Making Arithmetic Meaningful

(Tornando a Aritmética significativa)

Brueckner, Grossnickle

Capítulo 10

Ensinando números decimais fracionários (pag. 398)

O desenho à pag. 399 mostra os valôres relativos de 1, 0,1, 0,01 e 0,001. Nêsse capítulo serão discutidos os seguintes tópicos pertencentes aos números decimais fracionários:

a) A significação de frações decimais.
b) Adição e subtração de frações decimais.
c) Multiplicação de frações decimais.
d) Divisão de frações decimais.
e) A linguagem de por"cento."

a- A significação de números fracionários decimais.

O uso dos decimais.

As frações decimais aparecem em instrumentos tais como termômetros clínicos, micrômetros, réguas, velocímetros e fitas dos agrimensores, assim como em mapas e plantas. Jornais diários usam as decimais em suas páginas esportivas e financeiras. Esses são os usos familiares dos números decimais fracionários. A lista pode ser dilatada consideràvelmente. Muitos professôres usam fazer em suas classes arquivos de gravuras dos usos mais comuns das frações decimais. É uma valiosa atividade mostrar as aplicações sociais das frações decimais. As aplicações sociais representam, todavia, sòmente um dos tópicos essenciais de um programa para o ensino significativo na aritmética. O segundo fatôr é a fase matemática com a qual se acentuam as relações entre números inteiros, frações ordinárias e números decimais fracionários. Igualmente se os membros de uma classe fazem uma boa coleção dos usos sociais dos números decimais os alunos não aprendem prontamente as operações fundamentais com decimais até que se efetue a compreensão matemática.

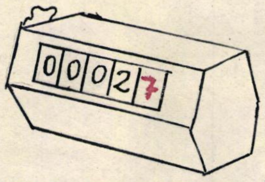
A notação decimal

Há dois caminhos pelos quais o professor pode introduzir a notação decimal. Os decimais podem ser introduzidos como uma forma especial de frações ordinárias, tendo denominadores 10, ou uma potência de 10; ou os decimais podem ser introduzidos como uma parte integrante de nosso sistema numérico decimal. Independente do processo usado o aluno deve ver a relação entre os dois caminhos de escrever uma fração.

Freqüentemente, os professôres usam nosso sistema monetário para introduzir o conceito decimal. Isso parece ser um procedimento lógico desde que nosso sistema monetário seja um sistema decimal. A quantia de ~~Cr~~$ 0,25 mostra o uso de um decimal, mas isso é um uso particular. Quando se pensa em ~~Cr~~$ 0,25 raramente se associa o número com 25 centésimos de um dólar, mas pensa-se como 25 centavos (um número inteiro) ou um quarto de dolar. Em nenhum caso êle relaciona essa quantia com nosso sistema monetário. Por essa razão o uso decimal da moeda não representa o meio mais satisfatório para introduzir as frações decimais.

Nas diferentes partes dêsse texto, ficou bem acentuado que o aluno deve ter alguma coisa para manipular em ordem, para que possa construir -

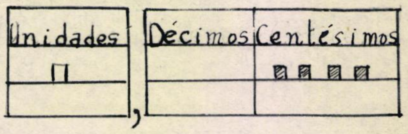
um conceito significante, digo, significativo. Um velocímetro de um automóvel, preferentemente um com um dial móvel ou uma régua graduada em pés, em décimos de um pé são excelentes instrumentos para usar como auxiliar na classe a compreender o significado matemático de umafração decimal. A princípio o velocímetro poderá ser colocado assim que o dial registrar zero em cada ponto do dial móvel. O aluno poderia girar o ponteiro para trás do instrumento. Esse ponteiro controla a rotação dos números que aprecem no dial. Êle descobrirá que quando o dial da extrema direita faz uma rotação completa o dial seguinte, o da esquerda, realiza um-décimo de uma volta. Assim depois da primeira rotação do dial para a direita, o número que aparecer será 10. Uma côr diferente distinguirá o número colocado no lugar dos décimos pelos desenhos para a esquerda de sua posição. O número indicado está escrito como 1,0 com significação de 1 inteiro e nenhum décimo. O número que aparece no dial à esquerda é 2,7. Essa quantia pode ser expressa pelas frações ordinárias como $2\frac{7}{10}$. Um quadro de pregas mostrando o lugar das unidades e o lugar dos décimos constitue o melhor meio de visualizar o significado de uma fração decimal. Para mostrar décimos, um aluno coloca um cartão ou marca na prega da direita. Cada marca representa um décimo. Com essa experiência com números inteiros, êle sabe que quando o envelope da direita contém 10 cartões êle precisa reagrupar êsses cartões. Êle faz um pacote de 10 décimos que é igual a um na casa das unidades.



De um modo ideal, os décimos seriam mostrados por tiras de cartões, 10 das quais são iguais a uma unidade de cartão, centésimos por delgados cartões $\frac{1}{10}$ de tiras, e milésimos tirando delgados 1/10 de finos cartões. É prontamente visto como é impraticável o manejo de cada pequeno material manipulativo. É recomendado, por essa razão, que sejam usados cartões do mesmo tamanho. Previne confusão, contudo, e é prudente usar cartões de diferentes côres para distinguir os decimais dos inteiros. Assim, cinza-claro, cinza escuro, e cartões pretos podem ser usados para representar as frações decimais e cartões brancos para representar os números inteiros.

Assim que um aluno coloca um cartão no "quadro de pregas", êle faria um registro escrito da experiência. Assim 1 décimo pode ser escrito ambos tanto 0,1 como 1/10. Da mesma maneira 10 décimos pode ser escrito tanto 1,0 como $\frac{10}{10}$. Depois que êle reagrupou os 10 décimos como uma unidade, êle colocaria outra marca nas pregas dos décimos. O número agora representado é uma unidade e o 1 décimo que é escrito então como um dos dois: tanto 1,1 ou 1.1/10. Igualmente, o aluno representaria outros números no quadro de pregas até que êle compreendesse a relação entre décimos e uns ou unidades.

Após, o professor usaria um quadro de pregas que têm pregas para representar unidades, décimos e centésimos. Agora o aluno seguiria o mesmo processo que usou antes. Descobriria de 10 centésimos faz um décimo. Depois dêle reagrupar marcadores de centésimos para décimos ou de décimos para unidades, ou na ordem inversa, êle estaria habilitado a ler e reproduzir números exibidos no quadro de pregas. Que números representam os cartões no desenho à direita? Nêsse caso o aluno verá e realmente compreenderá o significado do zero no número dado, 1,04. O zero mostra que não há décimos no número e zero também assegura a casa dos décimos, por conseguinte fazendo o 4 representar 4 centésimos. Depois que a classe realizou experiências significativas com materiais manipulativos e usuais, seria capaz de fazer as seguintes generalizações acêrca das frações decimais:



1. Uma casa para a direita da casa das unidades representa a casa dos décimos.

2. Duas casas para a direita da casa das unidades representam centésimos.

3. O denominador de uma fração decimal não é escrito, mas um denominador de uma fração ordinária equivalente é 10, 100 ou alguma potência de dez.

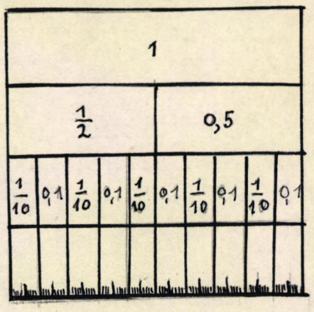
4. O número de zero no denominador das frações ordinárias é o mes

mo que o número de casas decimais quando a fração é escrita de forma decimal.

5. A vírgula decimal estabelece a casa das unidades.

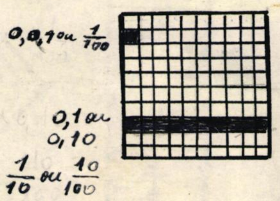
O uso de um disco circular ou diagramas divididos em décimos também auxilia o aluno a visualizar o que é um décimo.

A ilustração mostra como cartolina dividida decimalmente pode ser inserida entre os canais de um quadro de uma fração. Essas tiras mostram a equivalência de 1/2 e 0,5 e de 0,1 e 10 décimos ou 0,10. O professor pautaria uma secção do quadro negro em 100 partes iguais.



Êle pode levar o aluno a usar giz de diferentes côres para mostrar a quantia menor do que 1. Êle pode usar lápis azul para representar décimos e lápis vermelho para centésimos. Para indicar 12 centésimos ou 0,12 pintaria os 10 quadrados em uma linha ou coluna azul, e então êle pintaria os dois quadrados adjacentes de vermelho. A importância total é 0,1 ou 0,10 e o 0,02. O zero em 0,02 indica que não há dezenas. Nêsse caso zero tem a mesma função de um locatário (place holder) que há no número 20. Se uma classe não possuir um quadro de fração o professor poderá fazer um cartaz "aaktag" para mostrar as relações entre as diferentes unidades decimais.

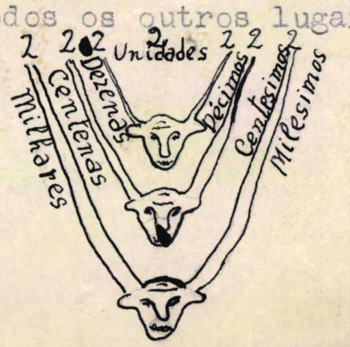
Quando o aluno compreende uma fração decimal mostra-nos uma régua graduada no quadro negro, nós sabemos que êle identifica a fração. Reproduz uma fração decimal representando-a em um papel graduado. A seguir poderá comparar duas frações decimais. Poderá mostrar pelo desenho que 0,3 é três-vezes 0,1 e que 0,3 é 0,2 maior do que 0,1. Igualmente poderá demonstrar que 0,15 é 0,05 maior do que 0,1 ou 0,10. Poderá também mostrar que 0,2 é 0,08 maior do que 0,12 porque 0,2 significa 0,20. Por êsse caminho êle compreende que para comparar decimais é preciso expressá-las na mesma unidade no momento em que se expressa a diferença entre as frações ordinárias na mesma unidade.



Cada aluno graduará um quadrado em 100 quadrados e então indicará alguma fração decimal expressando décimos ou centésimos. Conhecerá que em 1 inteiro há 10 décimos, escrevendo 1,0 ou cem centésimos, escrevendo 1,00 Igualmente será capaz de expressar algum número de décimos com centésimos. Em regra, para ser omtrabalho com frações decimais significativo é necessário que a classe seja capaz de reduzir uma fração decimal de uma unidade para a menor unidade, assim como décimos a centésimos, ou a milésimos e vice-versa.

Decimais, uma extensão do " Place Value"

Uma fração decimal não é matemàticamente significativa para os alunos até que êles descubram a relação entre casas à direita das unidades e as casas correspondentes para a esquerda da casa das unidades. A ilustração mostra a relação entre os casas correspondentes em cada lado das unidades. Assim, unidades é um lugar para a esquerda das unidades e centésimos é um lugar à direita das unidades. Há um arranjo simétrico de casas correspondentes providos como uma casa no número da escala é medido da esquerda para a direita das casas das unidades. Uma posição na escala do número é depois medido para a esquerda ou para a direita da vírgula decimal. Quando isto é feito o aluno se torna confuso porque não pode compreender porque a casa das dezenas é duas casas para a esquerda da vírgula, mas a casa dos décimos é sòmente uma casa à direita da vírgula. O fim da vírgula decimal é identificar a casa das unidades. A casa das unidades, então, é o ponto de referência com a qual outras posições na escala do número são identificadas. A casa das unidades é o coração do sistema de número. Todos os outros lugares contam-se a partir dêsse ponto de referência.



Escrevendo decimais por ditado

Há duas espécies de decimais, chamadas decimais puras, aquelas que têm um valôr menor do que 1, tal como 0,43, e decimais mistas, aquelas que têm um valôr igual ou maior do que 1, tal como 1,25. Êsses nomes correspondem às palavras próprias e impróprias ou mistas, como se usa com frações ordinárias. Muito tempo pode ser gasto escrevendo decimais puras e mistas quando a decimal contém quatro ou mais casas. A classe conheceria que décimos representam uma casa decimal, centésimos duas casas e milésimos três casas. Quando as frações decimais são limitadas e essas unidades pode-se encontrar alguma justificativa para que a classe as escreva sob forma de ditado.

Se a decimal é expressar em uma unidade menor do que milésimos, a classe não escreveria cada quantidade face uma exposição oral do "place value". Processos práticos não admitiriam escrever decimais sob ditado quando os números são dados em seu "place value". O uso prático de leitura do número 34,527 é "3- 4- vírgula - 5- 2- 7 ". A colocação da vírgula decimal é mostrada pela palavra "vírgula" e cada algarismo tem seu absoluto valôr. Um uso familiar é o valôr numérico de π no qual se lê assim:" 3- vírgula - 1- 4- 1- 6." Se o tempo consumido para escrever decimais por meio de ditado fôsse gasto em uma real providência de experiências com o uso de decimais, a classe teria conhecimento profundo para a significação das frações decimais.

Os processos de Adição e Subtração

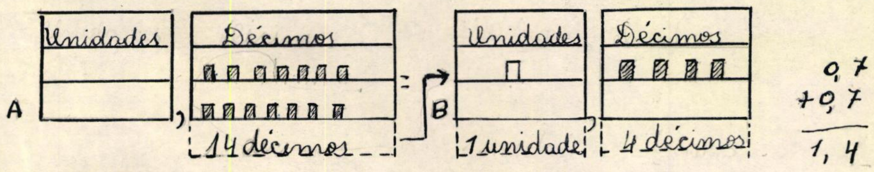
b) Somando e subtraindo decimais

Somar ou subtrair decimais não é mais difícil do que somar ou subtrair números inteiros. A diferença entre as operações com decimais e as com inteiros consiste na interpretação do resultado. Se a classe compreender a significação das decimais, não pode haver dúvida acêrca da correta colocação da vírgula. A transferência de computações com dinheiro é feita muito fàcilmente.

O seguinte problema pode ser usado para introduzir adição de frações decimais no qual é necessário reagrupar a soma:

A distância entre a casa de Tom para a escola é 0,7 milhas. Quanto é preciso caminhar indo e vindo da escola?

Os números podem ser representados em um "quadro de pregas" como mostra o desenho:



A soma das duas quantias é 14 décimos com um reagrupamento como 1 inteiro e 4 décimos representados 1,4 o número das milhas. A simbólica representação dos números é mostrada no diagrama acima.

O aluno seguinte verificaria o resultado usando as frações ordinárias. Finalmente êle verificaria o resultado pela aproximação. Êle sabe que 0,7 é mais do que um meio e menor do que 1; por isso a soma necessita ser maior do que 1 e menor do que 2. Portanto, 1,4 é uma resposta razoável.

Depois de somar um pequeno número decimal expresso como décimos e centésimos, o grupo faria as seguintes generalizações:

1- Tu somas decimais justamente como somas números inteiros.

2- Se os decimais são décimos, a soma é décimos, ou uma casa decimal; se as decimais são centésimos, a soma é centésimos ou duas casas decimais.

3- A soma de duas ou mais decimais também pode ser encontrada pelo uso das frações ordinárias.

A classe pode não compreender a significação do processo se o professor usar sòmente regras para dirigir a colocação da vírgula decimal. Muitos professôres simplesmente dizem a seus alunos para conservar a vírgula decimal na mesma coluna na qual é dada a razão do plano. Cada procedimento mecânico habilita a classe a encontrar respostas que podem ser corretas mas matemàticamente sem significação. A prática horizontal de adição reduz o uso de processos mecânicos.

A lista seguinte dá o comprimento de sete túneis na Pensilvânia Turnpike mostrando um uso social das decimais:

Nome do tunel	Comprimento em milhas
Laurel Hill	0,8
Alleghreny	1,1
Ray Hill	0,6
Lidelny Hill	1,3
Tuscarosa	1,0
Kittatinny	0,9
Blue Mountain	0,8

O professor usará aplicações sociais de decimais tais como essas para ver se os dados são significativos para o aluno. Seria capaz de estabelecer e verificar com marcas no quadro de pregas quanto cada distância difere de cada uma das outras. Êle estimaria a extensão total dos sete túneis começando pelas 7 milhas porque alguns dêles são ligeiramente maiores ou menores do que uma milha. Êle assim atualmente arredonda a extensão para a milha mais próxima. Além disso, êle conheceria o que o zero representa em cada quantia. A extensão do Laurel Hill Tunnel é dada como 0,8 milhas. O zero indica que não há número inteiro de milhas como é o caso do Allegheny Tunnel. O comprimento do Tuscarosa Tunnel é dado como 1,0 milha. O zero em 1,0 indica que o mais próximo décimo de uma milha, o comprimento é 10 décimos de milha ou 1,0 milha. Quando a classe pode operar com decimais por êsse caminho o trabalho é significativo e socialmente significante.

c) Multiplicação de decimais

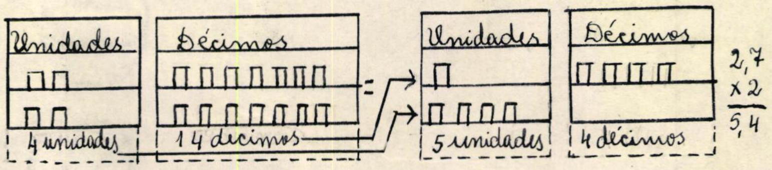
Há três espécies diferentes de exemplos de frações decimais exatamente como há nas frações ordinárias. Os três tipos são:

1. Multiplicando uma decimal por um inteiro.
2. Multiplicando um inteiro por uma decimal.
3. Multiplicando uma decimal por uma decimal.

Multiplicando um decimal por um inteiro

O professor pode usar na classe um quadro de pregas para objetivar a resposta em um exemplo que envolva multiplicação de um decimal por um nº inteiro. O seguinte problema pode ser usado para introduzir o processo:

Jack mora a 2,7 milhas da escola. Se êle dirige sua bicicleta para ir e vir da escola, que distância êle percorreu?



O diagrama mostra que a resposta é 5,4 milhas. Os 14 décimos obtidos pela multiplicação de 0,7 por 2 podem ser reagrupados como 1,4. O aluno encontraria a soma pela adição e prova que a resposta é 5,4 milhas. Finalmente êle verificaria a resposta pelo uso da aproximação. Êle pode ver que para ir e voltar necessita mais do que 4 milhas (2x2) e menos do que 6 milhas (2x3 milhas). Por conseguinte a resposta exata é 5,4 milhas e não 54 milhas. O aluno, dêsse modo, pode ser ensinado a usar o método intuitivo para encontrar o resultado. Êle também pode mostrar pelo uso das frações ordinárias que 2 x 2,7 é o mesmo que $2 \times 2\frac{7}{10} - \frac{54}{10}$ ou 5,4 o número de milhas.

Agora o professor teria de descobrir a razão matemática para a colocação da vírgula decimal no produto.

<u>Décimos são multiplicados por um número inteiro, assim o produto contém décimos, ou uma casa decimal.</u>

Da mesma maneira, a classe então aprenderia a multiplicar centésimos por um número inteiro ou um decimal de qualquer número de algarismo por um número inteiro. Os alunos podem agora generalizar as suas experiências - que o número de casas decimais no produto é igual ao número de casas decimais no número multiplicado. Frequentemente os professôres dão essa regra sem - mostrar sua significação matemática. Embora pôssa haver na classe alunos que usam a regra mecânicamente e conservam correta a resposta, o professor pode - encontrar um meio para tornar a operação significativa, assim isso pode ser um entendimento da base matemática da operação.

√ Multiplicando um número inteiro por um decimal.

Muitos alunos não percebem a diferença entre multiplicação de um - decimal por um número inteiro e a forma inversa. Assim 0,6x8 e 8x0,6 parece ser o mesmo, exceto para uma inteligência amadurecida. A ordem dos fatôres - não altera o produto: a x b = b x a. Portanto o exemplo 6x0,8 é o mesmo que o seu reverso exceto para o método de encontrar o produto. Como sempre o exemplo 6x0,8 significa encontrar a soma de seis 0,8 enquanto o exemplo 0,6 x 8 significa que 6 décimos de 8 é para ser encontrado, isto é, 8 foi dividido em 10 partes e 6 das partes resultantes são reunidas. Sómente a maioria dos alunos capazes estarão habilitados a sentir a estreita distinção entre as - duas formas relatadas.

Quando um aluno compreende que 3 x 0,5 é 15 décimos porque décimos são multiplicados por unidades, êle verá prontamente que 0,5 x 3 é 15 décimos. Êle pode ver que o produto em cada caso é décimos, expressado por meio de uma casa decimal. Por êsse meio êle pode generalizar que não faz diferença no resultado se o decimal é o número multiplicado ou o multiplicador. Êle também encontra que o produto contém o mesmo número de casas decimais se o próprio decimal é multiplicado ou se o decimal é usado como o multiplicador.

Uma prova indutiva pode ser usada para conduzir os alunos a descobrir que o produto obtido pela multiplicação de um número inteiro por um decimal, contém tantas casas decimais como o multiplicador. As séries retro mostram que cada produto sucessivo é um décimo maior do que o produto precedente.

30 x 4 = 120
3 x 4 = 12
0,3x 4 = 1,2
0,03 x 4 = 0,12
0,003 x 4 = 0,012

√ Multiplicando um decimal por um decimal

O seguinte problema pode ser usado para introduzir êsse passo:

Se um motorista percorre em média 15,5 por galão quantas milhas êle percorreria com 3,5 galões de gasolina.

Na solução dada à direita, a classe pode ver que, pelo uso da aproximação do resultado não pode ser 542,5 milhas desde que 3 x15 é 45. Por isso, a distância pode ser 54,25 milhas. O grupo pode verificar a resposta trabalhando o exemplo com frações ordinarias. Finalmente o aluno daria a razão matemática pela qual o produto contém duas casas decimais. O número multiplicado é expresso em décimos e o multiplicador é também expresso em décimos; por isso o produto será expresso em centésimos, desde que décimos vezes décimos é igual a centésimos. Ainda que centésimos requeiram duas casas decimais deve haver duas casas decimais no produto. Com umas pequenas ilustrações dessa espécie a classe pode chegar à seguinte regra ou generalização:

$$\begin{array}{r} 15,5 \\ \underline{3,5} \\ 775 \\ \underline{4650} \\ 54,25 \end{array}$$

Há tantas casas decimais no produto como há na soma do número de - casas decimais nos dois números multiplicados.

O aluno, muitas vezes, é surpreendido quando multiplica dois decimais puros para descobrir que o produto é menor do que qualquer dos dois fatôres. Ainda que estudantes do colégio (secundário) encontram essa dificuldade para compreender a validade de cada uma descoberta. Assim em cursos estatísticos, quando freqüentemente é necessário dominar uma decimal, tal como ,25, o estudante encontra dificuldade para reconciliar o produto com sua experiência na exatidão dos números inteiros. Se o mesmo exemplo é trabalhado com frações ordinárias, como $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$ o resultado parece razoável para êle.

Estranho pode parecer à maioria das pessoas melhor pensamento quantitativo - quando as importâncias fracionárias são expressas como frações ordinárias ao invés de decimais. Isso, indubitàvelmente é devido ao fato de que a significação da computação com decimais não foram salientadas quando os processos foram ensinados.

(operação abreviada?)

Um importante "Short-cut" em multiplicação

O leitor tem sido cauteloso para lecionar "short-cuts" escassamente. Um "cut short" em multiplicação que pode ser justificado é o método de multiplicar uma decimal por 10 ou uma potência de 10. É necessário saber como multiplicar por 10 ou uma potência de 10 em ordem para mudar a forma dos exemplos em divisão de decimais. Assim, multiplicando cada número por 10, nós mudamos 2,3)4,83 para 23)48,3 para solucionar o exemplo. Quando o divisor é um decimal o exemplo pode ser trocado para um exemplo em divisão por um número inteiro multiplicando ambos os números por sua potência de 10.

O aluno pode, primeiro, multiplicar uma decimal por uma potência de 10 na forma longa como é indicada. Êle usaria a forma longa até que seja capaz de descobrir a relação entre o produto e o número multiplicado. Então êle formularia a seguinte regra:

$$\begin{array}{r} 7,5 \\ \times\ 1,0 \\ \hline 75,0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3,24 \\ \times\ 100 \\ \hline 324,00 \end{array}$$

Multiplicar um decimal por 10, 100 e igual, movimentar-se a vírgula tantas casas para a direita como há zeros no multiplicador, anexando zeros se necessário.

Não sòmente pode o aluno conhecer como multiplicar por uma potência de 10, mas êle pode estar apto a encontrar a menor potência de 10 para usar como multiplicador para trocar um divisor decimal por um número inteiro. O divisor ~~39~~ 3,9 contém décimos; por isso êle veria que 10 é a menor potência de 10 que pode ser usada como multiplicador para tornar o divisor um número inteiro ou 39. No mesmo caminho 37 é 37 centésimos; por isso 100 é a menor potência de 10 que pode ser usada como multiplicador para tornar o produto um número inteiro. A classe deve ser capaz de multiplicar por qualquer potência de 10, movimentando a vírgula decimal no dividendo o número próprio de lugares para a direita.

d) Divisão de decimais

Análise do processo da divisão.

Divisão é o processo mais difícil para ser efetuado com decimais ao mesmo tempo que divisão é o processo mais difícil com inteiros. O processo é especialmente difícil com decimais porque o decimal pode se apresentar no divisor, ou dividendo, ou quociente ou em todos os três lugares. Há 4 tipos de exemplos na divisão de decimais:

São êles:

1- Um decimal dividido por um inteiro, como 2)1,4

2- Um inteiro dividido por um inteiro com um inteiro com uma decimal no quociente, como 2)1

3- Um inteiro dividido por uma decimal, como 0,3)6

4- Um decimal dividido por um decimal, como 0,5)1,8

Nêstes 4 tipos de exemplos é possível ter um decimal em seis diferentes posições, como as seguintes:

1. Em ambos, dividendo e quociente, como $\begin{array}{r} 2,3 \\ 2\overline{)4,6} \end{array}$
2. No quociente sòmente, como $\begin{array}{r} 0,75 \\ 4\overline{)3} \end{array}$
3. No divisor sòmente, como $\begin{array}{r} 2 \\ 1,5\overline{)3} \end{array}$
4. Em ambos divisor e dividendo, como $\begin{array}{r} 2 \\ 2,4\overline{)4,8} \end{array}$
5. Em ambos divisor e quociente, como $\begin{array}{r} 0,4 \\ 12,5\overline{)5} \end{array}$
6. No divisor, dividendo e quociente, como $\begin{array}{r} 0,3 \\ 2,5\overline{)0,75} \end{array}$

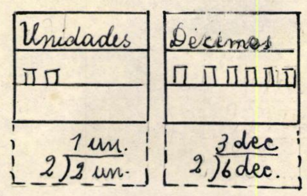
O número de lugares no qual se apresenta um decimal é reduzido de seis lugares para 2 lugares se ambos, divisor e dividendo são multiplicados pela mesma potência de 10 "para tornar" o divisor em todos os casos um número inteiro. Quando o divisor é um número inteiro, pode então haver um decimal no dividendo e quociente, ou no quociente sòmente. O leitor pode agora entender porque um deve ser capaz de multiplicar um decimal por qualquer potência de 10 para simplificar o processo da divisão.

Dividir uma decimal por um número inteiro é muito mais fácil do que dividir por um decimal. A dificuldade da aprendizagem para dividir com decimais é grandemente reduzida quando os divisores decimais são mudados para números inteiros.

DIVIDINDO UM DECIMAL POR UM INTEIRO

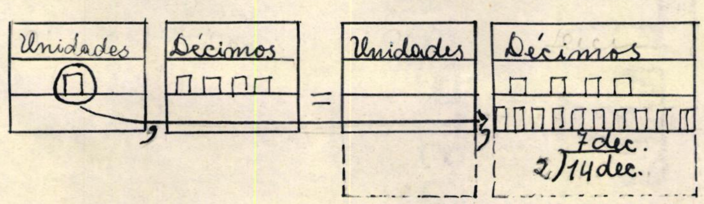
Quando uma decimal é dividido por um inteiro há um decimal em ambos dividendo e quociente. Este é o tipo de exemplo mais fácil na divisão de decimais. O aluno tem experiência com está espécie de decimal quando êle dividiu um número representando dólares e cents em um dado número de partes iguais. Nosso sistema monetário representa um uso particular de decimais porque êle é capaz de dividir dólares e cents. O uso de marcadores no quadro de pregas objetiva o processo. Este uso, mais uma representação visual do processo habilita o aluno a entender como dividir um decimal por um número inteiro. O diagrama que segue visualiza a divisão de uma decimal por dois. Os alunos objetivariam o processo usando material manipulativo e depois o estudo visualizado como êstes (Pag. 413) mostram. Finalmente êles explicariam o passo em modelos executados no livro texto, ou no quadro negro.

O diagrama A visualiza o exemplo 2 ⟌ 2,6; o diagrama B, o exemplo 2 ⟌ 1,4; o diagrama C, o exemplo 2 ⟌ 0,12 e o diagrama D o exemplo 2 ⟌ 0,5.



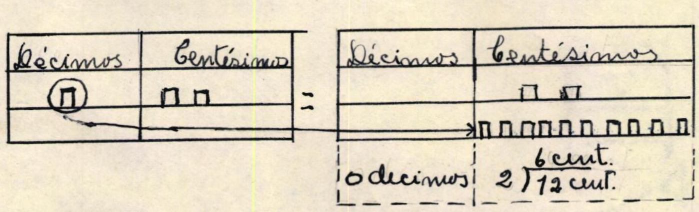
A

1,3
2)2,6



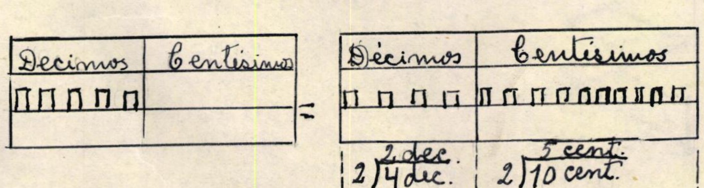
B

0,7
2)1,4



C

0,6
2)0,12



D

0,25
2)0,5 = 2)0,50
4
10
10

Em B, 1 unidade não pode ser dividida para manter sua identidade como uma unidade. Por conseguinte êle pode ser reagrupado como dez(10) décimos, fazendo um total de 14 décimos. Desde que 14 dentésimos são divididos em duas coleções iguais o quociente é décimos. Por isso a resposta é 7 décimos ou 0,7. Em C uma dezena não pode ser dividida como um décimo, assim êle pode ser reagrupado como dez centésimos, fazendo um total de 12 centésimos. A visualizaçao mostra que o quociente não contém décimos e 6 centésimos; por isso zero é escrito no lugar de décimos na resposta. A representação visual capacita o aluno a entender a razão para escrever o zero no quociente Quando os alunos não entendem o processo, os êrros resultantes do fracasso para escrever zeros no quociente em exèmplos semelhantes são frequentes. O diagrama D mostra porque nós reagrupamos 0,5 como 0,50 ou como 4 décimos e 10 centésimos antes dêle ser dividido em 2 partes iguais os passos nos algarismos são visualizados no quadro de pregas.

Nós vimos que o professor aceitaria a seguinte seguência de passos em ordem para estar certo de que o aluno pode entender como dividir um decimal por um numero inteiro: 1) Objetivar o processo pelo uso de materiais manipulativos; 2) fazer um cuidadosso estudo da vizualização do processo no livro texto e 3) explicar o passo envolvido no processo pelo uso de modelos trabalhados. Então a classe seria capaz de fazer a seguintes generalizações:

1. Se o número dividido contém décimos o quociente será décimos; se o numero dividido contém centésimos, o quociente será centésimos.
2. A virgula decimal no quociente está diretamente acima da virgula decimal no numero dividido.

Muitos professores dão à classe a segunda regra e desprezam a primeira generalização. O aluno então coloca a virgula no quociente sobre a virgula no dividendo, sem entender por que razão. Ele execta uma operação mecânica, sem significação. Se os quocientes figurados são localizados para mostrar o correto valor do lugar, o uso de uma regra mecânica produz a localização correta da vírgula. Quando o aluno mal um quociente figurado como na ilustração;

$$4\overline{)\,0{,}12}^{\;0{,}3} \qquad\qquad 4\overline{)\,0{,}12}^{\;0{,}3}$$

um processo mecânico não deu a correta localização do ponto. O aluno conheceria a significação da décimal 0,12, como mostra em C.

No exemplo do tipo $5\overline{)0{,}2}$ os dois décimos não podem ser divididos como décimos por 5; por conseguinte os décimos podem ser reagrupados como 20 centésimos; então o exemplo torna-se $5\overline{)0{,}20}$. O processo de reagrupamento pode ser objetivado com trabalhos no quadro de pregas ou visualizados semelhante ao diagrama D. Então o aluno entende porque o quociente é 4 centésimos ou 0,04. Se o processo é ensinado como um processo mecânico o professor é obrigado a dizer ao aluno que desde que 0,2 não pode ser dividido por 5, êle anexaria um zero à direita do 0,2, tornando o número 0,20, ou então divide e coloca a vírgula decimal na resposta diretamente sobre a vírgula decimal no número, dividido. No exemplo $5\overline{)0{,}15}$ êle pode escrever zeros antes do quociente figurado (simbólico) emquanto que no exemplo $5\overline{)0{,}2}$ êle pode escrever zero depois dos símbolos no dividendo. O processo total consiste na memorização de uma série de regras para fins manipulativos sem entendelas de um estudo sobre as espécies de erros que os estudantes nos VI-IX graus fizeram em um teste em divisão de décimais resultou um uso imperfeito do zero. Se os professôres fazem o processo da mudança de fração para decimal de uma forma significativa e insistem na importância do lugar valorizado, o aluno poderá entender a função do zero como um guardador de lugar nesses exemplos. Depois êle pode colocar a virgula decimal pelo uso de uma operação mecânica. Então êle estaria capacitado a verificar o resultado pelo uso da aproximação ou outro processo racional.

Dividindo dois inteiros com decimais no quociente.

Quando uma fração ordinária é transformada para uma decimal é nescessário dividir dois inteiros e o quociente é um decimal. Um dos dois meios para comparar dois números é dividir um pelo outro. O quociente dá a razão dos dois numeros. Um exemplo dessa espécie é usado na percentagem quando é nescessário encontrar que porcentagem um número é de outro. Esta razão pode ser um decimal puro ou um decimal misto, como:

$$4\overline{)\,2}^{\;0{,}5} \qquad 2\overline{)\,3}^{\;1{,}5} \qquad 3\overline{)\,4}^{\;1{,}33\frac{1}{3}}$$

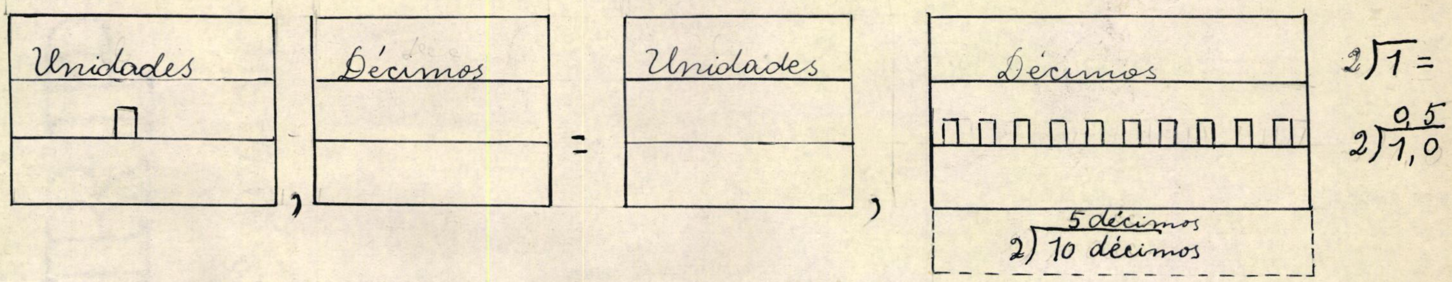
Usualmente o processo de transformar uma fração ordinária para seu valor decimal éinteiramente manipulativo.O professor dá à classe instruções acêrca do seguinte:"Desde que 1/2 significa 1 :2,dividir o numerador pelo denominador.Pôr uma virgula decimal depois do número no numerador,anexar um ou dois zeros,dividir e colocar a virgula no quociente sobre a virgula no dividendo." Um professor usando esta técnica,nao se surpreenderá quando o aluno esquecer alguns dos passos e der uma resposta absurda.

$\frac{1}{2} = 2\overline{)1,0}$ 0,5

Se um aluno usa materiais manipulativos importantes para descobri o processo,ou aprendê-lo pela vizualizaçao,êle não terá uma série de passos sem significaçao para memorizar.

Êle saberia que alguma fração ordinária,como 1/2,representa uma divisão indicada.Por conseguinte,é nescessário dividir o numerador pelo denominador para expresar a fração 1/2 em seu valor decimal.O diagrama A mostra como é possível transformar a fração meio (1/2)para 0,5.A visualização mostra que uma unidade não pode ser dividida como uma unidade total em 2 partes iguais,então a unidade é expressa como 10 décimos ou 1,0.Agora é possível dividir êste número em duas partes iguais.O quociente é 5 decimos ou 0,5.

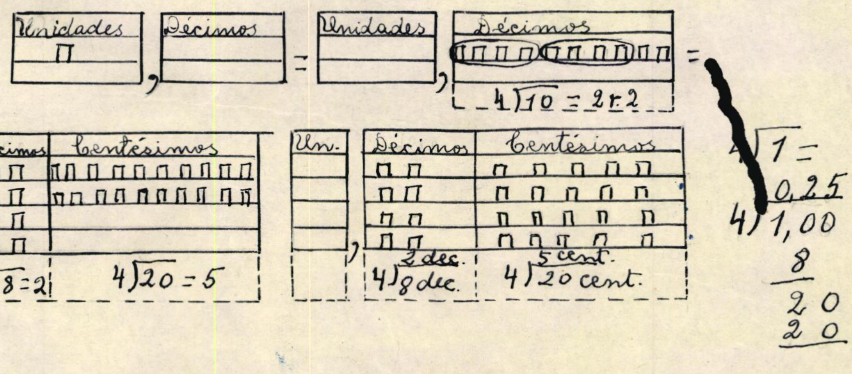
A



A representação simbólica ou o algarismo, de 1 ÷2 é mostrada à direita do diagrama A.

O diagrama B mostra como é possivel encontrar o valor decimal da fração 1/4.Desde que um não pode ser dividio como uma unidade inteira em 4 partes iguais é nescessário reagrupar o 1 como 10 décimos.Quando o aluno experimenta dividir 10 fichas que representam os 10 décimos em coleções iguais de 4 decimos inteiros em cada uma,ele descobre que há duas coleções semelhantes e que há duas fichas representando decimos restantes para serem divididos.Agora é nescessário reagrupar estes 2 decimos como 20 centésimos os quais podem ser divididos em 4 coleções iguais de 5 centésimos cada.Assim, o quociente é 2 decimos e 5 centésimos ou 0,25.Os passos são mostrados na representação visualizada abaixo.A representação simbolica ou "algarisma" é encontrada à direita do diagrama.Depois que o aluno têm operado a um profundo movel de abstração quando êle usa materiais manipulativos e representações visuais,êle progredirá ao movel onde divide totalmente com símbolos.Em outras palavras êle estaria preparado para executar o exêmplo e entender os passos envolvidos.

B



Quando uma fração ordinaria é transformada em decimal o resultado também pode ser um valor aproximado. O valor da fração 1/3 não pode ser expresso exatamente em forma decimal porque há sempre um resto de cada divisão Se uma fração dessa espécie é expressa em forma decimal é nescessario conhecer quantas casas decimais devem ser conservadas. O numero de casas não fixadas podem ser estabelecidas arbitràriamente. O numero de casas do quociente deveria ser transportado variando com a natureza do problema. Durante a aprendizagem inicial do trabalho, envolvendo transformações de ordinárias em decimais o resultado não precisa ser transportado para mais do que duas casas decimais para maior parte da ~~finalidade da~~ classe.

As seguintes situações mostram que o número de casas decimais a ser usado no quociente varia com a natureza do problema. Por exemplo, se um homem dirige seu carro 325 milhas e usa 19 galões de gazolina êle tira a média do comprimento da milha para o décimo mais próximo de uma milha que é 17,1 milhas por galão. Uma casa decimal é suficiente para indicar o grau de precissão nescessário. Em outra forma, uma ou duas casas decimais são inadequadas para mostrar o grau de precissão nescessário para expressar o comprimento em milhas por galão de gasolina sob condições de teste científico. Em um recente teste dado para encontar o numero de milhas por galão de gasolina usado por diferentes tipos de carros, ao percorrer uma certa distância, o carro vitorioso percorreu em média 25,4093 milhas por galão.

Quando o valor exato de uma fração ordinária não pode ser expresso em forma decimal é nescessário "arredondar". Se um decimal é expresso pelo centésimo mais próximo, o algarismo do quociente aparece em casa de milésimos e permite-nos arredondar o resultado mais proximo para 0,01, ou centésimos. Quando o algarismo do quociente em casas de milésimos é 5 ou mais, o número na segunda casa decimal é aumentado de 1; quando o número em casa de milésimos é menor que 5, o número na segunda casa decimal permanece o mesmo. Então, o decimal 0,425, para o próximo centésimo é 0,43, mas a decimal 0,423 para o proximo milêsimo é 0,42.

Dividindo um número inteiro por um decimal.

Dividir um numero inteiro por um decimal representa o tipo de exêmplo mais dificil em divisões de decimais. Em um teste dado 761 estudantes dos graus VI -IX, 14% de todos os erros são feitos em exêmplos nos quais 1 inteiro é dividido por 1 decimal. Uma análise de diferentes espécies de êrros mostrou que os êrros resultaram do uso de um processo manipulativo para encontrar a posição da virgula decimal no quociente. Quando ocorrer um êrro no exemplo no qual o divisor êra uma decimal e o dividendo um inteiro, como 0,3 6, o aluno usou um sinal (^) para indicar a mudança da vírgula no divisor. Por isso que, aparentemente, êle não teve um lugar deslocado para o qual mudou a vírgula no dividendo, êle frequentemente usou a espécie de operação manipulativa mostrada a direita, um processo sem significação. Esta é somente uma espécie de erro que foi constante e persistiu em todos os exemplos semelhantes no teste. Um estudo de 121 difetentes espécies de erros mostrou que todos êles eram esporádicos ou devidos ao acaso exeto aquêles resultantes da mudança incorreta da vírgula decimal. O uso incorreto de um divisor decimal abrange 50 por cento de todos os êrros na divisão de decimais.

$\boxed{0{,}3\overline{)6} = 0{,}3_{\wedge}\overline{)6_{\wedge}}^{\,2,}}$

Os 3 diferentes processos mais extensamente usados para encontrar a possição da vírgula decimal no quociente quando o divisor é um decimal são os seguintes:

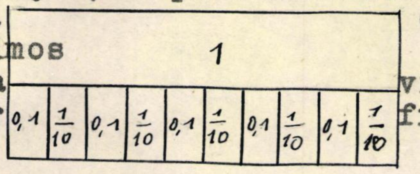
1) Mecânicamente movimenta a virgula tantas casas à direita no dividendo como no divisor pelo uso de sinais;
2) Tornar o divisor um número inteiro pela multiplicação de ambos os divisores e dividendos por uma potência de 10; e 3) Subtrair o número de casas decimais no divisor pelo número de casas no dividendo, neste terceiro processo nós aplicamos o principio subtrativo.

Aproximadamente dez artigos diferentes escritos acêrca do processo de colocação da virgula no quociente foram publicados em anos recentes em jornais profissionais. Cêrca da metade dêstes artigos tratam do principio subtrativo e os outros tratam do uso significativo do sinal. O ultimo uso implica que o aluno pode entender o principio da multiplicação e do divisor e dividendo por uma potência de 10. Em outro artigo, um dos autores valorizou os diferentes processos. O principio subtrativo representa um uso amadurecido, mais nem sempre aplicado prontamente. No exemplo $0{,}6\overline{)21}$, não há casas decimais no dividendo, mas há uma casa decimal no divisor; por conseguinte o principio subtrativo não pode ser aplicado até que uma casa decimal tenha sido anexada no dividendo. Então o exemplo torna-se 0,6 21,0.

Se o número de casas decimais em ambos os divisores e dividendos é o mesmo, não haverá casas decimais no quociente.

Divisão é o oposto da multiplicação. Em multiplicações decimais há muitas casas decimais no produto como há na soma de números de casas decimais nos números que foram multiplicados. Similarmente, na divisão, a soma de numeros de casas decimais no divisor e no quociente é igual ao número de casas decimais no dividendo. Segue-se que o numero de casas decimais no dividendo menos o número de casas decimais no divisor dá o número de casas decimais no quociente. Depois que o aluno entende como dividir com decimais, êle será introduzido no principio subrativo para enriquecer seu entendimento do processo. Este processo não deveria ser uzado quando se inicia o trabalho com divisão de decimais. O principio subtrativo e outros processos mais complexos poderiam ser uzados para encontar a posição da virgula decimal no quociente, para fins de enriquecimento e para levar o pensamento do aluno ao mais alto grau de abstração. Dos 3 processos dados acêrca do encontro da posição da virgula no quociênte, somente um pode ser visualizado, particularmente o processo no qual o divisor torna-se um numero inteiro, pela multiplicação de ambos, divisor e dividendo por uma potência de 10. Para a instrução inicial de um processo, o melhor é aquele que pode ser vizualizado. Não é possivel visualizar a divisão por um decimal a não ser que transforme o divisor em um número inteiro. Se o divisor é transformado emnumero inteiro, todos os exemplos em divisão de decimais tornam outra forma na qual uma decimal é dividida por um inteiro ou a forma na qual um inteiro é dividido por um inteiro. O leitor viu como estas duas formas podem ser visualizadas. Por conseguinte, o escritor recomenda que a instrução inicial na divisão por uma decimal, o divisor deve ser transformado em um numero inteiro, multiplicando-o por uma potência de 10. O dividendo então pode também ser multiplicado (dividido) pela mesma potência de 10.

Deixa-nos ver como introduzir divisão de um número inteiro por uma fração decimal usando um exemplo, tal como 0,2 ⟌ 1, como uma ilustração. O professor pode usar um cartão fração, na qual uma das tiras de cartolina é dividida em décimos como mostra. O aluno vê que em um inteiro há 5 coleções de 2 décimos cada. Esta representação é uma ilustração e não uma visualização; êle pode também encontrar a resposta por frações ordinarias, resolvendo o exemplo: $1 \div \frac{2}{10}$



O próximo passo é para apresentar o algarismo (representação simbólica). O aluno sabe que a resposta é 5. Se o exemplo 0,2 ⟌ 1 é mudado para 2 ⟌ 10, o quociente dêste exemplo maior é também 5. Por conseguinte, mudando o exemplo de 0,2 ⟌ 1 para 2 ⟌ 10 o valor do quociente não se altera.

Qualquer exemplo de divisão indicada, tal como 0,2 ⟌ 1, pode ser expressa como uma fração. Um dos dois principios básicos de frações determina que o numerador e denominador de uma fração podem ser multiplicados pelo mesmo número sem alterar o valor da fração. Quando aplicado para um exemplo em divisão, êste principio significa que ambos divisor e dividendo podem ser multiplicados pelo mesmo número sem alterar o valor do exemplo. O escritor verificou que a classe entende mais prontamente o princípio da multiplicação, aplicado a ambos divisor e dividendo, se o exemplo é escrito na forma de uma fração ordinária. Então o aluno multiplica ambos os têrmos da fração por aquela potência de 10 que tornará o denominador um número inteiro. Assim, o exemplo 0,2 ⟌ 1 pode ser escrito como $\frac{1}{0{,}2}$. O denominador contém uma casa decimal; por conseguinte, o denominador pode ser transformado em um inteiro pela multiplicação por 10. Naturalmente o numerador da fração deve também ser multiplicado por 10. A solução é $\frac{10}{10} \times \frac{1}{0{,}2} = \frac{10}{2}$ ou 2 ⟌ 10

Agora o aluno pode ver a razão de trocar o divisor de um decimal para um número inteiro. Depois de executar exemplos similares e verificar os quocientes por diferentes processos, a classe poderá fazer as seguintes generalizações, as quais se aplicam para dividir um número inteiro por uma decimal;

1) Se o divisor contém uma casa decimal, multiplicar ambos divisor e dividendo por 10; Se o divisor contêm duas casas decimais multiplicar ambos divisor e dividendo por 100. Este processo torna o divisor um número inteiro.
2) Quando o divisor é um número inteiro, o quociente contém o mesmo número de casas decimais do dividendo.

DIVINDO UM DECIMAL POR UM DECIMAL.

Quando a classe aprende a dividir um numero inteiro por um decimal,os alunos também aprendem os passos essenciais na divisão de um decimal por um decimal.O estudo de erros citados acêrca disto,mostrou que muitos mais erros são feitos quando os alunos dividem um inteiro por um decimal do que quando êles dividem um decimal por um decimal,A maioria dos estudantes testados na investigação encontraram a posição da virgula decimal no quociente deslocando a virgula nos numeros que foram divididos de uma maneira mecânica.Por tanto se vê porque há mais êrros em encontrar a possição da vírgula no quociente 0,4) 12 do que no exêmplo 0,4) 0,12.No segundo exêmplo,o aluno têm um ponto de partida para deslocar a virgula uma casa em ambos divisor e dividendo.No primeiro exemplo,não há decimal no dividendo; por isso o aluno confundiu-se acêrca do ponto de partida do qual deslocar a virgula.Sob tal condição,êle,muitas vezes muda uma vírgula imaginaria no dividendo,fazendo o erro mostrado abaixo:

(1) 0,4) 12 (2) 0,4) 12 (3) 0,4) 12

No exêmplo 0,4) 0,12,um lugar de partida para deslocar é dado; desde que ambos os números contenham decimais;esta espécie de exêmplo adaptou-se bem para solução por uma operação puramente mecânica,conforme uma regra.Ela foi raramente executada incorretamente no estudo atual.

Para dividir um decimal por um decimal,o aluno usará o mesmo processo que usa para dividir um número inteiro por um decimal.Ele sempre dedeverá tornar o divisor um número inteiro em ambos as espécies de exêmplos pela multiplicação de ambos divisor e dividendo pela mesma potência de 10; êle deveria principiar o trabalho com cada um dêstes tipos de exêmplo com materiais objetivos ou visuais.Êle verificaria o resultado por aproximação.

A solução do exemplo 2,5) 4,75 é dada a direita.O aluno sabe que a resposta é razoavel, porque 4 : 2 é igual 2. O quociente 1,9 é uma aproximação contida em 2;por conseguinte, a resposta provável é correta. Este não é um caminho para evitar erros absurdos em divisão de decimais; o aluno sòmente aprende a aproximar a resposta.Não sòmente é a aproximação um meio de conseguir maior precisão mas também indica uso inteligente do número.

2,5) 4,75
1,9
25) 47,5
25
22 5
22 5

É importante para a classe entender o principio matemático envolvido no deslocamento da virgula em ambos divisor e dividendo.Em um estudo de treino profissional de 322 professores,Robimson encontrou que 70% deles não conheciam que principio fundamental (era ilustrado pelo passo)mudando a forma do exêmplo

0,6) $ 22,44 para 6) $ 254,40

Muito provàvelmente êstes estudantes aprenderam a deslocar a vírgula mecanicamente,mas êles nunca aprenderam ou descobriram o princípio matemático envolvido.Quando há um estudante não foi ensinado a significação do processo aritmético usado,êle aprendeu como executar uma série de operações mecânicas mas êle não penetrou dentro da estrutura do sistema numérico ou das leis basicas que governam seus usos.Além disso êle esqueceu a regra pela manipulação mecânica;êle não tem base para executar o probelma por si mesmo

DIFERENCIANDO O PROGRAMA NA DIVISÃO DE DECIMAIS.

Na pag.362 os autores recomendaram que o currículo em fração ordinaria fosse modificado para o aluno de aprendizagem lenta (Slow Learwing). Uma recomendação similar pode ser feita para decimais. As aplicações sociais das divisão de fração são limitadas. Por esta razão, os autores recomendam que o programa para o aluno de aprendizagem lenta não incluirá exemplos desta espécie. O programa em divisão de decimais para o grupo de aprendizagem lenta deveria da mesma forma ser limitado. Todos podem solucionar problemas reais nos quais é necessários dividir números representando dolares e cents por um inteiro. Esta é uma operação facil para executar e pode se tornar significativa. Poucas pessoas necessitam saber como dividir por um decimal. Aquelas de um baixo nível de habilidade, provàvelmente nunca dividem por decimais. Quando o divisor é um decimal, o processo é dificil para entender e a não ser que cuidadosamente ensinada, operação é mecânica e sem sentido. É por conseguinte, recomendado que a divisão de decimai seja limitada à divisão de um decimal por um número inteiro para o grupo cujo desenvolvimento em aritmética é lento. Se esta é dada, o tempo que é gasto na aprendizagem dos processos da divisão por um decimal pode ser usado com melhor vantagem para enriquecer o conceito decimal com materiais concretos, objetivos usados em situações sociais, e para praticar mais importantes processos. Um dos melhores meios para realizar êste fim é suprimir do currículo os processos difíceis que têm uma limitada ordem de aplicação social tal como divisão de fração por fração ou decimal por decimal.

FIM