("Travaux Pratiques de Matthematique.")

Série II Relações — Um exemplo de conjunto-quociente: $\mathbb{Q}^+$

Ficha 22 pág. 37

Esta ficha é bastante difícil.

1. Eis uma relação de equivalência que vocês têm encontrado muitas vezes desde a idade de 10 anos, mas que não tem talvez sido apresentada a vocês sob esta forma. Sobre este exemplo "clássico" vocês ensaiarão tomar consciência uma vez sobre o interesse de separar a noção de relação de equivalência e do papel do conjunto-quociente.

2. Considerem uma torta. Comendo os $\frac{2}{5}$, ou os $\frac{4}{10}$, isto retorna ao mesmo, é "equivalente". Diz-se que as frações $\frac{2}{5}$ e $\frac{4}{10}$ são "equivalentes". Elas não são "iguais", se a gente precisa bem que uma fração é um par [ver (I,24)] de naturais.
Encontrem frações equivalentes a $\frac{7}{2}$, a $\frac{40}{8}$, a $\frac{15}{27}$.
A relação $\mathcal{T}$ no conjunto das frações: "... é equivalente a ..." (isto é "... corresponde à mesma quantidade de torta que ...") é uma relação de equivalência (o que justifica o emprego do adjetivo "equivalente"): mostrem.

3. A classe de equivalência da fração $\frac{2}{5}$ é o conjunto: $\left\{\frac{2}{5}, \frac{4}{10}, \frac{14}{35}, \frac{8}{20}, \dots\right\}$. Ela se anota: $\left[\frac{2}{5}\right]$. É um número racional, ou racional.

Como se anota a classe da fração $\frac{4}{10}$?

Porque se pode escrever: $\left[\frac{2}{5}\right] = \left[\frac{4}{10}\right]$?

Na prática, esta igualdade se escreve abusivamente:

$$\frac{2}{5} = \frac{4}{10}.$$

visto que as frações $\frac{2}{5}$ e $\frac{4}{10}$ não são iguais, mas são apenas equivalentes.

Eis um outro racional: $\left\{\frac{3}{6}, \frac{1}{2}, \frac{20}{40}, \frac{n}{2n}, \frac{37}{74}, \ldots\right\}$

(n sendo um natural não nulo). Escrevam sob a forma de classe, de vários modos.

4. Tomem uma fração: multipliquem por 3 seu numerador e seu denominador, a fração mudou? O racional correspondente mudou?
As mesmas questões substituindo 3 por um natural não nulo qualquer.