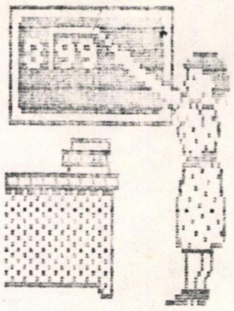
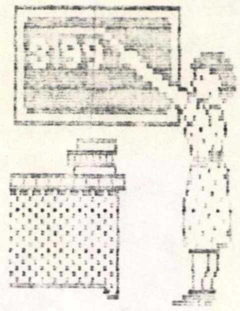
NEUZA MAIA





— POLÍGRAFO PARA CORREÇÕES —

Segunda parte:

Teoria de Conjuntos

TRABALHANDO COM CONJUNTOS

Uma coleção de objetos ou símbolos é um conjunto.
Exemplos: um time de futebol é um conjunto de jogadores.
as letras a,e,i,o,u, formam um conjunto de vogais.

Representamos um conjunto por letras maiúsculas do nosso alfabeto: A, B, C, ...

Para relacionarmos um elemento com um conjunto usamos os símbolos $\in$ (pertence) ou $\notin$ (não pertence).

Exemplos: $4 \in \{1,2,3,4\}$
$a \in \{a,e,i,o,u\}$
$z \notin \{1,4,5\}$

Assim estabelecemos uma <u>relação de pertinência</u> entre os <u>elementos</u> dos conjuntos e os <u>conjuntos</u>.

Podemos determinar um conjunto de três maneiras:

<u>EXTENSÃO</u> : escrevemos todos os elementos do conjunto entre chaves.
Exemplos: $A = \{a,e,i,o,u\}$
$B = \{1,3,5,7,9,...\}$

<u>COMPREENSÃO</u> : escrevemos uma propriedade característica de seus elementos.
Exemplo: $A = \{x \mid x \text{ é vogal}\}$
$B = \{x \mid x \text{ é número ímpar}\}$

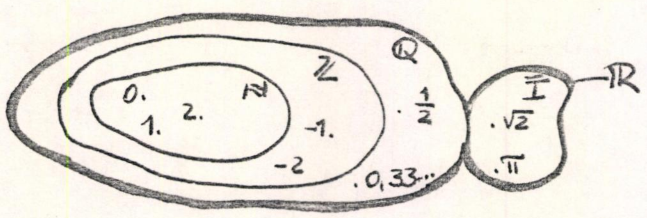
<u>DIAGRAMA</u> :

<u>CONJUNTO UNIVERSO</u> : é o conjunto ao qual pertencem todos os elementos que estamos trabalhando. Notação: $\mathcal{U}$

<u>CONJUNTO VAZIO</u> : é o conjunto que não tem elementos.
Notação: $\{\ \}$ ou ϕ

<u>CONJUNTO UNITÁRIO</u> : é o conjunto que tem somente um elemento.
Exemplos : $\{a\}$; $\{0\}$; $\{\phi\}$

CONJUNTOS NUMÉRICOS :

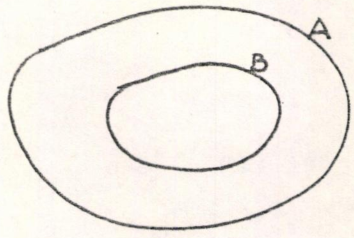


SUBCONJUNTOS

Sejam os conjuntos $A = \{2,3,5,7\}$ e $B = \{2,5\}$

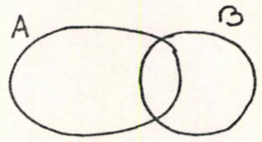
Observamos que os elementos do conjunto B são elementos do conjunto A. Dizemos que o conjunto B <u>está contido</u> no conjunto A, isto é, $B \subset A$ ou que o conjunto A <u>contém</u> o conjunto B, isto é, $A \supset B$.

Num diagrama temos:



$B \subset A$ ou $A \supset B$

Se ao menos um elemento do conjunto B não pertencer ao conjunto A, dizemos que o conjunto B <u>não está contido</u> em A, isto é, $B \not\subset A$ ou que o conjunto A <u>não contém</u> o conjunto B, isto é, $A \not\supset B$.
Num diagrama temos:



$B \not\subset A$ ou $A \not\supset B$

Definição:
Um conjunto B é <u>subconjunto</u> de um conjunto A se e somente se B está contido em A, isto é $B \subset A$.

<u>Observações</u>:
a) O conjunto vazio está contido em qualquer conjunto.
b) Todo o conjunto está contido em si mesmo.
c) Os símbolos $\subset$, $\supset$, $\not\subset$, $\not\supset$ são usados para relacionar um conjunto com outro conjunto.

EXERCÍCIOS

1. Determina por extensão os conjuntos:
   a) $A = \{x \,/\, x$ é número par maior que $20\}$
   b) $B = \{x \,/\, x$ é letra da palavra "cama"$\}$
   c) $C = \{x \,/\, x$ ímpar compreendido entre 6 e $12\}$
   d) $D = \{x \,/\, x$ é mês do ano que começa com a letra $M\}$

2. Detremina por compreensão os conjuntos:
   a) $A = \{m, e, s, a\}$
   b) $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
   c) $C = \{12, 14, 16, 18, ...\}$
   d) $D = \{5, 7, 9, 11, 13\}$

3. Sendo $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ é múltiplo de $5\}$
   $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ é múltiplo de $10\}$
   determina os conjuntos abaixo, por compreensão:
   a) $C = \{0, 5, 10, 15, 20, 25, 30\}$
   b) $D = \{0, 10, 20, 30, 40, 50\ 60, 70\}$
   c) $E = \{5, 15, 25, 35, 45, 55, ...\}$

4. Sendo $M = \{1, 2, 3, 4, 8, 9\}$, $T = \{4, 3, 5\}$ e $S = \{4, 8, 3, 1\}$, dá o valor lógico de cada afirmação abaixo.
   ( ) $M \supset S$ ( ) $T \subset M$ ( ) $M \not\subset T$
   ( ) $S \not\subset T$ ( ) $S \subset M$ ( ) $T \supset S$

5. Constrói um diagrama que representa a situação abaixo, para os conjuntos A, B, C, D não vazios.
   $B \subset A$, $C \not\subset A$, $B \neq C$, $D \subset B$, $D \subset C$

6. Dá o valor lógico de cada proposição

( ) $5 \in \{4,5,6\}$

( ) $0 \notin \{3,4,0\}$

( ) $\{a\} \subset \{a,b,c\}$

( ) $\{a\} \supset \{a,b,d\}$

(√) $\{2\} \notin \{1,7,2\}$

( ) $2 \notin \{1,7,2\}$

( ) $\{4, 5\} \supset \{5,4\}$

( ) $\{3,8,1\} \supset \{2\}$

( ) $7 \notin \{7,0,2,5,6\}$

( ) $\{a,b\} \supset \emptyset$

( ) $\{\ \} \supset \{4,6\}$

(F) $\{3\} \in \{1,2,\{3\}\}$

7. Sejam os conjuntos

$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 9 \wedge x > 0\}$
$C = \{x \mid x^2 - 8x + 15 = 0\}$
$D = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 5\}$

Completa as sentenças abaixo com um dos símbolos $\subset$, $\supset$, ou $=$

A.......B B.......C B.......D

A.......D C.......A C.......D

8. Sejam $A = \{x,y,z\}$ e $B = \{x\}$

a) escreve com símbolos da teoria de conjuntos, as sentenças

x é um elemento do conjunto A ....

y não é elemento de B ....

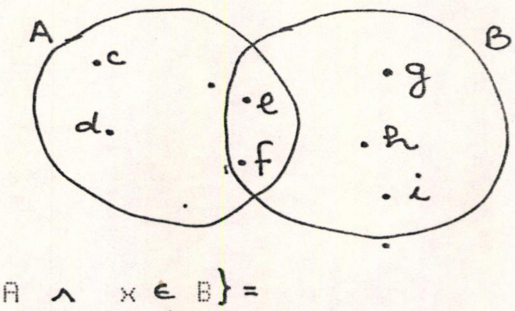
B é subconjunto de A ....

x pertence a B ....

A contém B ....

b) classifica as sentenças acima em V ou F.

9. Observa os diagramas e determina os conjuntos por extensão.



a) $\{x \mid x \in A \wedge x \in B\} =$
b) $\{x \mid x \in B \wedge x \notin A\} =$
c) $\{x \mid x \notin A \wedge x \notin B\} =$
d) $\{x \mid x \in A \wedge x \notin B\} =$
e) $\{x \mid x \in A \vee x \in B\} =$

EXERCITANDO	Respostas:
1. Completa: a) O conjunto C das vogais C= $\{\quad\}$ b) Conjunto dos nº pares maiores que 1 e menores que 6 c) Conjunto F dos nº primos menores que 9 F=	a) $\{a,e,i,o,u\}$ b) $\{2,4\}$ c) $\{2,3,5,7\}$
2. Observa o conjunto $A = \{2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Completa usando $\in$ ou $\notin$. a) 2....A b) 3....A c) 10....A d) 6....A	$\in, \in, \notin, \in$
3. Escreve por extensão o conjunto $A = \{x \in N \mid x$ é par maior que $3\}$. $A = \{\quad\}$	$\{4,6,8,10\}$
4. Escreve por compreensão o conjunto $B = \{1,3,5,7,9\}$. $B = \{\quad\}$	$\{x \mid x$ é ímpar e $x \leq 9\}$
5. Representa por extensão o conjunto $A = \{x \mid x$ é par e ímpar$\}$. $A = \{\quad\}$	$\{\ \}$ ou $\emptyset$
6. Representa por extensão o conjunto $A = \{x \mid x$ é par e primo$\}$. $A = \{\quad\}$	$\{2\}$
7. Completa usando os símbolos $\subset$, $\supset$, $\not\subset$ ou $\not\supset$. a) $\{a,e,b\}$ .... $\{a,e,i,b,c\}$ e) $\{a,b\}$ .... $\{b,a,c\}$ b) $\{b,c\}$ .... $\{a,e,i,b,c\}$ f) $\{a,e,i,c\}$ .... $\{a,e\}$ c) $\{a,b,e,i,c\}$ .... $\{i,a\}$ g) $\{m,n,i\}$ .... $\{a,b,i\}$ d) $\{m,n,a\}$ .... $\{a,e,i,o,u\}$ h) $\{i,e\}$ .... $\{a,b,c,e,i\}$	$\subset$ $\subset$ $\subset$ $\supset$ $\supset$ $\not\subset$ $\not\subset$ $\subset$
8. Sendo $M = \{1,2,3;4,8,9,\}$, $T = \{4;3,5\}$ e $S = \{4,8,3,1\}$ assinala com V ou F. ( ) $M \not\supset S$ ( ) $T \subset S$ ( ) $M \supset S$ ( ) $S \subset T$ ( ) $M \supset T$ ( ) $T \not\supset M$	F F V F F V
9. Completa com V ou F ( ) $6 \in \{4,5,6\}$ ( ) $\{12\} \not\subset \{4,7,12\}$ ( ) $9 \notin \{9,0,16\}$ ( ) $10 \notin \{13,14,10\}$ ( ) $\{4\} \notin \{11,7,\{4\}\}$ ( ) $\{a,b\} \supset \emptyset$	V F F F F V
10. Escreve por extensão a) O conjunto dos números pares menores que 9. b) $\{x \in N \mid x \leq 6\}$ c) $\{x \in Z \mid x < 3\}$	a) $\{0,2,4,6,8\}$ b) $\{0,1,2,3,4,5\}$ c) $\{2,1,0,-1,\dots\}$
11. Escreve por compreensão a) $\{0,4,8,12,16,20,\dots\}$ b) $\{2,3,5,7,11,13,\dots\}$	a) $\{x \in N / x$ é múltiplo de $4\}$ b) $\{x \mid x$ é primo$\}$

CONJUNTOS DAS PARTES

1. Dado $A = \{1,2,3\}$, completa:

   a) O conjunto sem elementos contido em A é ______________

   b) Os conjuntos unitários contidos em A são ______________

   c) Os conjuntos binários contidos em A são ______________

   d) Os conjuntos com 3 elementos contidos em A são ______________

   e) Os conjuntos com mais de 3 elementos contidos em A ______________

   f) O conjunto de TODOS os subconjuntos de A é:

   ____

> O conjunto representado no ítem f acima, é chamado de CONJUNTO DAS PARTES DE A e representado por $\mathcal{P}(A)$.

2. Sendo $B = \{x,y\}$, determina o conjunto das partes de B.

   $\mathcal{P}(B) =$

3. Sendo $C = \{a, b, c, d\}$

   a) determina o conjunto das partes de C.

   b) Completa com $\in$ ou $\subset$ ou $\supset$
   $\notin$ ou $\not\subset$ ou $\not\supset$

a ____ C	$\emptyset$ ____ C	$\{b\}$ ____ $\mathcal{P}(C)$
$\{a\}$ ____ C	$\emptyset$ ____ $\mathcal{P}(C)$	$\{\{b\}\}$ ____ $\mathcal{P}(C)$
$\{a\}$ ____ $\mathcal{P}(C)$	$\{\emptyset\}$ ____ $\mathcal{P}(C)$	$\{\{c\}\}$ ____ $\mathcal{P}(C)$
$\{a,b\}$ ____ $\mathcal{P}(C)$	h ____ $\mathcal{P}(C)$	C ____ $\mathcal{P}(C)$
$\{a,e\}$ ____ $\mathcal{P}(C)$	C ____ $\{b,d\}$	$\mathcal{P}(C)$ ____ $\{\{a\},\{c\},\{d\}\}$

4. Sabendo que D é um ~~sub~~conjunto qualquer não vazio, dizer quais das sentenças são verdadeiras:

   a) $D \in \mathcal{P}(D)$ c) $\{D\} \subset \mathcal{P}(D)$ e) $\emptyset \in \mathcal{P}(D)$

   b) $D \subset \mathcal{P}(D)$ d) $\{D\} \in \mathcal{P}(D)$ f) $\emptyset \subset \mathcal{P}(D)$

Observação: Se o conjunto A tem n elementos, então o conjunto $\mathcal{P}(A)$ terá 2^n elementos; assim se um conjunto tem 5 elementos o conjunto da das partes dele terá 32 elementos.

5. Determina o número de elementos de $\mathcal{P}(E)$ quando:

   a) $E = \{0,1,2,3,4,5\}$

   b) $E = \{1,2,3,\ldots,9\}$

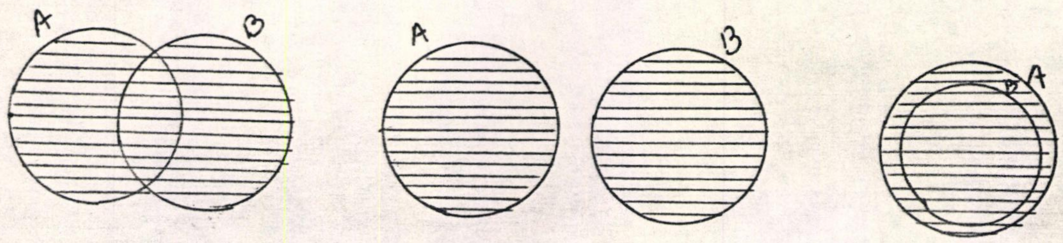
   c) $E = \{x \mid x \text{ é nº par menor que } 8\}$

OPERANDO COM CONJUNTOS

UNIÃO - Dados os conjuntos A e B, o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A ou a B é chamado de conjunto União de A e B.
Simbolicamente:

$$A \cup B = \{x \,/\, x \in A \vee x \in B\}$$

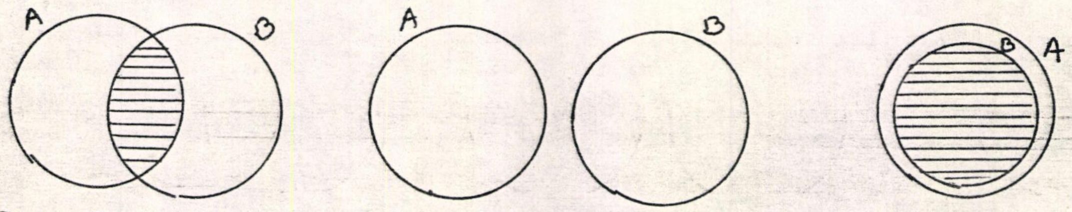
Representação:



INTERSECÇÃO - Dados os conjuntos A e B, o conjunto formado por elementos que pertencem a A e a B, é chamado de conjunto Intersecção de A e B.
Simbolicamente:

$$A \cap B = \{x \,/\, x \in A \wedge x \in B\}$$

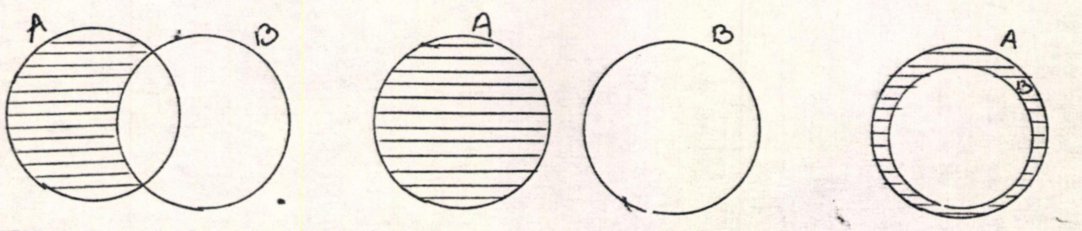
Representação:



DIFERENÇA - Dados os conjuntos A e B, o conjunto diferença A - B é o conjunto formado pelos elementos que pertencem ao conjunto A e não pertencem ao conjunto B.
Simbolicamente:

$$A - B = \{x \,/\, x \in A \wedge x \notin B\}$$

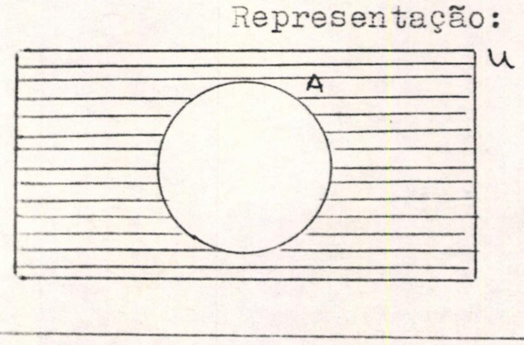
Representação:



COMPLEMENTAR - Dado um conjunto U e um conjunto A, tal que $A \subset U$, chama-se complementar de A em relação à U o conjunto formado pelos elementos de U que não pertencem à A.
Simbolicamente:

$$C_U A = \{x \,/\, x \in U \wedge x \notin A\}$$

Representação:



complementar de A em relação a U

EXERCITANDO...

1. Considerando os comjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 5, 6\}$ e $C = \{2, 4, 6, 8\}$, determina:

$A \cup B =$	$A \cap B \cap C =$
$A \cup C =$	$(A \cap B) \cap C =$
$B \cup C =$	$A \cap (B \cap C) =$
$A \cup A =$	$(A \cup B) \cap C =$
$A \cup (B \cup C) =$	$(A \cap C) \cup (A \cap B) =$
$A \cap B =$	$(A \cup C) \cap (A \cup B) =$
$A \cap C =$	$A \cup \emptyset =$
$B \cap C =$	$B \cap \emptyset =$

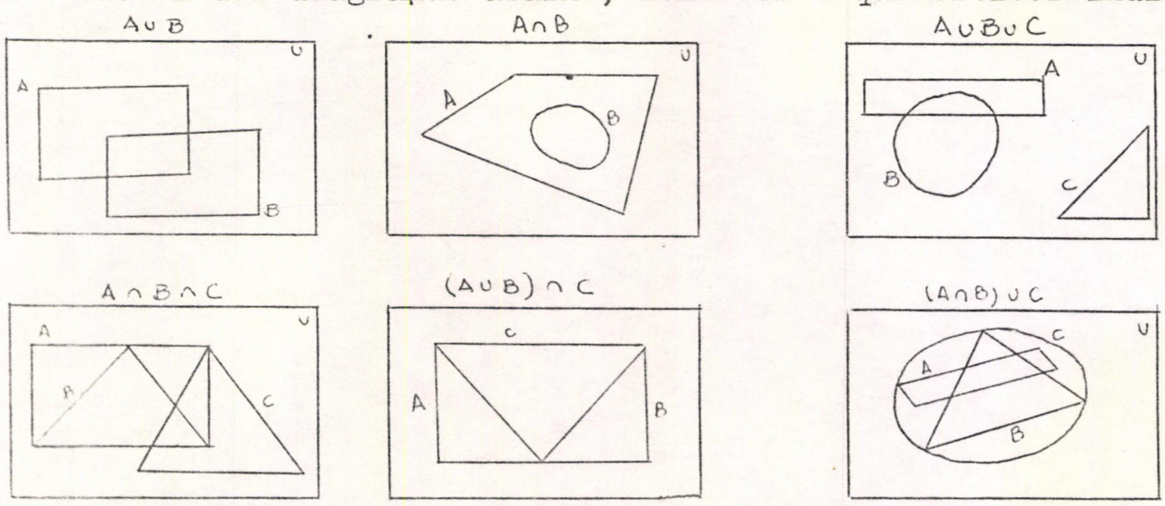
2. Dado $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ e os conjuntos $B = \{x \in U / x \text{ é par}\}$ $C = \{x \in U / x \text{ é ímpar}\}$ $D = \{1, 3\}$ e $E = \{\ \}$, determina:

a) $C_U B =$	d) $C_U E =$
b) $C_U C =$	e) $C_U (B \cup C) =$
c) $C_U D =$	f) $C_U (D \cap C) =$

3. Dados $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $C = \{1, 2\}$ e $D = \{6, 7\}$, determina:

a) $A \cup B \cup C \cup D =$	g) $B - D =$
b) $A \cap B \cap C =$	h) $C - B =$
c) $(A \cup D) \cap (B \cup C) =$	i) $C_B A =$
d) $B - A =$	j) $C_B C =$
e) $A - D =$	L) $B - (D \cap C) =$
f) $C - A =$	

4. Em cada um dos diagramas abaixo, sombrear o que estiver indicado:



EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1. Considera os conjuntos:

$A = \{1, 2, 3, 4\}$; $B = \{2, 4, 6\}$; $C = \{0, 1, 2\}$

$D = \emptyset$, calcula:

a) $A \cup B =$

b) $A \cap C =$

c) $A - B =$

d) $C - A =$

e) $\complement_{\mathbb{N}} B =$

f) $(D \cup A) - (B \cap C) =$

g) $(A \cup B) - (C \cup D) =$

i) $\complement_{\mathbb{N}} (C - B) =$

2. Considerando os conjuntos $A = \{a, b, c, d, e\}$; $B = \{a, e\}$
$C = \{b, c, d\}$ todas contidas no universo $U = \{a, b, c, d, e, f\}$
determina:

a) $\complement A =$

b) $\complement B =$

c) $\complement C =$

d) $A - B =$

e) $A - C =$

f) $(A \cap C) \cup B =$

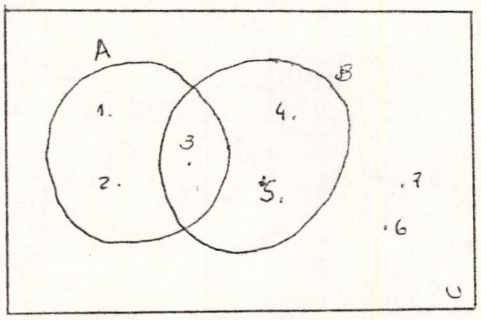
g) $\complement (A \cup B) =$

h) $\complement (A - C) =$

i) $\complement_A B =$

j) $\complement (A \cap C) \cup \complement (A \cap D) =$

3. De acordo com a figura completa:



a) $A \cap B =$

b) $A - B =$

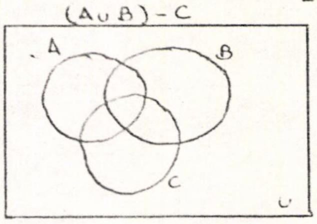
c) $\complement_U (A \cup B) =$

d) $(A \cup B) - (B - A) =$

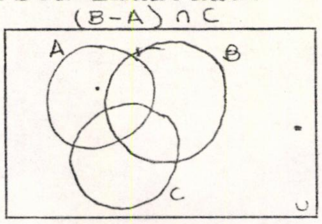
e) $(A \cap B) - \{3\} =$

4. Pinta o que está indicado:

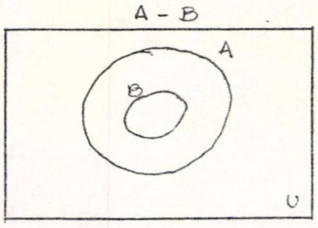
$(A \cup B) - C$

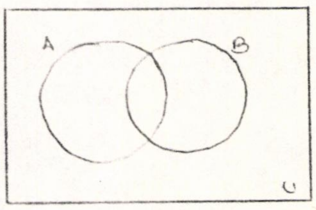


$(B - A) \cap C$

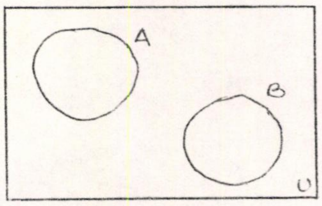


$A - B$

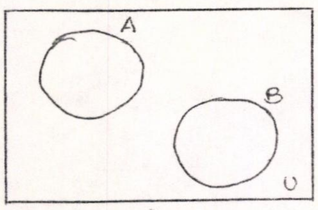




$\complement_U A$



$\complement_U (A \cup B)$



$(A \cap B) \cup A$

Exercícios de reforço

1) Completa a afirmação para torná-la verdadeira.
SE A tem 5 elementos, B tem 8 elementos e $A \cap B$ tem 4 elementos, então $A \cup B$ tem .... elementos.

2) Numa cidade existem 2 jornais , A e B, que tem juntos 5000 assinantes. O jornal A tem 2800 assinantes e os dois jornais tem 400 assinantes comuns. Quantos assinantes tem o jornal B?

3) Numa cidade são consumidos três produtos A, B e C. Feito um levantamento de mercado sobre o consumo destes produtos, obteve-se o seguinte resultado:

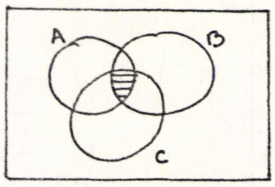
Produtos	A	B	C	A e B	A e C	B e C	A,B e C	Nenhum
número de consumidores	150	200	250	70	90	80	60	180

Pergunta-se:
a) quantas pessoas consomem o produto A ou o B?
b) quantas pessoas consomem o produto A ou o C?
c) quantas pessoas consomem o produto B ou o C?
dO quantas pessoas foram consultadas?

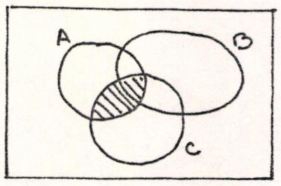
4) Sendo A e B dois conjuntos quaisquer, subconjuntos de U, é verdadeira a afirmação:
a) $A - B = B - A$
b) $(A \cup B) \cap A = B$
c) $B - C_u A = B \cap A$
d) $C_u B = C_u A$

5) Observa os diagramas abaixo e dize que conjunto representa a parte hachurada de cada um deles.

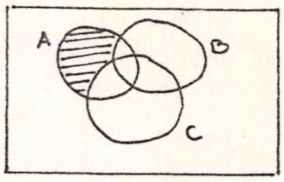
a)



b)



c)



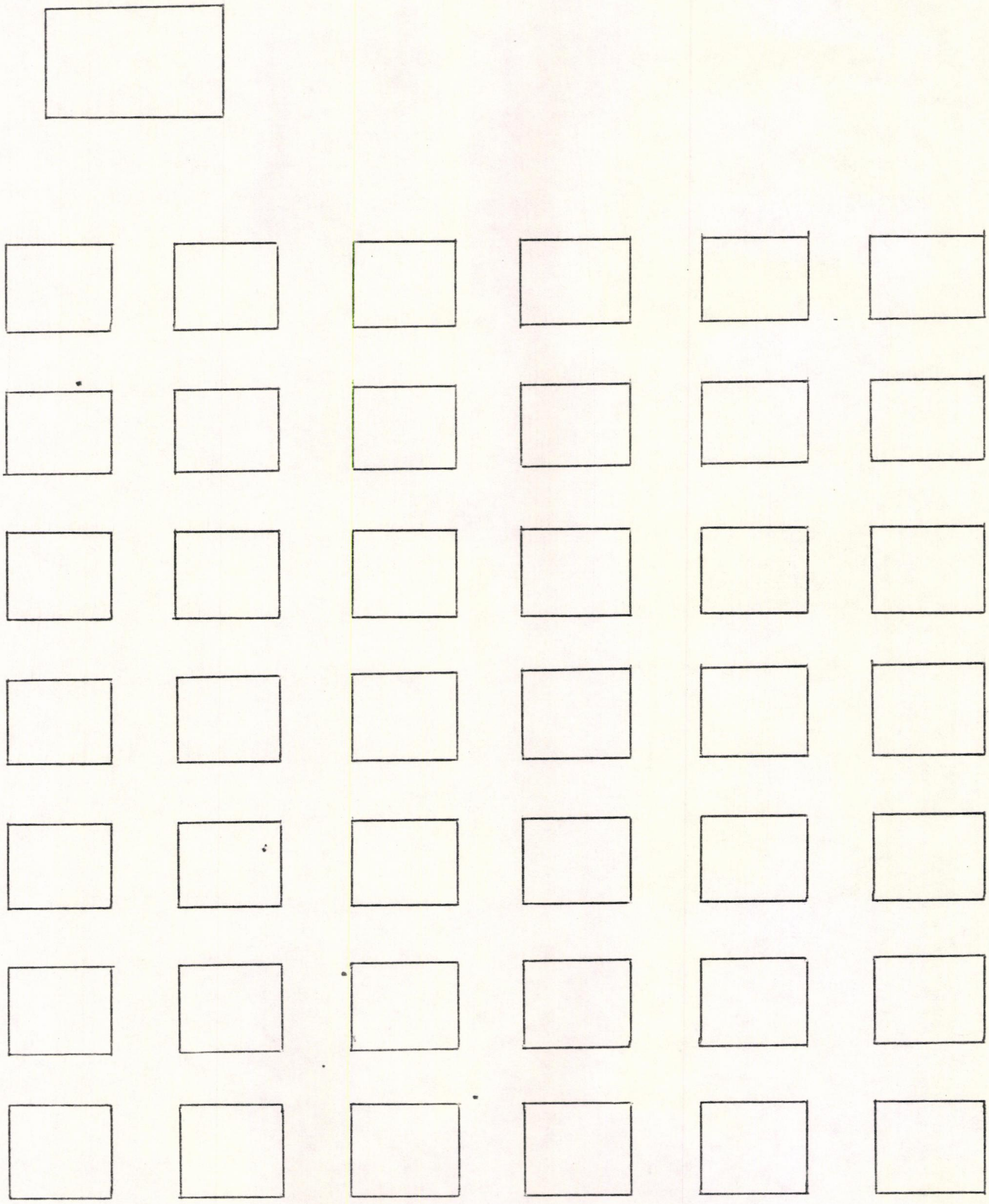
6) Sendo $A = \{\phi, a, \{b\}\}$ com $\{b\} \neq a \neq b \neq \phi$ então podemos afirmar:

a) $\{\phi, \{a\}\} \subset A$ b) $\{\phi, \{b\}\} \subset A$ c) $\{\phi, b\} \subset A$ d) $\{\{a\}, \{b\}\} \subset A$

7) Associa V ou F a cada uma das seguintes afirmações:

a) $A \subset (A \cup B)$ ( )
b) $A \subset (A \cap B)$ ( )
c) $(A \cap B) \subset A$ ( )
d) $\emptyset \supset A$ ( )
e) $(A \cup B) \subset (A \cap B)$ ( )
f) $(A \cap B) \subset (A \cup B)$ ( )
g) $(A \cup B) \subset (A \cap B)$ ( )
h) $\phi \subset (A \cap B)$ ( )
i) $A - B \subset A \cap B$ ( )
j) $B - A \subset A \cup B$ ( )

PAR ORDENADO

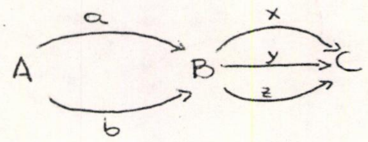


PRODUTO CARTESIANO

Sejam as cidades A,B e C.

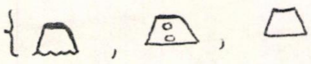
Consideremos $\{a, b\}$ o conjunto das estradas que ligam A e B e $\{x, y, z\}$ o conjunto das estradas que ligam B e C.

Assim :



De quantos modos diferentes podemos ir de A até C passando por B ?

Quais são estes modos ?

Seja : A = {  } e B = {  }

De quantas maneiras diferentes poderei me vestir usando uma blusa e uma saia ?

Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$ o conjunto das colunas e $B = \{1,2,3,4,5\}$ o conjunto das filas de classes de uma sala de aula.

Oconjunto de todas as possíveis posições (coluna,fila) será :

$\{(1, 1),(1, 2) \ldots \qquad \}$

A este conjunto damos o nome de Produto Cartesiano de A por B e representemos A x B.

DEFINIÇÃO :

Produto Cartesiano de A por B (A x B) é o conjunto de todos os pares ordenados em que o primeiro elemento do par pertence a A e o segundo elemento pertence a B .

$$A \times B = \{ (x, y) \mid x \in A \text{ e } y \in B \}$$

observe que :

Se o número de elementos de A é 3 e o número de elementos de B é 5 então o número de elementos de A x B é : 3 x 5 = 15 .

Podemos representar o produto cartesiano de dois modos :

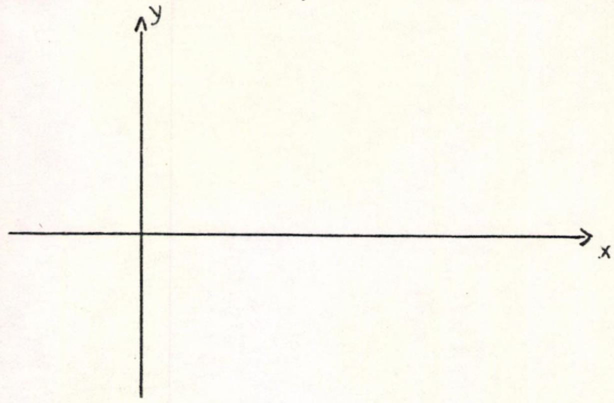
1) Em diagrama

2) Em gráfico Cartesiano

Exercitando ...

1. No plano cartesiano abaixo localiza os pontos, une-os e descobre o desenho.

A (4 , -2)	B (4 , 1)
C (2 , 1)	D (2 , -2)
E (-2, -2)	F (-2 , 1)
G (2 , 4)	H (6 , 1)
I (6 , -2)	A (4 , -2)



2. Dados $A = \{-1, 0, 1\}$; $B = \{1, 2\}$ e $C = \{-2, 2, -1\}$ determina os seguintes produtos cartesianos, representa-os em diagrama e no plano cartesiano.

a) $A \times B =$

b) $B \times C =$

c) $C \times A =$

d) $B^2 =$

3. Inventa um desenho e escreve os pares ordenados correspondentes.

RELAÇÕES

Sejam os conjuntos $A = \{2,3,4,5\}$ e $B = \{1,2,3\}$

$A \times B =$

a) Escreve o conjunto R_1 dos pares ordenados de $A \times B$ em que $x < y$

b) Escreve o conjunto R_2 dos pares ordenados de $A \times B$ em que $x = y$

c) Escreve o conjunto R_3 dos pares ordenados de $A \times B$ em que $x + y = 5$

$R_1 = \{ \qquad\qquad\qquad \} \longrightarrow R_1 \subset A \times B$

$R_2 = \{ \qquad\qquad\qquad \} \longrightarrow R_2 \subset A \times B$

$R_3 = \{ \qquad\qquad\qquad \} \longrightarrow R_3 \subset A \times B$

Dados dois conjuntos A e B, chama-se Relação de A em B a qualquer subconjunto do produto cartesiano de A x B .

R é relação de A em B $\iff$ $R \subset A \times B$

$R_1 = \{ (x,y) \in A \times B \ / \ x < y \}$

$R_2 = \{ (x,y) \in A \times B \ / \ x = y \}$

$R_3 = \{ (x,y) \in A \times B \ / \ x + y = 5 \}$

Dada uma relação de A em B, define-se :

<u>CONJUNTO DE PARTIDA</u> é o conjunto A .

<u>CONJUNTO DE CHEGADA</u> é o conjunto B .

<u>DOMÍNIO</u> da relação R é o conjunto dos primeiros elementos dos pares ordenados que pertencem a R.

$$\text{Dom}(R) = \{ x \in A \ / \ (x,y) \in R \}$$

<u>IMAGEM</u> da relação R é o conjunto dos segundos elementos dos pares ordenados que pertencem a R .

$$\text{Im}(R) = \{ y \in B \ / \ (x,y) \in R \}$$

Exercícios :

1. Seja $A = \{-1,0,1,2\}$ e $B = \{-2,-1,0,1,2\}$ e $R = \{ (x,y) \in A \times B \ / \ y = 2x \}$

   Completa:

   R =

   Conj. Part. = Conj. Cheg. =

   Dom (R) = Im (R) =

   Representa R no diagrama e no plano cartesiano

Reforçando ,,,

1. Para cada ítem,determina : os pares ordenados das relações
o domínio e a imagem
o diagrama

a) $A=\{1,2,3,4\}$ $B=\{2,3,4\}$ e $R_1=\{(x,y)\in AxB \ / \ x > y\}$

b) $A=\{6,12,16,22,24\}$ $B=\{4,5,8\}$ e $R_2=\{(x,y)\in AxB \ / \ x/y \in N\}$

c) $A=\{1,3,4,5\}$ $B=\{0,2,3,4\}$ e $R_3=\{(x,y)\in AxB \ / \ x+y=5\}$

2. Dado o conjunto $A=\{$Ana,Carla,Tais,Angela,Beatriz$\}$ determina a relação R de A em A definida por "...tem nome com menos letra que ..."

a) R =

b) Representa R num diagrama

c) Completa:

Conj.Part. = Conj. Cheg. =

Dom (R) = IM (R) =

Lei da relação :

3. Seja $B=\{1,2,3,5,8,9,10,11,12\}$

a) Determina o conjunto $R=\{(x,y)\in BxB \ / y=3x\}$

R =

b) Faze um diagrama de R

c) Faze o gráfico cartesiano de R

d) Determina o domínio e a imagem de R

4. Sejam os conjuntos $A=\{1,3,4\}$ e $B=\{0,2,4,6,8\}$ e a relação $R=\{(x,y)\in AxB \ / y$ é o dobro de $x\}$

Assinala as afirmações corretas:

a) ( ) $(3,6)\in AxB$
b) ( ) Em $(3,6)$ o segundo elemento é o dobro do primeiro.
c) ( ) $(3,6)\in R$
d) ( ) $(1,4)\in AxB$
e) ( ) Em $(1,4)$ o segundo elemento é o dobro do primeiro.
f) ( ) $(1,4)\notin R$
g) ( ) $(4,2)\in AxB$
h) ( ) $(4,2)\in R$
i) ( ) $(1,2)\in R$
j) ( ) $R=\{(1,2),(3,6),(4,8)\}$
l) ( ) $R\subset AxB$
m) ( ) $R=\{(x,y)/ \ y=2x\}$
n) ( ) R não é relação de A em B
o) ( ) Na relação R,cada elemento $x\in A$ foi associadoao elemento $y\in B$,que é o dobro de x

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1. Dados $A = \{-2,-1,0,1\}$ e $B = \{-1,0,1,2,3,4\}$, determina as relações de A em B :

a) $R_1 = \{ (x,y) \in AxB \ / \ y = x + 1\}$

b) $R_2 = \{ (x,y) \in AxB \ / \ y = x - 2\}$

c) $R_3 = \ (x,y) \in AxB \ / \ y = x^2 \}$

- Representa as relações R_1 ,R_2 ,R_3 no gráfico cartesiano e no diagrama.
- Completa o quadro:

	Conj.Part.	Conj.Cheg.	Dom.	Imagem	Lei
R_1					
R_2					
R_3					

2. Dado $A = \{1,2,4,6,8\}$,determina as relações e representa-as em diagrama.

a) $R_1 = \{ \ (x,y) \in AxA \ / \ y = x + 2\}$

b) $R_2 = \{ \ (x,y) \in AxA \ / \ y = x^0 \}$

3. Determina Domínio e Imagem de cada relação do exercício 2.

4. Determina a lei que define cada relação sabendo que foram definidas em $A = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

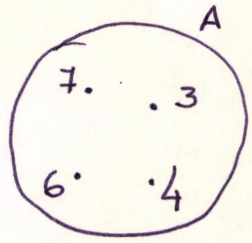
a) $R_1 = \{(1,2) \ , (3,6) \ , (4,8) \ , (2,4) \ , (5,10)\}$

b) $R_2 = \{(5,3) \ , (6,4) \ , (8,6) \ , (10,8) \ , (4,2) \ , (3,1) \ , (2,0) \ (9,7) \ , (7,5)\}$

c) $R_3 = \{(0,0) \ , (1,1) \ , (2,4) \ , (3,9)\}$

PROPRIEDADES DAS RELAÇÕES

I- REFLEXIVA



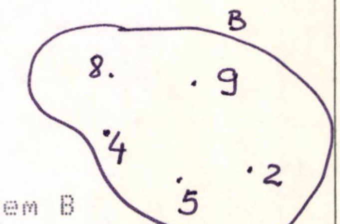
1)No diagrama do conjunto $A \subset \mathbb{N}$ traça as flechas que indicam a relação P de A em A, definida por "x é divisor de y"

a)Determina o conjunto P por extensão.

P =

b)Quais os elementos de A que não são imagem de si mesmos pela relação P?

c)Quais não o são?

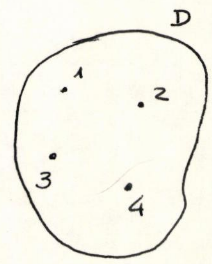


2)No diagrama do conjunto $B \subset \mathbb{N}$

a)traça as flechas que indicam a relação H de B em B
$H = \{(8,8),(8,5),(5,2),(2,2),(4,4)\}$

b)Quais os elementos de B que são imagens de si mesmos pela relação H?

c)Quais não o são?



3)No diagrama do conjunto $D \subset \mathbb{N}$

a)traça as flechas que indicam a relação N de D em D, definida por "$x < y$"

b)Determina N por extensão.
N =

c)Quais os elementos de N que são imagens de si mesmos pela relação N?

d)Quais não o são?

OBSERVA QUE:

No gráfico do exercício 1, todo ponto possui "laço", isto é, todo elemento do conjunto A é imagem de si mesmo pela relação P; no gráfico do exercício 2 nem todo ponto possui "laço" e, no exercício 3, nenhum ponto possui "laço".

Dizemos que:

a relação P de A em A é reflexiva,
a relação H de B em B não é reflexiva,
a relação N de D em D não é reflexiva.

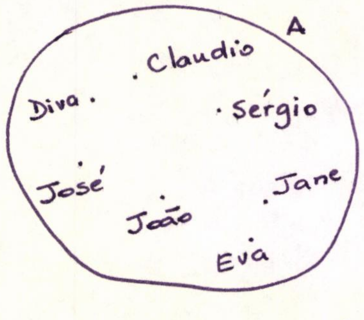
De modo geral:

Uma relação R de A em A é REFLEXIVA se e somente se $x \in A$, $(x,x) \in R$

II- SIMÉTRICA E ANTI-SIMÉTRICA

1) Seja A = {Diva, Jane, Eva, Cláudio, José, Sérgio, João}
Sabemos que: Cláudio e Sérgio são irmãos
Diva, José e João são irmãos
Jane e Eva são irmãs

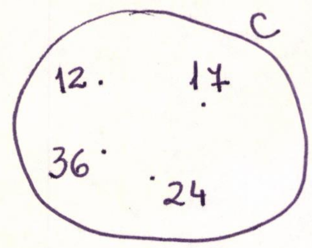
a) No diagrama de A, traça as flechas que representam a relação R de A em A, definida por "x é irmão de y"



b) Determina R por extensão.

R =

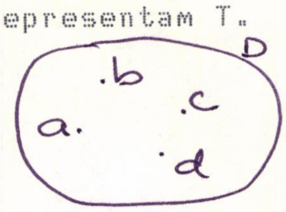
2) Seja C = {12, 17, 24, 36}
a) No diagrama de C, traça as flechas que indicam a relação L de C em C, definida por "x > y"



b) Determina L por extensão.

L =

3) Seja D = {a, b, c, d} e a relação T de D em D.
T = {(a,b), (b,a), (a,a), (c,a), (a,d)}
No diagrama de D, traça as flechas que representam T.



OBSERVA QUE:
No gráfico da relação R, para cada flecha que parte de um ponto a outro há outra que parte do segundo para o primeiro ponto considerado. O que não ocorre nos gráficos de L e T.
No gráfico da relação L, para cada flecha que parte de um ponto para outro, distinto do primeiro, não há flecha que parte do segundo para o primeiro.
No gráfico da relação T, o que se observa?

A relação R é simétrica.
A relação L e a relação T não são simétricas.
A relação L é anti-simétrica.
As relações R e T não são anti-simétricas.

De um modo geral:

Uma relação R de A em A é SIMETRICA se e somente se
$x, y \in A, (x,y) \in R \rightarrow (y,x) \in R$

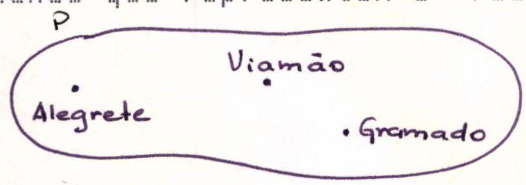
Uma relação R de A em A é ANTI-SIMETRICA se e somente se
$x, y \in A, (x,y) \in R \rightarrow (y,x) \notin R$

III- TRANSITIVA

1)Considera o conjunto P, formado por algumas cidades do RS, P = {Viamão, Alegrete, Gramado} e a relaçaõ M de P em P, definida por "x está mais próximo de P.A. que y"

a)No diagrama de P, traça as flechas que representam a relação M.

b)Determina M por extensão.



Podemos dizer que:

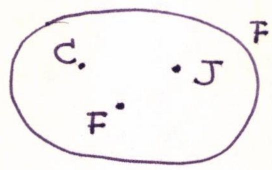
"SE Viamão está mais próxima de PA que Gramado e Gramado está mais próxima de PA que Alegrete ENTÃO Viamão está mais próxima de PA que Alegrete."

Representando Viamão por V, Gramado por G e Alegrete por A, podemos dizer que:

Se $(V,G) \in M$ e $(G,A) \in M$ então $(V,A) \in M$

2)Considera o conjunto F formado pelos membros de uma família.
João é pai de Carlos, que por sua vez é pai de Flávio.
Representa-os por J, C e F e faz o que se pede.

a)No diagrama de F, traça as flechas que representam a relação S de F em F, definida por "x é pai de y"



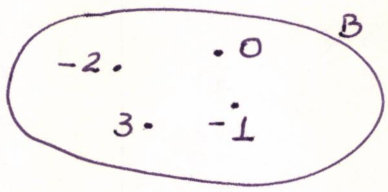
b)Completa:

S =

Se $(J,C) \in S$ e $(C,F) \in S$ então $(\ , \ ) \notin S$

3)Seja B = $\{-2,0,-1,3\}$ e T a relação de B em B, definida por "x > y".

a)No diagrama de B, traça as flechas que representam a relação T.



b)Completa:

T =

Sejam três números x, y, z. Se x é maior que y e y é maior que z, então podemos afirmar que ....

Para as relações M e T, podemos afirmar que:

Se x está relacionado com y e y está relacionado com z, então x está relacionado com z. Porém já não podemos fazer a mesma afirmação para a relação S.

Dizemos que as relações M e T são transitivas e que a relação S não é transitiva.

De um modo geral:

Uma relação R de A em A é transitiva se e somente se $\forall x, y, z \in A, \ (x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \rightarrow (x,z) \in R$

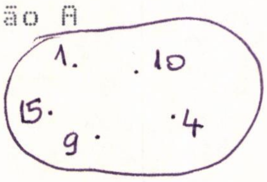
RELAÇÕES DE ORDEM E DE EQUIVALÊNCIA

Seja P = {1,10,4,9,15} e as relações A, B, C, D de P em P, definidas respectivamente por:

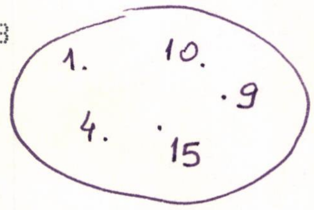
A: "x é divisor de y"
B: "x e y são primos entre si"
C: "x é maior que y"
D: "x tem o mesmo resto que y na divisão por 5"

Representa, abaixo, estas relações.

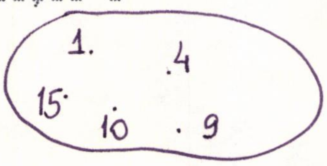
Relação A



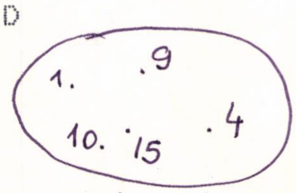
Relação B



Relação C



Relação D

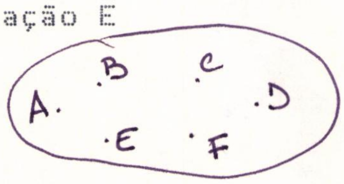


Seja G = {A,B,C,D,E,F} onde A ={a,b,c} , B = {a,b} , C = {o}, D = {b,c,f}, E = {g,h,i} e F = {g,h,i,f} e as relações de G em G definidas por:

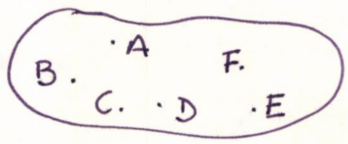
E: "x tem mesmo número de elementos que y"
F: "x contém y"

Representa as relaçoes E e F

Relação E



Relação F



Completa o quadro abaixo, assinalando com X os quadrinhos convenientes para indicar as propriedades das relações A, B, C, D, E e F .

Relação / Propriedade	A	B	C	D	E	F
Reflexiva						
Simétrica						
Anti-simétrica						
Transitiva						

Quais das relações acima são, ao mesmo tempo, reflexivas, simétricas e transitivas?

Quais são, ao mesmo tempo, reflexivas, anti-simétricas e transitivas?

De um modo geral:

Uma relação R de A em A é uma relação de equivalência se e somente se for reflexiva, simétrica e transitiva.

Uma relação R de A em A é uma relação de ordem se e somente se for reflexiva, anti-simétrica e transitiva.

Trabalhando com as propriedades das relações

1)Representa em diagrama as seguintes relações e verifica as propriedades válidas para cada uma.

a)R de A em A cuja lei é "x tem a mesma idade que y", onde A = {Cláudio, Sérgio, Renato, Felipe} . Sabe-se que Cláudio e Renato tem 14 anos, Sérgio tem 8 anos e Felipe tem 9 anos.

b)S de B em B, com B = {△, ○, △, ▭, ○} e cuja lei é "x tem a mesma forma que y"

c)T de D em D, com D = { a,b,c,d,e,f }, onde T = { (a,a), (a,b), (b,a),(b,b),(c,c),(c,d),(d,e),(c,e),(e,c),(e,e),(d,d),(f,f)}

d)P de E em E, com E = {a,b,g,h,i,j,l} e cuja lei é "x precede ou ocupa o mesmo lugar que y, na ordem alfabética"

e)Z de F em F, com F = {1,2,3,4,5} onde Z = {(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(5,1)}

2)Determina o valor lógico de cada afirmação e justifica tua resposta.

a)Sendo B = {1,2,3,4,5,6} , R: $B \longrightarrow B$ definida por "$x < y$" é simétrica. (   )

b)R: $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definida pela lei "x é múltiplo de y" é simétrica. (   )

c)A relação em A definida por R = {(1,1),(4,2),(2,4),(2,2)} onde A = { 1,2,4} é reflexiva. (   )

3)Considera o conjunto $A = \{a,e,i\}$. Determina através de diagrama uma relação em A que seja:

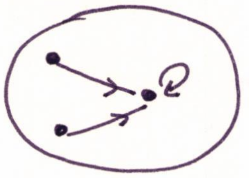
a)anti-simétrica

b)simétrica e transitiva

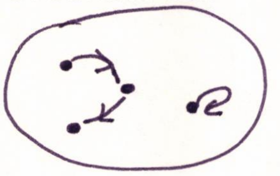
c)reflexiva,simétrica e transitiva.

4)Completa os diagramas para que a relação seja:

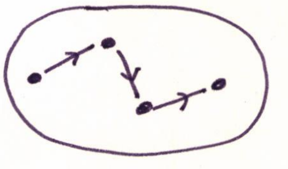
a)reflexiva



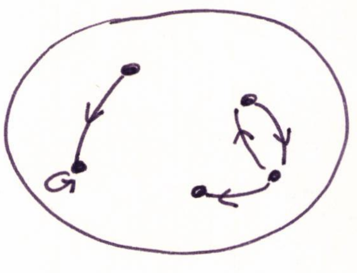
b)simétrica



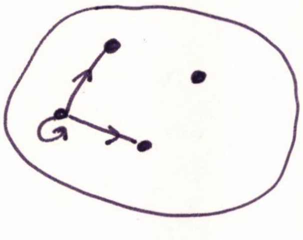
d)transitiva



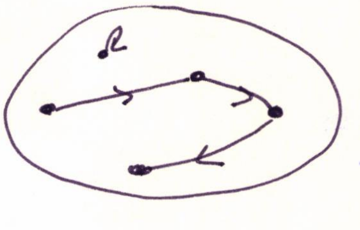
d)de equivalência



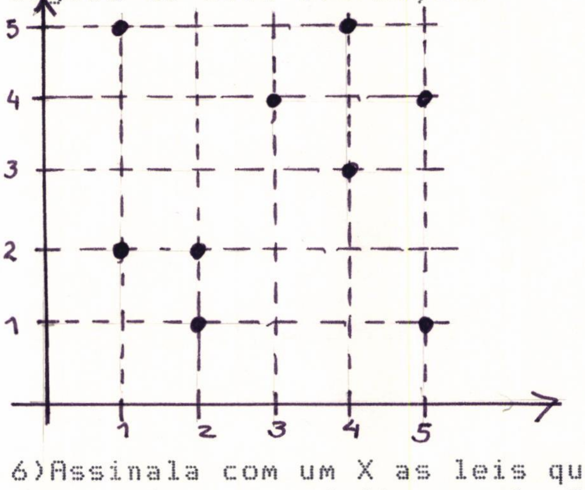
e)de ordem



f)de ordem



5)Seja a relação R representada graficamente abaixo. Dá o valor lógico de cada afirmação.



$(3,4) \in R$ ( )

$(4,3) \in R$ ( )

$(2,2) \notin R$ ( )

R é reflexiva ( )

R é simétrica ( )

$D(R) = \{1,2,3,4,5\}$ ( )

6)Assinala com um X as leis que definem relações de equivalência e com um * as que definem relações de ordem.

a) x tem o mesmo número de elementos que y
b) x tem a mesma cor que y
c) x precede ou ocupa o mesmo lugar que y
d) x é menor que y
e) x é maior ou igual a y
f) x tem o mesmo pai que y

7)Seja $A = \{1,2,3,4,5\}$ e R a relação em A definida por $y=x$

a)Constrói o diagrama de R.

b)Responde:

R é relação de equivalência? Justifica.

R é relação de ordem? Justifica.

8)A relação "x é mais velho ou tem a mesma idade que y" definida no conjunto das pessoas da tua cidade, é de equivalência? É de ordem? Justifica tuas respostas.

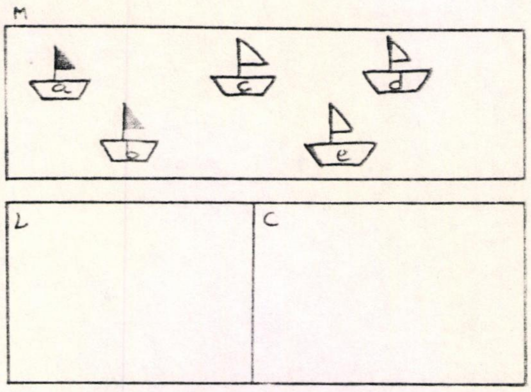
9)A relação "x deixa o mesmo resto que y na divisão por 2" no conjunto $\{2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ é uma relação de equivalência? E de ordem? Justifica tuas respostas.

10)Seja E= {tartaruga,lebre,galinha} e R a relação de E em E, definida por "x é mais veloz que y". R é uma relação de ordem? Justifica.

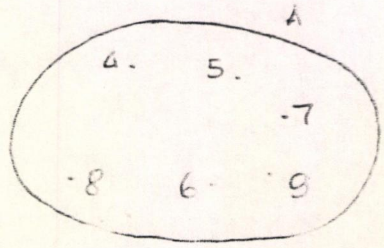
11)Seja A = {dia,data,semana,janela,dez} Define uma relação de equivalência em A.

PARTIÇÃO DE UM CONJUNTO

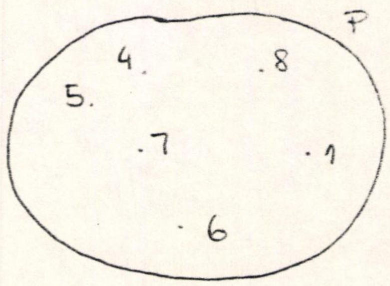
1. Seja o conjunto dos barquinhos:
   $M = \{a, b, c, d, e\}$
   L é o conjunto dos barcos pretos.
   C é o conjunto dos barcos brancos.
   a) Representa os elementos de M no diagrama ao lado.
   b) Existe algum elemento de M que pertença a L e a C ?
   c) Completa: $L \cap C =$
   $L \cup C =$



2. Seja $A = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
   a) Separa em vermelho o conjunto dos números pares. (P)
   b) Separa em verde o conjunto dos números ímpares. (I)
   c) Completa: $P \cup I$
   $P \cap I$



3. Seja $P = \{1, 4, 5, 6, 7, 8\}$.
   Contorna em vermelho o conjunto B dos divisores de 8.
   Contorna em azul o conjunto C dos divisores de 6.
   Contorna em vermelho o conjunto D dos números primos.
   Completa:
   $B \cap C =$ $B \cap D =$ $C \cap D =$ $B \cup C \cup D =$
   Os conjuntos B,C e D são disjuntos 2 a 2 ?



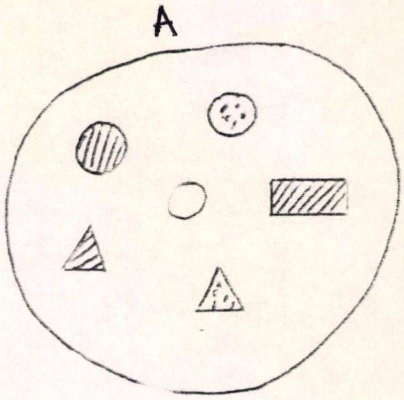
4. Dizemos que :
   - No exercício 1 : $\{L, C\}$ é uma partição de M .
   - No exercício 2 : $\{P, I\}$ é uma partição de A.
   - No exercício 3 : $\{B, C\}$ não é uma partição de P.

Dado um conjunto X, um conjunto de subconjuntos de X é uma partição de X se e somente se :

- Nenhum subconjunto é vazio ;
- A união de todos subconjuntos é X ;
- Os subconjuntos são disjuntos dois a dois .

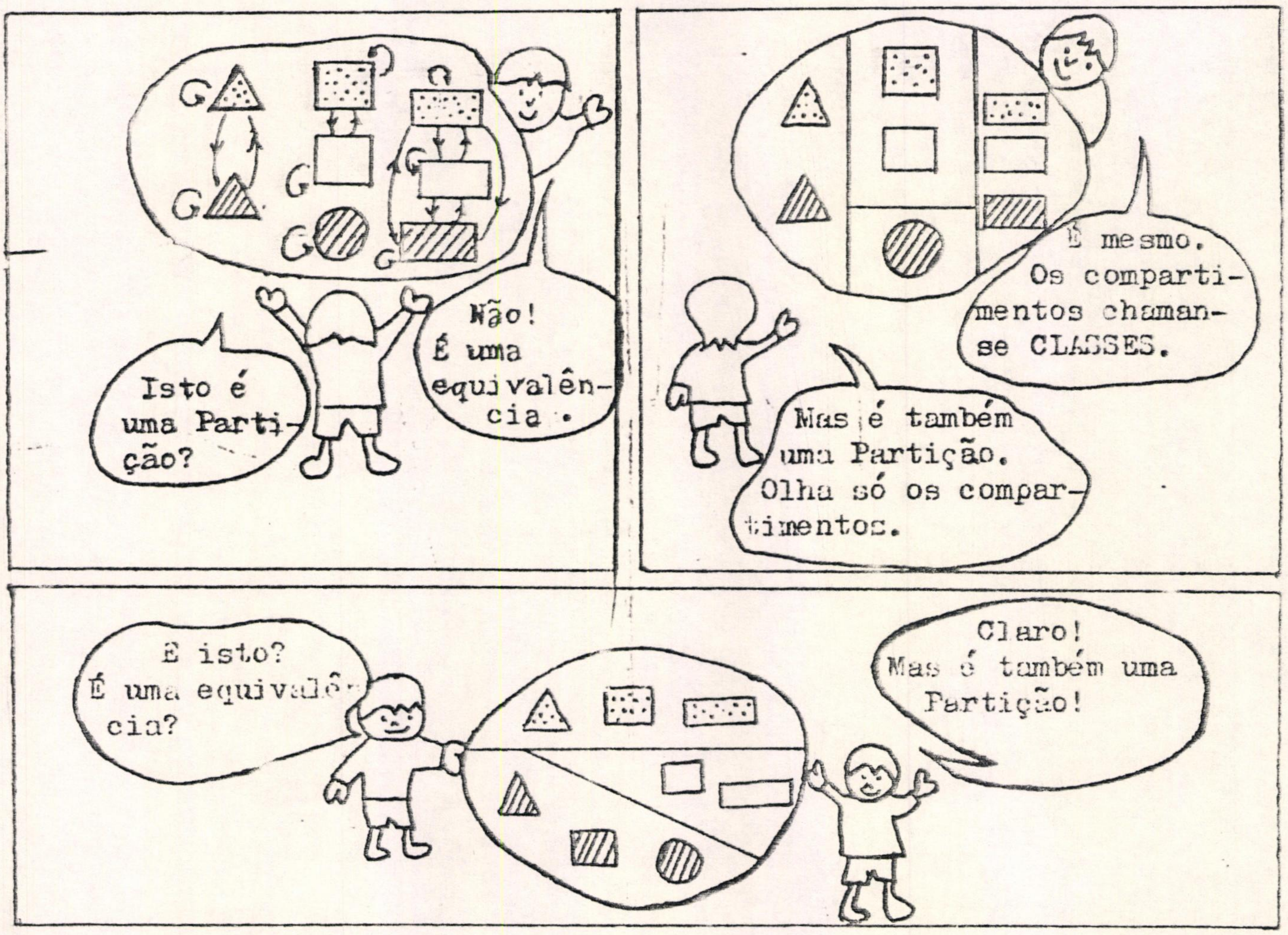
PARTIÇÃO E EQUIVALÊNCIA

Seja o conjunto A e a relação
T : A ⟶ A definida por " x tem a mesma forma que y"



a) Quais as propriedades da relação T ?

b) A relação T é uma ______________________



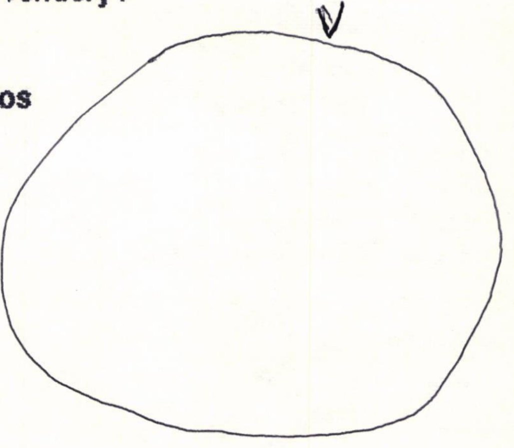
Observa que :
Toda relação de equivalência determina uma Partição do Conjunto. Todo elemento da Partição chama-se CLASSE DE EQUIVALÊNCIA. Todo elemento de uma classe deequivalência pode ser considerado um representante de classe.

Exercitando

1. Quais as condições para que, dado um conjunto A, um conjunto de subconjuntos da A seja uma partição de A?

2. Seja V={ amar, chorar, fazer, cobrir, sorrir, possuir, vender} .

a) Representa V no diagrama ao lado.

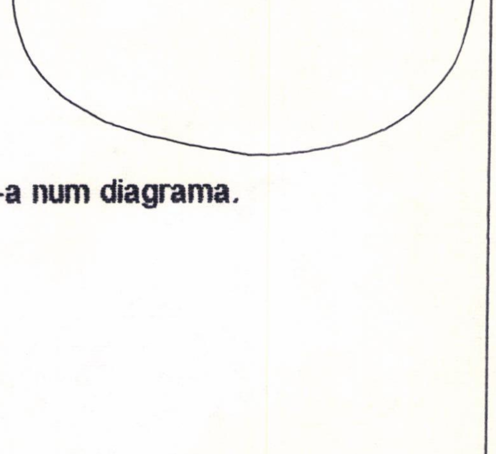


b) No diagrama contorna os subconjuntos de V formados por verbos da mesma conjugação

c) Obtiveste uma partição de V?
Justifica tua resposta.

3. Seja A={pato,gato,eu,tu,nós,caderno,sol} e os subconjuntos de A assim definidos:

M= { x | x é palavra monossílaba}
D= { x | x é palavra dissílaba}
T= { x | x é palavra trissílaba}



a) Representa no diagrama o conjunto A e contorna os subconjuntos M, D e T

b) {M,D,T} é uma partição de A? Justifica tua resposta.

4. Cria uma partição dos Estados do Brasil e representa-a num diagrama.

EXERCÍCIOS

1. Assinala com X as partições de A, sendo:

   $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$

   a) $\{\{a, b, d, f\}, \{a, e\}, \{g\}\}$

   b) $\{\{a, b\}, \{c, d, e\}, \{f, g\}, \{\ \}\}$

   c) $\{\{a, b\}, \{d, e, f\}, \{g\}\}$

   d) $\{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{f\}, \{g\}\}$

2. Seja $P = \{1, 4, 5, 6, 7, 8\}$

   a) Separa em azul o conjunto dos números primos.

   b) Contorna em laranja o conjunto E dos múltiplos de 4.

   c) Completa $D \cap E =$ $\qquad\qquad$ $D \cup E =$

   d) $\{D, E\}$ é uma partição de P ?

3. Faze uma partição das alunas desta sala.

4. Compara partição de um conjunto com conjunto das partes de um conjunto.

-RELAÇÃO INVERSA

Dados os conjuntos A , B e uma relação R de A em B, chama-se relação inversa de R, ao conjunto R^{-1} definido por:

$$R^{-1} = \{ (x,y) \in B \times A \ / \ (x,y) \in R \}$$

Assim, sendo $A = \{ -2, 0, 1, 3, 5 \}$, $B = \{ 1, 2, 3 \}$ e $R: A \to B$ definida por $x > y$, temos :

$$R = \{(3,1), (3,2), (5,1), (5,2), (5,3)\} \subset A \times B$$

$$R^{-1} = \{(1,3), (2,3), (1,5), (2,5), (3,5)\} \subset B \times A$$

EXERCÍCIOS :

1. Sendo $R = \{(1,2), (1,3), (0,2)\}$ uma relação de $A = \{-1,0,1\}$ em $B = \{1,2,3,4\}$, determina:

a) $R^{-1} =$

b) o conjunto de partida de R^{-1}

c) o conjunto de chegada de R^{-1}

d) $D(R^{-1}) =$

e) $Im(R^{-1}) =$

2. Dada a relação $R: A \to B$ definida por "x é metade de y" , sendo : $A = \{0,2,3,4\}$ e $B = \{1,4,6,9,10\}$, completa:

a) $R =$

b) $D(R) =$

c) $Im(R) =$

d) $R^{-1} =$

e) $D(R^{-1}) =$

f) $Im(R^{-1}) =$

g) Comparando $D(R)$, $Im(R)$, $D(R^{-1})$, $Im(R^{-1})$ o que podes concluir?

3. Seja $R = \{(1,2), (3,4), (4,5)\}$ uma relação de $A = \{1,2,3,4\}$ em $B = \{2,4,5\}$

a) Determina R^{-1} por extensão

b) Faze o diagrama de R e de R^{-1}

c) Constrói o gráfico cartesiano de R e de R^{-1}

d) Completa:

$D(R) =$

$Im(R) =$

$D(R^{-1}) =$

$Im(R^{-1}) =$

4. Sejam os conjuntos $A = \{2,3,4\}$ e $B = \{2,4,6,8,10,12\}$, determina:

a) $R: A \to B$ definida por "x é divisor de y"

$R =$

b) $D(R) =$

c) $Im(R) =$

d) Lei da R^{-1} : $B \subset A$

e) $R^{-1} =$

f) $D(R^{-1}) =$

g) $Im(R^{-1}) =$

h) Representa graficamente R e R^{-1}

5. Dados os conjuntos $A = \{-2,0,1,2,3\}$ e $B = \{-1,0,6,7\}$

Escreve a relação $R: A \to B$ definida por "$x > y$" e após determina R^{-1}.

Responde:

"Qual a lei que define R^{-1}?

6. Sejam $A = \{0,1,2,3\}$, $B = \{0,1,2,4\}$, $R: A \to B$ definida por $y = x^2$, $S : A \to B$ definida por "x somado com 2 é igual a y"

Assinala V ou F ao lado de cada afirmação:

( ) $R = \{(0,0), (1,1), (2,4)\}$

( ) $S = \{(0,2), (2,4)\}$

( ) $D(R) = \{0,1,4\}$

( ) $S^{-1} = \{(2,0), (2,4)\}$

( ) $Im(R) = \{0,1,2\}$

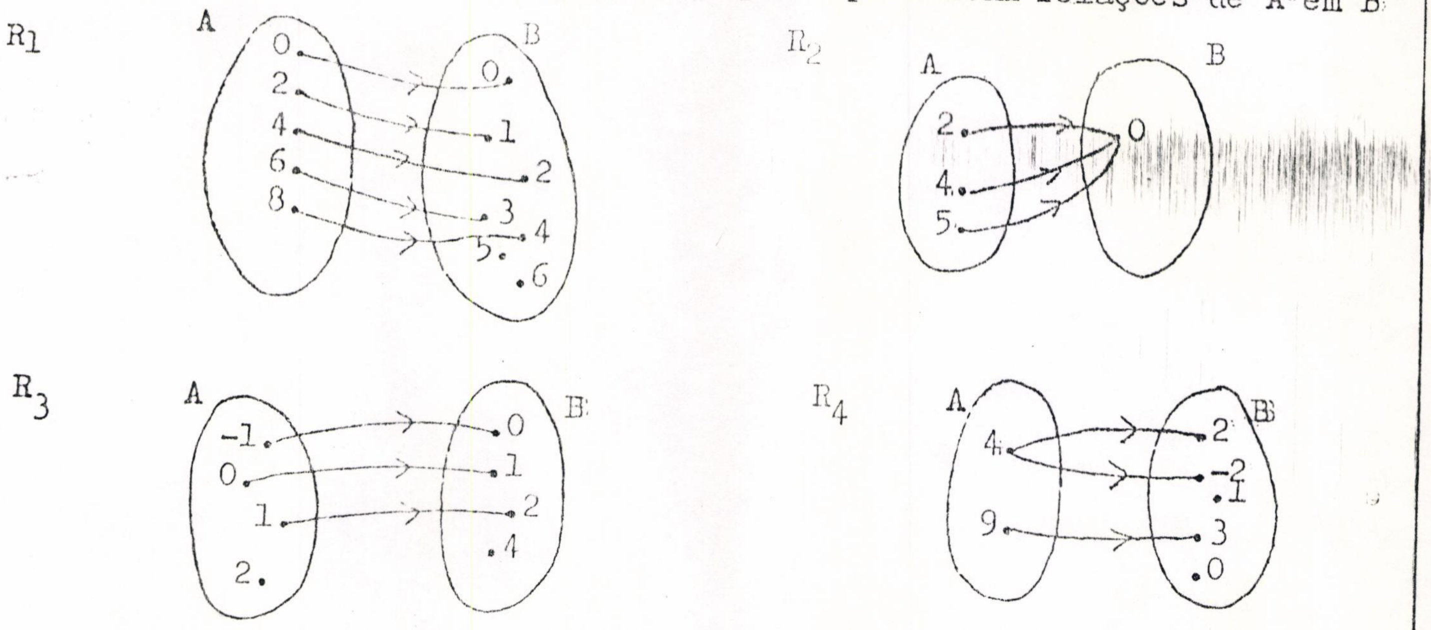
( ) $D(S) = \{0,2\}$

( ) $R^{-1} = \{(0,0), (1,1), (4,2)\}$

FUNÇÃO

Conceito

Observa os diagramas abaixo, que representam relações de A em B



Podemos dizer que:

- Nas relações R_1 e R_2, a todo elemento x de A se associa um e só um elemento y de B.
- Na relação R_3, ao elemento 2 de A não se associam elemento de B.
- Na relação R_4, ao elemento A de A se associam dois elementos de B.

As relações R_1 e R_2 são chamadas <u>funções</u> ou <u>aplicações</u> de A em B.

Podemos então definir:

Dados dois conjuntos A e B e uma relação f de A em B, dizemos que f é uma função ou aplicação, se e somente se, a todo elemento x de A está associado um único elemento y de B, tal que $(x,y) \in f$.

Em linguagem simbólica temos:

$f : A \to B$ é uma função $\Longleftrightarrow \forall x \in A, \exists\, y \in B / (x,y) \in f$

<u>Notação</u>: $f: A \to B$

$x \mapsto y$ (lê-se: função f de A em B)

Domínio e Imagem de uma função

Se f é uma função de A em B então o domínio da f é o conjunto A (seu conjunto de partida) e a imagem pode ser todo o conjunto de chegada ou parte dele.

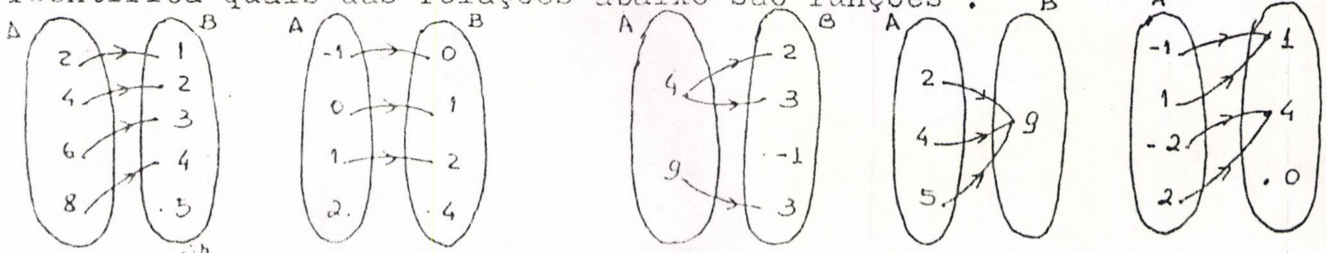
$f: A \to B$

$D(f) = A$

$Im(f) \subset B$

TRABALHANDO COM FUNÇÕES

1. Identifica quais das relações abaixo são funções :



2. Verifica quais das relações são funções de A em B, com $A = \{1,2,3\}$ e $B = \{1,2,3,4,5,6\}$

a) $\{(1,2), (2,3), (3,4)\}$

b) $\{(1,3), (2,4), (2,5), (3,6)\}$

c) $\{(2,3), (3,3)\}$

d) $\{(1,1), (2,4), (3,6)\}$

3. Determine as relações, representa-as através de diagrama e diga se são funções:

a) $A = \{-2,0,2\}$

$B = \{0,1,3,5\}$

$f: A \rightarrow B$

$x \mapsto y = x + 3$

b) $A = \{-1,0,1,2\}$

$B = \{-4,-2,0,2,4\}$

$f: A \rightarrow B$

$x \mapsto y = 4x$

4. Dados $B = \{0,1,2,3,4,5,6,9,12\}$ e $A = \{0,1,2,3,4\}$

a) determina por extensão as relações :

$R_1 = \{(x,y) \in A \times B \ / \ y = 3x\}$

$R_2 = \{(x,y) \in A \times B \ / \ y = x^2\}$

$R_3 = \{(x,y) \in A \times B \ / \ y = x+1\}$

b) identifica quais das relações são funções

5. DADOS os conjuntos $A = \{-2,-1,0,1\}$ e $B = \{-4,-2,0,2\}$ e $C = \{0,1,2,3,4,5,6\}$ determina os pares das funções abaixo :

$f_1 : A \rightarrow B \ / \ y = 2x$

$f_2 : A \rightarrow C \ / \ y = x + 2$

$f_3 : B \rightarrow C \ / \ y = x + 4$

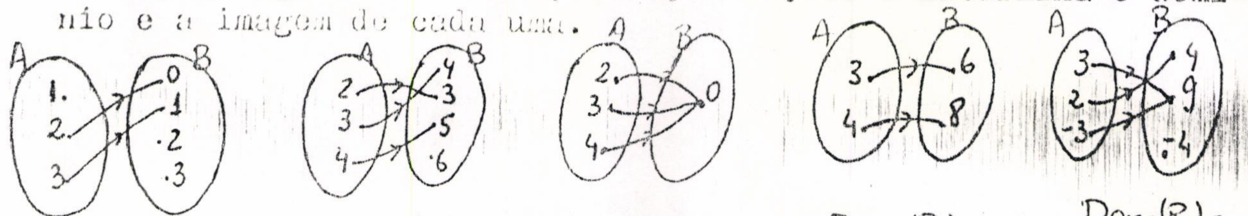
$f_4 : B \rightarrow A \ / \ y = x/2$

$f_5 : A \rightarrow C \ / \ y = x^2 + 1$

$f_6 : B \rightarrow C \ / \ y = 6$

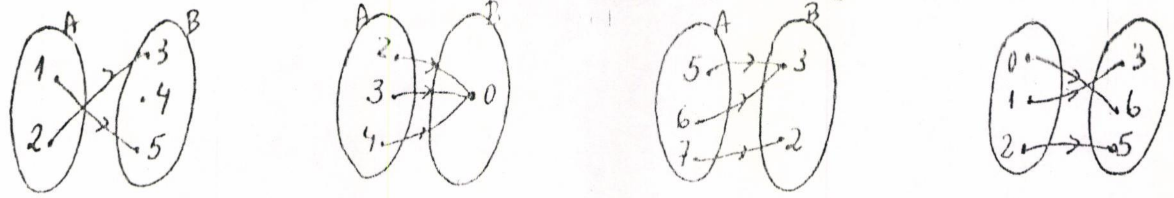
Reforçando ...

1. Identifica quais das relações são funções e determina o domínio e a imagem de cada uma.



Dom(R) =	Dom(R) =	Dom(R) =	Dom(R) =	Dom(R) =
Im (R) =	Im (R) =	Im (R) =	Im (R) =	Im (R) =

2. Observa os diagramas e completa o que é pedido :



f(1) =	f(2) =	f(5) =	f(0) =
f(2) =	f(4) =	f(6) =	f(2) =

3. Seja f uma relação de A = $\{2,3,4,5\}$ em B = $\{1,2,3,4,5,6\}$ definida por $y = x - 1$:

a) faça o diagrama de f

b) diga se f é uma função e justifica tua resposta.

4. Seja f uma relação de A = $\{-4,-3,-2,-1,0\}$ em B = $\{-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$ definida por $y = 2x + 5$

a) faça o diagrama de f

b) diga se f é uma função ou não e justifica tua resposta.

5. Dada a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 4x + 3$ calcula :

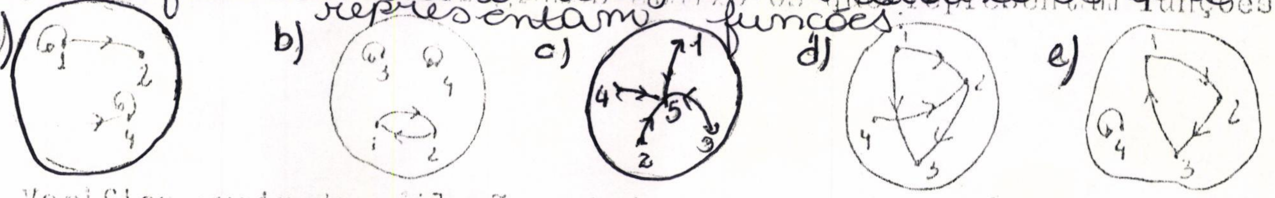
a) f(0) =

b) f(1) =

c) f(-2) =

6. Identifica dentre os diagramas abaixo os que representam funções:

a) b) c) d) e)



7. Verifica quais das relações abaixo representam funções :

a) $R_1 = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \mid 2y - x = 8\}$

b) $R_2 = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid y = x - 2\}$

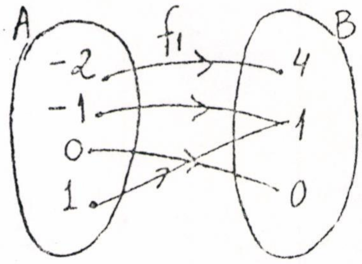
c) $R_3 = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid y + 2x = 1\}$

d) $R_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x\}$

e) $R_5 = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid y = x^2\}$

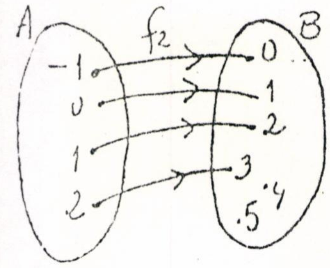
TIPOS DE FUNÇÕES

Observa os diagramas abaixo, que representam funções e completa:



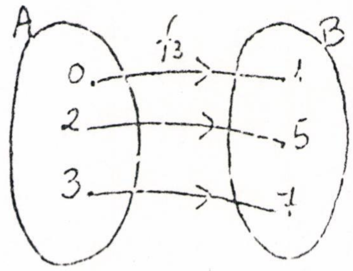
$D(f_1) =$

$Im(f_1) =$



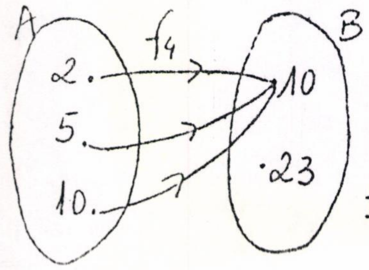
$D(f_2)=$

$Im(f_2)=$



$D(f_3)=$

$Im(f_3)=$



$D(f_4)=$

$Im(f_4)=$

Podemos dizer que:

- Na função f_1, não existe elemento de B que não seja imagem de um elemento de A, isto é, chegam flechas em todos os elementos de B. Dizemos que f_1 é função SOBREJETORA.
- Na função f_2, não existe elemento de B que seja imagem de mais de um elemento de A, isto é, em cada elemento de B que é imagem de um elemento de A chega apenas uma flecha. Dizemos que a funç~o f_2 é INJETORA.
- Na função f_3, não existe elemento de B que não seja imagem de um elemento de A; cada elemento de B é imagem de um único elemento de A. Nesse caso, a função f_3 é, ao mesmo tempo, sobrejetora e injetora, dizemos que f_3 é uma função BIJETORA.
- Na função f_4, dizemos que é uma função simples, isto é, f_4 não é sobrejetora, nem injetora.

Definindo:

$f : A \mapsto B$ é INJETORA $\longleftrightarrow \forall\, y \in Im(f),\ \overline{\exists}\, x \in A,\ (x,y) \in f$

$f : A \mapsto B$ é SOBREJETORA $\longleftrightarrow \forall\, y \in B,\ \overline{\exists}\, x \in A,\ (x,y) \in f$

$f : A \mapsto B$ é BIJETORA $\longleftrightarrow$ f é sobrejetora e f é injetora

EXERCÍCIOS

1. Classifica as funções abaixo em injetoras, sobrejetoras ou bijetoras:
   a) $f: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N} \ / \ y = 3x$
   b) $f: \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z} \ / \ y = x^2$
   c) $f: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \ / \ y = 2x + 1$
   d) $f: \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}_+ / \ y = |x|$
2. O que podes afirmar sobre o número de elementos do conjunto de partida e do conjunto de chegada numa função:
   a) injetora
   b) sobrejetora
   c) bijetora

EXERCÍCIOS

1. Dados os conjuntos $A = \{2,4,6\}$; $B = \{1,3,5,7\}$ representa graficamente cada uma das relações abaixo, assinala as que são funções de A em B e classifica as funções em injetora, sobrejetora ou bijetora:

a) $R_1 = \{(2,5)\ ,\ (4,3)\ ,\ (6,1)\}$

b) $R_2 = \{(2,7)\ ,\ (4,5)\}$

c) $R_3 = \{(2,1),\ (2,3)\ ,\ (4,5)\ ,\ (6,7)\}$

d) $R_4 = \{(6,3)\ ,\ (2,7)\ ,\ (4,1)\}$

e) $R_5 = \{(2,7)\ ,\ (4,7)\ ,\ (6,7)\}$

2. Sendo $A = \{6,7,8,9\}$ e $B = \{2,3,4\}$, marca as funções e classifica-as em injetora, sobrejetora ou bijetora :

a) $\{(6,2)\ ,\ (7,3)\ ,\ (8,2)\ ,\ (9,4)\}$

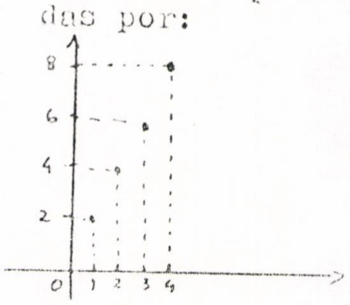
b) $\{(6,3)\ ,\ (7,2)\ ,\ (8,4)\ ,\ (6,2)\}$

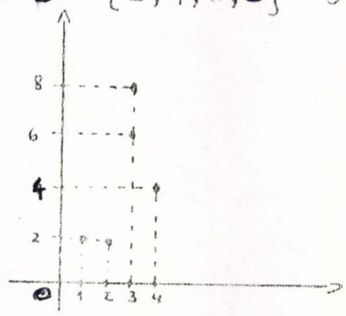
c) $\{(6,2)\ ,\ (7,3)\ ,\ (8,4)\}$

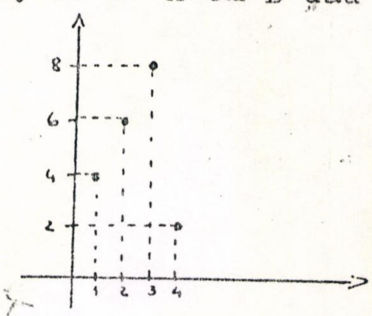
d) $\{(6,2)\ ,\ (7,2)\ ,\ (8,2)\ ,\ (9,2)\}$

e) $\{(6,2)\ ,\ (6,3)\ ,\ (6,4)\}$

3. Sejam $A = \{1,2,3,4\}$ e $B = \{2,4,6,8\}$ e as funções de A em B dadas por:

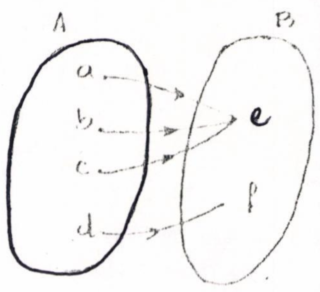


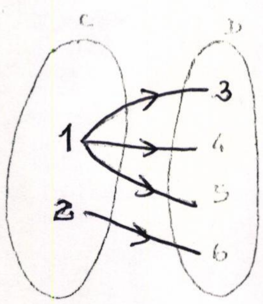


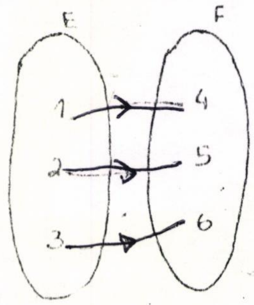


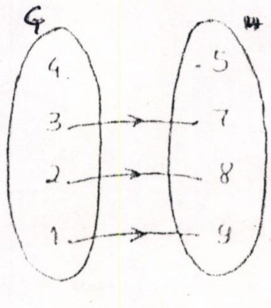
Classifica estas funções em injetora, sobrejetora ou bijetora.

4. Dentre os diagramas abaixo assinala com um X os que representam funções e determina seu domínio e sua imagem.









Progressões Aritméticas P.A.

1. Verifica se as seqüências abaixo representam P.A.

a) (3,7,11,15,19)

b) (-5,10,-15,20,-25,...)

c) (3,4,7,12,...)

d) (2,2,2,2,...)

e) (-1,2,5,8,11,...)

f) (2,0,-2,-4)

g) (8,12,18,24,...)

h) $(0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2},...)$

i) (-31,-29,-26,-24)

j) (-10,-8,-6,-4,...)

2. Determina a razão das seguintes P.A.:

a) (8,13,18,23,...)

b) (-6,-3,0,3,...)

c) (-4,-4,-4,...)

d) (-10,-5,0,5,10,...)

e) $(-\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3},...)$

f) $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1,...)$

g) (20,17,14,11,...)

h) (8,4,0,-4,-8)

i) (-10,-8,-6,-4,...)

j) (-5,-1,3,7,11,...)

3. Completa as seguintes P.A.:

a) (3,8, , ,)

b) (27,23, , , ,...)

c) (-7,-4, , , ,)

d) (-3,3, , ,)

e) $(0, \frac{2}{3}, \quad, \quad, $

f) $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \quad, \quad, \quad,...)$

4. Escreve a P.A. cujo primeiro termo é 4 e a razão é -3 .

5. Escreve a P.A. cujo primeiro termo é -5 e a razão é 4 .

6. Escreve os três primeiros termos da P.A. cujo primeiro termo é 3 e a razão $\frac{1}{2}$.

7. Escreve os 5 termos da P.A. finita onde o primeiro termo é 1 e a razão é 6.

8. Sendo o quinto termo de uma P.A. 14 e a razão 3, qual é o sexto termo ?

9. Sabendo que oterceiro termo de uma P.A. é 11 e o quarto termo é 15, qual é a razão e qual o primeiro termo ?

10. Sendo o sexto termo de uma P.A. -9 e o sétimo -4, determina o nono termo.

- Lista 2 -

1. Dados a_1 e r calcula o que se pede:

a) $a_1 = 4$
$r = 6$
$a_9 =$

b) $a_1 = 8$
$r = -5$
$a_{11} =$

c) $a_1 = 5$
$r = \frac{1}{2}$
$a_8 =$

d) $a_1 = -6$
$r = -\frac{1}{3}$
$a_{16} =$

e) $a_1 = 1$
$r = 7$
$a_{12} =$

f) $a_1 = -\frac{1}{3}$.
$r = -\frac{1}{3}$
$a_{21} =$

2. Determima o décimo termo da P.A. (7,11,15,...)

3. Determina a_7 sendo $a_1 = -4$ e $r = 8$.

4. Dado $a_1 = 3$ e $a_2 = 10$ determina a_{15}.

5. Determina o que se pede:

a) $a_7 = 15$
$r = -2$
$a_1 =$

b) $a_1 = -5$
$a_{10} = 13$
$r =$

c) $a_5 = 24$
$r = 3$
$a_1 =$

d) $a_7 = 21$
$r = 3$
$a_1 =$

e) $a_{21} = 4$
$a_5 = 20$
$r =$

f) $a_1 = 10$
$a_3 = 16$
$r =$

g) $a_1 = 15$
$a_{16} = 60$
$r =$

h) $a_1 = -20$
$a_3 = -12$
$r =$

i) $a_1 = 1$
$a_5 = 13$
$r =$

6. Dados a_n, a_1 e r, determina n:

a) $a_n = 132$
$r = 12$
$a_1 = 72$

b) $a_n = 26$
$r = -2$
$a_1 = 40$

c) $a_n = 51$
$a_1 = 16$
$r = 5$

d) $a_n = 17$, $a_1 = -4$, $r = 3$

- Lista 3 -

Resolve os seguintes problemas:

1. Sendo o segundo termo de uma P.A. igual a 7 e o 8º termo igual a 17, calcula o primeiro termo e a razão.

2. Sabendo que o terceiro termo de uma P.A. é -13 e o nono termo é 11, escreve esta P.A.

3. Calcula o 15º termo da P.A. onde $a_4 = 27$ e $a_9 = 62$.

4. O sétimo termo de uma P.A. é 20 e o nono é 32. Calcula o 11º termo.

5. Calcula o vigésimo nº ímpar positivo.

6. Qual a razão da P.A. onde $a_1 = 11$ e $a_8 = 46$?

7. Na P.A. onde o sétimo termo é 43 e o quarto é 13, calcula o 10º termo.

8. O 3º termo de uma P.A. é 39 e o nono é 9, escreve os termos desta P.A.

9. Numa P.A. o 1º termo é 2 e o décimo é 5, qual o 5º termo ?

10. Numa P.A. de 6 termos, o 1º termo é 3 e o último é 38. Escreve esta P.A.

11. Se em uma P.A. o 1º termo é 2048 e a razão é $-\frac{1}{2}$, qual o valor do décimo termo ?

12. Inserir 4 meios aritméticos entre 3 e 38.

13. Interpolar 7 meios aritméticos entre 11 e 43.

14. Interpolar:

    7 meios aritméticos entre 2 e 34

    8 meios aritméticos entre 5 e 50

    5 meios aritméticos entre 7 e 31

    12 meios aritméticos entre -10 e 29

    6 meios aritméticos entre -5 e 30

    7 meios aritméticos entre 1 e 11

    6 meios aritméticos entre 3 e 31.

- Lista 4 -

1. Calcula a soma dos 30 termos da P.A. 2,4,6,8,10,...

2. Calcula a soma dos 15 primeiros termos da P.A. -4,-1,2,...

3. Calcula a soma dos 20 primeiros termos da P.A. 1,5,9,13,...

4. Calcula a soma dos 12 primeiros termos da P.A. -1,-3,-5,...

5. Calcula a soma dos 10 primeiros termos da P.A. -2,1,4,...

6. Calcula a soma dos 10 primeiros termos da P.A. onde $a_{10}= 17$ e $r= 2$.

7. Calcula a soma dos 15 primeiros termos da P.A. onde $a_{15}= 63$ e $r= 7$.

8. Calcula a soma dos 100 primeiros números pares positivos.

9. Calcula a soma dos termos de uma P.A. em que o 1º termo vale 5 e o 6º termo vale 25 .

10. Qual a soma dos 10 primeiros termos de uma P.A. em que o primeiro termo é 20 e a razão -5 ?

11. A soma dos 20 termos de uma P.A. é 590. Calcula a_1 sabendo que $a_{20}= 58$.

12. A soma dos 7 termos de uma P.A. é 77. Calcula a_1 sabendo que $a_7= 17$.

13. A soma dos termos de uma P.A. é 950. Calcula $\underline{n}$ sabendo que $a_1= 95$ e $a_n= 5$.

14. Um ciclista percorre 30 km na primeira hora, 25km na segunda hora e assim por diante em P.A. . Quantos quilômetros percorrerá em 6 horas ?

15. Com o objetivo de realizar uma excursão, uma turma concordou em economizar cr$ 1000,00 na primeira semana e em cada semana seguinte cr$ 200,00 a mais que a anterior. No final de 15 semanas quanto a turma economizou ?

PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS

- Lista 1 -

1. Verifica se as seqüências abaixo são P.G.

   a) $(5,10,15,20,...)$

   b) $(1,-3,9,-27,...)$

   c) $(4,4,4,...)$

   d) $(5,1,\frac{1}{5},\frac{1}{25},...)$

2. Determina a razão das seguintes P.G.

   a) $(2,8,32,128,...)$

   b) $(-10,10,-10,...)$

   c) $(1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},...)$

   d) $(5,-15,45,...)$

3. Escreve a P.G. cujo 1º termo é 3 e a razão é -5 .

4. Escreve a P.G. cujo 1º termo é -2 e a razão é 4 .

5. Escreve a P.G. cujo 1º termo é $\frac{1}{2}$ e a razão -3 .

6. Escreve a P.G. cujo 1º termo é 3 e a razão $\frac{2}{3}$.

7. Sabendo que o 1º termo de uma P.G. é -4, o 5º termo é -64 e o 4º termo é 32, escreve a P.G.

8. Sabendo que o 5º termo de uma P.G. é 24 e o 4º termo é 6 , determina o 2º termo.

9. Sendo 36 o 4º termo de uma P.G. e a razão -2, determina o 3º termo.

10. Escreve os 5 primeiros termos de uma P.G. onde o 1º termo é 2x e a razão é x .

- Lista 2 -

1. Calcula o 5º termo de uma P.G. em que o primeiro termo é -6 e a razão é -5 .

2. Qual o primeiro termo de uma P.G. de razão 2 e 7º termo é 64 ?

3. Em uma P.G. o primeiro termo vale -4 e a razão 3, calcula o 6º termo .

4. Em uma P.G., $a_4 = 128$ e $q = 4$. Calcula a .

5. Numa P.G. $a_6 = 486$ e $a_1 = 2$. Calcula a razão

6. Qual a razão de uma P.G. na qual $a_5 = 3000$ e $a_1 = 3$?

7. Quantos termos tem uma P.G. de razão 2, cujo primeiro termo é 2 e o último 256 ?

8. Numa P.G. o primeiro termo é 3 e a razão é 5 . Qual a posição do termo 1875 ?

9. Interpolar 4 meios geométricos entre 2 e 2048.

10. Inserir 2 meios geométricos entre -2 e 2 .

- Lista 3 -

1. Calcula a soma dos termos da P.G. (1,3,...,2187) .

2. Calcula a soma dos 5 primeiros termos da P.G. (2,8,...).

3. Calcula a soma dos 10 primeiros termos da P.G. (1,2,...).

4. Calcula a soma dos 6 primeiros termos da P.G. (3,9,...).

5. Qual a soma dos 8 primeiros termos de uma P.G.em que o primeiro termo é 1 e a razão é -2 .

6. Calcula a soma dos termos da P.G. (5,50,...,500000).

7. Calcula a soma dos 5 primeiros termos de uma P.G. onde $a_2 = 6$ e $a_3 = 18$.

8. Calcula o nº de termos de uma P.G. em que $a_1 = 2$, $a_2 = 8$ e $a_n = 2048$.

9. No 1º dia do mês uma criança recebe 3 gotas de remédio, no 2º dia recebe 9 gotas, no 3º dia 27 gotas e assim por diante. Quantas gotas recebeu ao final de 8 dias ?

10. Calcula o primeiro termo da P.G. cuja razão é 6, o último termo é 1296 e a soma dos termos é 1555 .

11. Calcula a soma dos 7 primeiros termos da P.G., cuja razão é 3 e o 3º termo 18 .

12. Interpolando-se três meios geométricos entre 5 e 80, resulta uma P.G. crescente cuja soma dos termos é ... .