgula antes de ter cpmpletado de contar os zeros.

Coloca as frações seguintes sob forma de números decimais:

$^{517}/100\,000$ $^{2154}/10\,000$ $^{41021}/100\,000$ $^{27726}/100\,000$ $^{327}/100000$

dor é maior que o denominador, haverá alguns algaris-
da vírgula.

omo $^{21}/10 = 2 + {}^{1}/10 = 2,1$; $^{215}/100 = 2,15$ e $^{12153}/1000 =$
do mesmo modo se tem $^{73421}/10\,000 = 7,3421$ e $^{174313}/100\,000 =$

dar uma regra que diga onde se deve colocar a vírgula, quan-
e um número inteiro por 10, 100, 1 000, 10 000, 100 000, etc?
se aplica às que acabaste de fazer?

números decimais têm as mesmas propriedades que as dos nú-
os, sendo suficiente saber onde colocar a vírgula. Verifi-
ação em tudo que fizeste até agora:

adição de números decimais
subtração de números decimais
multiplicação de um número decimal por um número inteiro
multiplicação de um número decimal pou um número decimal
(com 10 ou 100 como denominador da fração decimal)

Podes multiplicar dois números decimais quaisquer? Escreve primeiro sob forma de frações, tendo por denominador 10, 100, 1 000, etc. Encontra, em seguida, o resultado dessas multiplicações de frações. Depois, converte êsses resultados em números decimais, como sabes fazer e vê se a regra relativa à vírgula é igualmente aplicável nesses casos.

23. Há frações diferentes das que têm 10, 100, 1000, etc. como denominador, que podem ser escritas sob forma de número decimal?

Entre as frações que conheces, quais são as que, na família de equivalência, contém uma fração tendo 10 ou 100, etc como denominador?

Procura entre as seguintes, aquelas que nelas têm uma:

$^{1}/3$, $^{2}/5$, $^{1}/2$, $^{3}/4$, $^{7}/5$, $^{3}/7$, $^{1}/8$, $^{2}/25$

Quais são os fatôres de 10? de 100? de 1000?

É sempre possível encontrar uma fração equivalente a uma fração dada tendo 10, 100 ou 1 000 como denominador, se a fração dada tem:

a) um denominador que não contém 2, nem 5?
b) um denominador que contém, apenas, potências de ou de 5?
c) um denominador que contém múltiplos de 2 ou 5?

$^{1}/3$, $^{1}/7$, são da primeira categoria; procura algumas outras.
$^{1}/2$, $^{1}/5$, $^{1}/8$, $^{2}/25$ são da segunda; procura algumas outras.
$^{1}/6$, $^{1}/15$, $^{1}/60$ são da terceira. procura algumas outras

Quais podem ser convertidas em números decimais, multiplicando em primeiro lugar, depois contando os zeros?

Mostra que os exemplos que escolheste dão efetivamente números decimais.

24. Na segunda parte do volume IV, estudamos como se pode dividi

um número por outro. Vamos voltar à divisão, a fim de encontrar para tôdas as frações uma forma decimal que lhes corresponda.

a) Diz-se que $20 = 6 \times 3 + 2$ ou que $^{20}/_{3}$ é 6 com resto 2.

Logo: $\frac{2}{3} = \frac{2 \times 10}{3 \times 10} = \frac{20}{3 \times 10} = \frac{^{20}/_{3}}{10} = \frac{6}{10} + \frac{20}{30}$ ou $\frac{2}{3} =$

$= 0,6 + \frac{^{20}/_{3}}{100} = 0,6 = \frac{6}{100} + \frac{2}{300} = 0,6 + 0,06 + \frac{^{20}/_{3}}{1\ 000}$ etc.

Usando a divisão, temos:

$$\begin{array}{l|l} 2,0 & 3 \\ \hline \ \ 20 & 0,666 \\ \ \ \ \ 20 & \\ \ \ \ \ \ \ 2 & \end{array}$$

Conseqüentemente, a fração $^{2}/_{3}$ é um número decimal ilimitado, em que todos os algarismos são 6.

Escreve-se $^{2}/_{3} = 0,66\dot{6}$, com um ponto sôbre um dos 6, para expressar que 6 se reproduz indefinidamente. ("on dit aussi six récurrent").

b) Diz-se que $20 = 2 \times 7 + 6$ ou $^{20}/_{7} = 2$ resta 6.

Logo: $\frac{2}{7} = \frac{2 \times 10}{7 \times 10} = \frac{^{20}/_{7}}{10} = \frac{2}{10} + \frac{6}{70}$

ou $\frac{2}{7} = 0,2 + \frac{^{60}/_{7}}{100} = 0,2 + \frac{8}{100} + \frac{4}{700}$

$= 0,2 + 0,08 + \frac{^{40}/_{7}}{1\ 000} = 0,28 + \frac{5}{1\ 000} + \frac{^{50}/_{7}}{10000}$

ou $\frac{2}{7} = 0,285 + \frac{7}{10000} + \frac{^{10}/_{7}}{100000}$

$= 0,2857 + \frac{1}{100000} + \frac{^{30}/_{7}}{1000000}$

$= 0,28571 + \frac{4}{1000000} + \frac{^{20}/_{7}}{10000000}$

ou: $\frac{2}{7} = 0,285714/285714/$ etc... Xonseqüentemente, a fração $^{2}/_{7}$ é um número decimal ilimitado n'sta ordem depois da vírgula. Êsse grupo de 6 algarismos se chama o período da fração decimal.

Usando a divisão, temos:

$$\begin{array}{l|l} 2,0 & 7 \\ \hline \ \ 60 & 0,285714 \\ \ \ \ \ 40 & \\ \ \ \ \ \ \ 50 & \\ \ \ \ \ \ \ \ \ 10 & \\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 30 & \\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 2 & \end{array}$$

Quando se reencontra um algarismo q que já se obteve, diz-se que a divisão va vai se repetir.

c) $^{1}/_{6} = {}^{1}/_{2} \times {}^{1}/_{3} = {}^{0,333\dot{3}}/_{2} = {}^{1,66\dot{6}}/_{10} = 0,166\dot{6}$

ou $1/6 = {}^{5}/_{10} \times {}^{1}/_{3} = {}^{5}/_{10} \times 0,3\dot{3} = {}^{1,66\dot{6}}/_{10} = 0,166\dot{6}$

ou $^{1}/_{6} = {}^{1}/_{10} \times {}^{10}/_{6} = {}^{1}/_{10} \times \frac{1 \times 6 + 4}{6}$

$= {}^{1}/_{10}\left(1 + {}^{2}/_{3}\right) = {}^{1}/_{10}\left(1,66\dot{6}\right) = 0,166\dot{6}$

$^{5}/_{6} = 5 \times {}^{1}/_{6} = 5 \times 0,166\dot{6} = 0,833\dot{3}$

$$\begin{array}{l|l} 5,0 & 6 \\ \hline \ \ 20 & 0,83 \\ \ \ \ \ 2 & \end{array}$$

É óbvio que o procedimento mais fácil para converter qualquer fração ordinária em uma fração decimal é usando a divisão.

Mas não esqueçamos que êstes números são ilimitados, isto é, que realmente não existem frações decimais iguais às das categorias a e c, do número 23.

25. Na segunda parte do volume IV, aprendemos a multiplicar e dividir dois números, um pelo outro. Vamos agora, aprender a multiplicar e a dividir um por outro, não importam quais as potências de 10 e, seremos, então, capazes de efetuar qualquer multiplicação ou divisão de números decimais.

Potenciação

$$10 \times 10 = 10^2$$
$$100 \times 10 = 10^2 \times 10 = 10^3$$
$$1000 \times 10 = 10^3 \times 10 = 10^4$$
$$100 \times 100 = 10^2 \times 10^2 = 10^4$$
$$\frac{100}{10} = 100 \qquad \frac{10^2}{10} = 10$$
$$\frac{1000}{100} = 10 \qquad \frac{10^3}{10^2} = 10$$
$$\frac{10\ 000}{10} = 1000 \qquad \frac{10^4}{10} = 10^3$$
$$\frac{10\ 000}{100} = 100 \qquad \frac{10^4}{10^2} = 10^2$$
$$\frac{10\ 000}{1\ 000} = 10 \qquad \frac{10^4}{10^3} = 10$$

Se escrevermos $10 = 10^1$, podes expressar verbalmente como as potências de 10 se combinam para a multiplicação e como se combinam pqra a divisão?

Vejam se podem resolver as operações seguintes, uma vez colocadas sob forma de potência de 10:

1 000 000/100	100 000/1 000
10 000 000/10 000	100 000 000/1 000 000
1 000 x 100 000	100 x 10 000
10 x 100 000 000	100 000 x 100 000
10 x 1 000	1 000 x 1 000 x 1 000

E agora, multiplicar:

25,3 x 4,2 5,17 x 0, 25 4,61 x 10, 5

escrevendo primeiro, os números como inteiros e a potência de 10 pela qual êle foi dividido; dpois, multiplicando os dois números sem se ocupar da vírgula; enfim, colocando a vírgula no lugar conveniente na resposta.

Qual é o procedimento mais seguro e mais rápido?

Procura as respostas das seguintes divisões:

B

3,65 : 4,2 7,12 : 0,32 11,19 : 4,3

escrevendo primeiro os números como inteiros e a potência de 10 pela qual êle foi dividido; depois, dividindo os dois números sem usar a vírgula; enfim, colocando a vírgula no lugar convinіente na resposta.

Qual o procedimento que achas melhor?

Faze algumas multiplicações et algumas divisões de números decimais.

Na maioria dos casos , há um resto na divisão, pois, se sabe que isto contece muito freq"uenterente quando se divide.

26. Podes dizer quais são tôdas as vantagens que encontras no uso de números decimais em lugar de frações, quando se tem por trabalho?

1) uma longa série de adições?

2) uma subtração de duas frações complicadas?

Podes avaliar qual o procedimento mais rápido nos seguintes exemplos:

$^{71}/_{325} + {}^{32}/_{173} + {}^{219}/_{59}$ $^{1}/_{13} + {}^{1}/_{15} + {}^{1}/_{17}$

$^{314}/_{19} - {}^{451}/_{67}$ $^{2}/_{73} - {}^{3}/_{111}$.

As vantagens são igualmente grandes no caso das multiplicações e divisões de frações?

27. O problema da conversão de números decimais em frações ordinárias será estudado no livro IX.

Revisado por Westhalen
28/09/78
Lab. Matem.