Building Mathmatical Concepts
Marguerite Brydegaard.
and
Peter L. Spencer.

FRAÇÕES DECIMAIS

CONCEITOS DE NÚMEROS INTEIROS DÉCIMAIS QUE FUNDAMENTAM A COMPREENSÃO DOS NÚMEROS FRACIONÁRIOS DECIMAIS.

I. Osistema decimal de notação é baseado na idéia de uma série contínua de unidades agrupadas em sucessivas coleções de dezenas,dezenas de dezenas,dezenas de centenas,dezenas de milhares,etc. Os símbolos para representar os valores numerais nessas séries consistem nos 10 dígitos primários de 0 a 9.

2. A posição da unidade em um nùmero decimal é a "posição base",da qual derivam os valôres de tôdas as demais posições. Em relação ao valor posicional o lugar das unidades é o ponto de origem.

3. Cada espaço de número à esquerda do lugar das unidades representa um valor que é "dez vêzes maior" do que o representado pelo espaço à sua direita; cada espaço de número à direita representa um valor que é "dez vêzes menor" do que o valor representado à sua esquerda.

4. Apenas os têrmos que tem o mesmo valor posicional,podem ser somados ou subtraidos. (unidades são somadas com unidades,dezenas com dezenas e centenas com centenas). Entretanto é possível,e dá-se frequentemente, o reagrupamento de valores maiores com valores menores.

GENERALIZAÇÕES APLICADAS ÀS FRAÇÕES DECIMAIS

1. O "ponto decimal" (vírgula) é um dispositivo para indicar a colocação da posição das unidades.

2. O sistema decimal pode ser prolongado para a direita da posição das unidades depois do ponto decimal (vírgula) ter sido usado para localizar a posição das unidades. A direção posicional para esquerda expressa o valor da fração decimal. Os valores quantitativos estão baseados na divisão para seu significado.

Relações entre os nomes das posições

Milhares	Centenas	Dezenas	Unidades	Décimos	Centésimos	Milésimos
5	5	5	5	5	5	5

3. Movendo-se o ponto decimal (vírgula) estabelece-se uma nova posição das unidades e muda-se o valor posicional de todos os dígitos no número .

1º) 345

2º) 34.5 (dez vêzes menor que o 1º)

3º) 3.45 (cem vêzes menor que o 1º)

4. As comparações dos valores numéricos atuam nas ~~fr~~ frações decimais da mesma maneira como o fazem nos inteiros decimais .

(a) (b) (c) (d)
5 5 , 5 5

(a) 5 é dez vêzes maior em valor numérico do que (b) 5. 5(a) Êste é cem vêzes maior do que (c) 5 . E mil vêzes maior do ~~qu~~ que (d) 5 .

(d) 5 é dez vêzes menor que (c) 5 ; cem vêzes menor do que (b) 5 e mil vêzes menor do que (a) 5.

5. A interpretação do zero na expressãode valores de frações decimal é a mesma dos inteiros decimais.

EXPRESSÕES DE INTEIROS DECIMAIS

Pág. 161-162

3	30	300	3000
3000	300	30	3

Acrescentando-se um zero estabelece-se uma nova - posição das unidades e á expressão fica dez vêzes maior; retirando-se um zero fica dez vêzes menor .

EXPRESSÕES DE FRAÇÕES DECIMAIS

Pág. 162-163

.2 .02 .002

Antepondo-se um zero transforma-se o valor da expressão numérica.A posição da unidade na expressão .2 está a - esquerda do 2. Quando um zero é colodado entre o ponto decimal (vìrgula) e o 2 como ocorre na expressão .02 , o ponto decimal mostra que a posição das unidades está a esquerda do zero e o 2 está,então, na posição dos centésimos .02 é dez vêzes menor em valor numeral do que .2 . Quando dois zeros são colocados antes do 2 e o ponto decimal (vìrgula) colocado à esquerda dos zeros, o2 está então na posição dos milésimos

.2 .20 .200

Quando um zero é posposto os dígitos da expressão permanecem com o mesmo valor.

6. Só podem ser somados ou subtraidos têrmos que ~~t~~ tenham o mesmo valor posicional.

Êste conceito de operação com fração decimal é o mesmo usado com inteiros decimais.

LENDO E ESCREVENDO FRAÇÕES DECIMAIS E EXPRESSÕES DECI- - MAIS MISTAS

Idéias que fundamentam leitura e escrita de frações decimais e expressões decimais mistas:

a. A posição das unidades é a posição básica da qual derivam todos os valores numéricos.

b. O ponto decimal(vìrgula) localiza a posição das unidades .

c. A direção posicional para os inteiros decimais é para a esquerda da posição das unidades.

d. A direção posicional para as frações decimais é para a direita da posição das unidades.

As expressões de frações decimais são lidas como inteiros decimais e então tornadas tantas vêzes menor em valor numeral como são indicadas pela localização da posição das - unidades.

.425 é lido como 425 e então interpretado como milésimos. O ponto decimal(vìrgula) localiza a posição das unidades a esquerda do 4. A expressão é mil vêzes menor em valor - do que se fôsse um decimal inteiro.

Com as expressões de decimais mistos o inteiro decimal é lido e então a fração decimal precedida da palavra"e" também é lida. 124.5 é lido "cento e vinte quatro e cinco décimos." O "e" é essencial nessa leitura.

PRECISÃO DE MEDIDA

1. A precisão de uma medida depende:
   a. da finalidade da medida
   b. da precisão do instrumento usado
   c. da habilidade de quem mede
   d. da natureza da coisa medida

2. As medidas usadas nas operações de um problema deveriam ser dadas com o mesmo grau de precisão.

3. Quando os alunos são conduzidos a descobrir princípios referentes à medida, a determinação ,do grau de precisão e o arredondamento de medidas são uma parte lógica do seu pensamento.

√

CONCEITOS QUE FUNDAMENTAM ADIÇÃO E MULTIPLICAÇÃO

Pág. 165-169

1. Os conceitos que fundamentam adição e multiplicação de decimais inteiros, também fundamentam adição e multiplicação de frações decimais.

2. Os conceitos de relações parcela-soma e de - relações multiplicador-multiplicando-produto são básicos para a interpretação da adição e multiplicação de frações decimais.

3. A interpretação do ponto decimal(vírgula) e das expressões de fração decimal é fundamental para o trabalho com adição e multiplicação.

4. Combinando os conceitos supra citados e interpretando sua operação com a adição e multiplicação de frações decimais tem-se a chave para a compreensão desta unidade.

MULTIPLICANDO FRACIONÁRIO

Adição (a)	Adição (b)	Multiplicação (c)	Multiplicação (d)
5	.5	5	.5
5	.5	3	3
5	.5		
15	1.5	15	1.5

Note-se que na soma do exemplo (b) cada parcela foi tornada 10vêzes menor , consequentemente o produto também foi tornado 10 vêzes menor. Da mesma maneira na multiplicação do exemplo (d) , o multiplicando tendo sido tornado 10 vêzes menor o produto também o foi .

Generalização : Na multiplicação de frações decimais na qual há uma expressão de fração decimal no multiplicando, mas não no multiplicador, o ponto decimal (vírgula) no produto , vem diretamente abaixo do ponto decimal do multiplicando.

MULTIPLICADOR FRACIONÁRIO

(a)	(b)	(c)	(d)
5	5	5	5
1	x10	x100	x1000
5	50	500	5000

Generalização : Quando o multiplicando é constante , o produto varia diretamente com o multiplicador.

(a)	(b)
25	25
x 5	x.5
125	12.5

Os multiplicandos dos dois exemplos são os mesmos mas o multiplicador de exemplo (b) é 10 vêzes menor em valor numeral do que do exemplo (a). Desta forma o produto terá de s er 10 vêzes menor do que aquêle do exemplo (a). Nós podemos tornar 125 dez vêzes menor em valor numeral colocando um ponto decimal (vírgula) entre o 2 e o 5 no produto.(12.5 é 10 vêzes menor em valor numeral do que 125).

(a)	(b)
16	16
x 8	x.08
128	1.28

O processo do 2º exemplo é o mesmo, note-se, porém, que nesse caso o multiplicador sendo 100 vêzes menor o produto também terá de ser 100vêzes menor, contando - se assim duas casas para esquerda.

MULTIPLICANDO E MULTIPLICADOR FRACIONÁRIOS

(a)	(b)
3.5	3.5
5	.5
17.5	1.75

No exemplo (a) há um decimal misto sòmente no multiplicando. Por conseguinte o ponto decimal é colocado diretamente abaixo como no multiplicando. O exemplo está de acôrdo com a soma de decimais mistas.

Comparando o exemplo (b) com o (a), vemos que os multiplicandos são os mesmos. O multiplicador do exemplo (b) é 10 vêzes menor do que o exemplo (a). Desta forma o produto do exemplo (b) é 10 vêzes menor do que o do exemplo (a). 17.5 será tornado 10 vêzes menor movendo o ponto decimal (vírgula) uma casa para a esquerda.

SUBTRAÇÃO E DIVISÃO

Pág. 169-173

1. Os conceitos que fundamentam a subtração e divisão de inteiros decimais também fundamentam subtração e divisaõ de frações decimais.

2. Os conceitos das relações numerando- subtraendo-diferença e divisor- dividendo- quociente são básicos para a interpretação da subtração e divisaõ de frações decimais.

3. A interpretação do ponto decimal(vírgula) e de expressões de fração decimal é fundamental para a compreensão da sutração e divisão de frações decimais.

4. Combinando os conceitos supra citados e interpretando sua operação com subtração e divisão de frações decimais tem-se a chave para a compreensão desta unidade.

DIVIDENDO FRACIONÁRIO

(a)	(b)	(c)	(d)
$\begin{array}{r} 2 \\ 5\overline{)10} \end{array}$	$\begin{array}{r} 20 \\ 5\overline{)100} \end{array}$	$\begin{array}{r} 200 \\ 5\overline{)1000} \end{array}$	$\begin{array}{r} 2000 \\ 5\overline{)10000} \end{array}$

(a)	(b)
$\begin{array}{r} 31 \\ 3\overline{)93} \end{array}$	$\begin{array}{r} 3.1 \\ 3\overline{)9.3} \end{array}$

Generalização : Quando o divisor é constante o dividendo e o cociente variam da mesma maneira (em direta proporção ;se o dividendo aumenta o cociente aumenta, se o dividendo diminui o cociente diminui).

(a)	(b)
$\begin{array}{r} 5 \\ 5\overline{)25} \end{array}$	$\begin{array}{r} .05 \\ 5\overline{).25} \end{array}$

O divisor dos exemplos são constantes. O dividendo do exemplo (b) é 10 vêzes menor do que o de exemplo (a). Desta forma o cociente do exemplo (b) será 100 vêzes menor do que o outro.

Nós podemos tornar 5 cem vêzes menor colocando um zero e um ponto decimal (vírgula) (.05 é 100 vêzes menor do que 5 unidades).

DIVISOR FRACIONÁRIO E COCIENTE INTEIRO

$\begin{array}{r} 1 \\ 1000\overline{)1000} \end{array}$	$\begin{array}{r} 10 \\ 100\overline{)1000} \end{array}$	$\begin{array}{r} 100 \\ 10\overline{)1000} \end{array}$	$\begin{array}{r} 1000 \\ 1\overline{)1000} \end{array}$

(a)	(b)
$\begin{array}{r} 3 \\ 3\overline{)9} \end{array}$	$\begin{array}{r} 30. \\ .3\overline{)9} \end{array}$

Quando o dividendo é constante um aumento no divisor produz uma diminuição correspondente no cociente. E uma diminuição no divisor produz um aumento correspondente no cociente.

DIVIDENDO E DIVISOR FRACIONÁRIO

(a)	(b)
$\begin{array}{r} 5.1 \\ 5\overline{)25.5} \end{array}$	$\begin{array}{r} 51. \\ .5\overline{)25.5} \end{array}$
$\begin{array}{r} 6.2 \\ 4\overline{)24.8} \end{array}$	$\begin{array}{r} 620. \\ .04\overline{)24.8} \end{array}$

A interpretação dos exemplos acima envolve uma compreensão e combinação das duas generalizações precedentes.

No exemplo (a) o ponto decimal (vírgula)no cociente vem diretamente acima do dividendo desde queo divisor seja um número inteiro. O dividendo dos dois exemplos é o mesmo. No exemplo (b) o divisor é 10 vêzes menor do que no exemplo (a).Da mesma forma o cociente do exemplo (b) será 10 vêzes maior do que no exemplo (a) (5,1 x 10 = 51).O cociente do exemplo (b) é 51.

TÉCNICAS DE CÁLCULOS COM FRAÇÕES DECIMAIS

ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO

Pág. 176-180

A adição e subtração de frações decimais e expressões decimais mistas são governadas pelos mesmos princípios e processos usados com decimais inteiros:

1. Valor posicional é importantíssimo .
2. A posição das unidades é o guia para determinação do valor posicional.
3. O ponto decimal (vírgula) identifica a posição da unidade a qual está à esquerda próxima do ponto decimal (vírgula).
4. Cada um dos 10 dígitos primários é usado como um ocupante de lugar (placeholder). Conforme o lugar em que êle está escrito expressa o valor primário multiplicado pelo valor daquela posição.
5. Zero é usado para expressar a idéia de nenhum . Para dar um lugar correto entre os dígitos de uma expressão numeral,os zeros são escritos em cada posição entre os dígitos e o ponto decimal(vírgula) quando nenhum valor vai ser expresso nêsse lugar. Por Ex: cincoenta é escrito com 5 no lugar das dezenas, mas zero é usado para mostrar nada [nenhuma] no lugar das unidades.

Êste uso do zero é sempre um princípio poderoso para dificuldade na escrita dos números.

6. Sòmente têrmos semelhantes na posição por êles representada são somadas ou subtraidas.

Colunas arrumadas verticalmente, pela regra,são usadas como estímulo para as crianças observarem êste princípio.

```
  c d u        c d u        u . d c m      u . d c m
  3 4 5        7 9 8         . 3 4 5        . 7 9 8
+ 4 5 3      - 3 4 5       + . 4 5 3      - . 3 4 5
-------      -------       ---------      ---------
  7 9 8        4 5 3         . 7 9 8        . 4 5 3
```

```
   d u . d c      d u . d c      d u . d c      c d u
     3 . 4 5      8 3 . 2 5      7 9 . 8 0        2 5
+  7 9 . 8 0     - 3 . 4 5     - 7 5 . 7 5          4
-----------     ----------     -----------      1 0 6
       1 . 2 5    7 9 . 8 0        4 . 0 5        2 2
   1 2                                          +   8
   7                                            -----
-----------                                       2 5
   8 3 . 2 5                                    1 4
                                                -----
                                                1 6 5
```

TÉCNICAS DE CÁLCULOS

MULTIPLICAÇÃO

Pág. 180-182

Nas chamadas técnicas para multiplicação os seguintes princípios são usados :

1. Opere com frações decimais mistas como você operaria com inteiros decimais .

2. Na multiplicação o lugar das unidades no produto é o mesmo do lugar das unidades no multiplicando quando o multiplicador é um inteiro.

3. Quando o multiplicador contém uma fração decimal, o valor numeral do produto é reduzido consequentemente. Isto é demonstrado mudando o ponto decimal (vírgula) no produto tantas casas para esquerda da localização do ponto decimal no multiplicando quanto são os lugares da fração no multiplicador.

4. Algumas vêzes as idéias (2) e (3) determinam " point off " no produto, tantas casas decimais quantas foram as decimais fracionárias do multiplicando e multiplicador juntas.

```
d u
2 3  multiplicando
  4  multiplicador
---
9 2  produto
```

```
u . d
2 . 3  multiplicando dez vêzes menor
    4  multiplicador dez vêzes maior
-----
9 . 2  produto dez vêzes menor
```

```
d u
2 3
2 3
2 3
2 3
---
1 2
8
---
9 2
```

```
u . d
2 . 3     Parcela dez vêzes menor
2 . 3
2 . 3
2 . 3
-----
1 . 2     Soma dez vêzes menor em valor
8 .
-----
9 . 2
```

```
  d u
  2 3 multiplicando
  4 0 multiplicador
-----
9 2 0 produto
```

```
d u
2 3  multiplicando mesmo valor
  4  multiplicador dez vêzes menor em valor
---
9 2  produto dez vêzes menor em valor
```

```
  2 3  multiplicando mesmo valor
  . 4  multiplicador dez vêzes menor
-----
9 . 2  produto dez vêzes menor
```

```
   u . d c m             u . d c
     . 2 5               2 . 5
     . 4                 4
     . 1 0 6            10 . 6
     . 2 2                 . 2 2
  +  . 8              +    . 8
  -----------         -----------
   1 . 7 7 6             2 . 1 2
                        16
                      -----------
                        18 . 1 2
```

DIVISÃO COM FRAÇÕES DECIMAIS

Pág. 182- 184

1. Divisão com frações decimais é executada da mesma maneira como a divisão com decimais inteiros.

2. O valor posicional no dividendo determina o valor posicional no cociente quando o divisor é um inteiro . Ex: (a).

3. O valor numérico do cociente varia inversamente do valor numérico do divisor, isto mais em evidência quando o divisor contém uma fração decimal, embora, também aconteça com um divisor inteiro. Ex: (b)

4. O zero pode ser anteposto ou posposto, quando necessário. Ex: (c) e (d) .

5. O ponto decimal (vírgula) localiza a posição das unidades . Depois de ter sido localizada a posição das unidades a direção posicional caminha para esquerda da posição das unidades expressando valores de frações decimais. Movendo o ponto decimal (vírgula) estabilizo uma nova posição para unidades e mudo o valor posicional dos dígitos na expressão numérica.

Estas idéias são fundamentais para todo trabalho com frações decimais e decimais mistas.

(a)

$$\begin{array}{r} 2.3 \\ 4\,\overline{)\,9.2} \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{r} 23. \\ .4\,\overline{)\,9.3} \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{r} .04 \\ 4\,\overline{)\,.16} \end{array}$$

zero anteposto

(d)

$$\begin{array}{r} 50. \\ .6\,\overline{)\,30.0} \end{array}$$

zero posposto