Fichado
Tradução

I N S T I T U T O D E E D U C A Ç Ã O - PÔRTO ALEGRE

LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA

F R A Ç Õ E S O R D I N Á R I A S

by Catherine Stern

Quando estamos investigando os números de 1 a 100 (os quais chamamos ago-
nos inteiros
ra de totalidades), usamos um número absolutamente como um ponto inicial para oprações, tais como:adição, subtração, multiplicação e divisão.

Uma vez que as frações são criadas, podemos também fazer tôdas esta operações com alguma fração. Antes, porém, de (try our hand at them) manipulá-las investigaremos uma fração após outra, aprendendo sôbre a estrutura e características especiais de cada uma.

Podemos fazer isto de melhor modo com nossas MOLDURAS-FRAÇÕES (veja Fig . 56). É uma coleção de molduras retangulares com capas transparentes, tôdas do mesmo tamanho e cada uma representando 1 inteiro. Elas são feitas para receber
a 1ª lâmina é o todo inteiro e as outras representam as frac. de 1/2 a 1/10
a LÂMINAS-FRAÇÕES. Com cada moldura vai uma coleção de lâminas, também marcadas; por ex: a moldura para os meios tem 2 lâminas cada uma marcada com $\frac{1}{2}$, enquanto a moldura - sétimos tem 7 lâminas cada uma marcada com $\frac{1}{7}$.

EXPERIMENTOS COM "MEIOS"

Como introdução para o estudo dos " meios " o professor dará ao aluno um pedaço de cartolina do tamanho do inteiro e lhe pedirá que o divida ao meio com a tesoura. Êle a cortará ao meio para obter 2 partes iguais. Então lhe dará a moldura e lhe mostrará a lâmina marcada com 1/2, que corresponde exatamente às metades que êle mesmo obteve pela divisão do cartão em 2 partes.

Então o aluno insere a lâmina - "inteiro" na moldura dos meios e nota que a linha divisória da capa transparente divide o inteiro em 2 partes cada uma do tamanho de uma metade.

Daí o aluno descobre a seguinte igualdade:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

O mesmo caso pode ser expresso de outra maneira:

$\frac{2}{2} = 1$ ou 2 meios igual ao inteiro.

Neste ponto o professor explica o que o símbolo da fração significa.

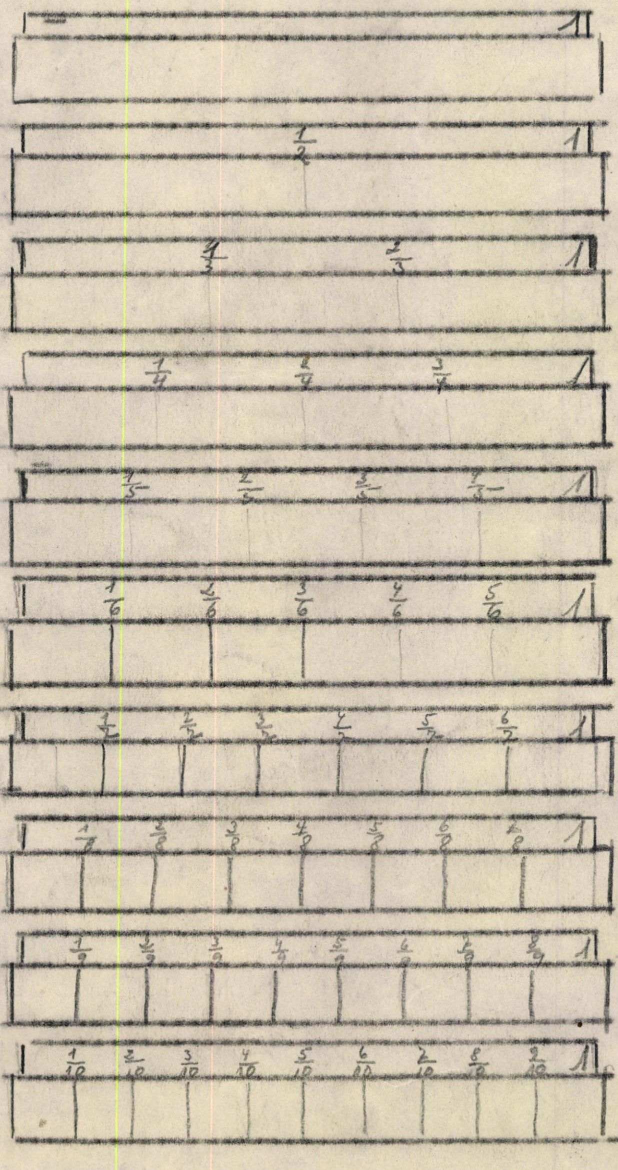
Cada símbolo tem 3 partes: a linha divisória entre os dois números para indicar a divisão, 1 algarismo acima da linha e outro abaixo.

CHILDREN DISCOVER ARITHMETIC

by Catherine Stern

FRAÇÕES

(pág. 232)



$\frac{1}{}$

$\frac{1}{2}$

$\frac{1}{3}$

$\frac{1}{4}$

$\frac{1}{5}$

$\frac{1}{6}$

$\frac{1}{7}$

$\frac{1}{8}$

$\frac{1}{9}$

$\frac{1}{10}$

O professor explica a analogia entre a fração, o número de 2 algarismos e a denominação dos números.

Que diz o 30, por exemplo?

Êle mostra um verdadeiro número 3, indicando com quantas <u>quantidades</u> de dez a coleção opera. Igualmente no número denominado 4 metros, o 4 dá o número de metros e a palavra "metro" denomina o tamanho da medida ou coleção com a qual êle opera. (deals)

Do mesmo modo o algarismo acima da linha divisória de uma fração enumera o <u>nº</u> de pedaços com os quais nós estamos operando, enquanto o algarismo abaixo diz o <u>tamanho</u>.

Quando escrevemos "um meio" queremos significar 1 lâmina - meio com a metade do tamanho de uma lâmina-inteiro. Quando dizemos 2 meios, queremos significar 2 lâminas do tamanho da metade.

Podemos recordar o tamanho de uma fração?

Fàcilmente, porque a própria fração indica a relação entre a parte e o todo. Coloquemos uma das lâminas sob a lâmina- <u>inteiro</u>. A razão entre a parte pequena e o todo é 1:2.

Repetimos: o meio é <u>1 das 2</u> partes nas quais o inteiro ou 1 está dividido.

EXPERIMENTOS COM TERÇOS

A moldura para terços tem uma capa com duas linhas divisórias que cortam o inteiro em 3 partes. Elas tem as marcas $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$. Há 3 lâminas que enchem esta moldura, cada uma com a inscrição $\frac{1}{3}$.

O aluno ~~xxxx~~ corta 1 terço do inteiro de cartolina para descobrir por si mesmo como dividir o inteiro em 3 partes iguais, cada uma representando 1 terço do inteiro. É-lhe dada a moldura-fração com os têrços e êle inicia as experiências sem qualquer auxilio. Quando êle retira as lâminas-terços e insere a lâmina-inteiro nesta moldura, êle descobrirá que os 3 terços são iguais ao inteiro.

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

ou

$$\frac{3}{3} = 1$$

O professor pode pedir à criança para lhe mostrar 2 dos terços; o aluno coloca 2 lâminas-terços sôbre a mesa. Quando pedir ao aluno para adicionar outro têrço registra o fato da adição descoberto:

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

Ou 2 terços e 1 têrço são 3 terços ou 1 inteiro.

Parece que podemos somar <u>terços</u> tão fàcilmente como unidades ou dezenas de metros.

O professor pode apontar para as 3 lâminas-terços e perguntar que aconteceria se 2 delas fossem subtraidas das 3.

O aluno nesse retira 2 lâminas-terços e descobre que 1 lâmina-têrço está restando:

$$\frac{3}{3} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Assim podemos também subtrir terços tão bem como as unidades ou dezenas ou metros.

Agora o significado da fração está recordado.

Novamente o aluno dispõe 2 terços sôbre a mesa.

Como êle registraria o que êle tem? Pela escrita $\frac{2}{3}$.

Assim o 2 acima da linha divisória lhe diz que êle tem 2 lâminas e o 3 abaixo da linha lhe diz seu tamanho - terços.

Quando o professor pede ao aluno para selecionar $\frac{2}{3}$, êle procura 2 pedaços - 2 lâminas-terços.

Venha buscar $\frac{1}{2}$: êle porá 1 pedaço ante você - a lâmina-meio.

De cada vez êle trará tantos pedaços quantos o nº acima da linha divisória enumerar. Êste nº, então, é chamado numerador da fração, porque êle denota o nº de pedaços ou partes com as quais está operando. (A palavra vem do Latim numerare, significando enumerar).

Quando a criança é interrogada sôbre $\frac{2}{3}$, ela procura lâminas de um tamanho determinado - as lâminas-terços.

Quando $\frac{1}{2}$ é pedido, êle traz o maior pedaço, nós temos - a lâmina-meio. Em cada caso, o algarismo abaixo da linha denomina o tamanho do pedaço.

Entretanto, êle é chamado denominador (da palavra latina denominare, significando denominar).

EXPERIMENTOS COM QUARTOS ATÉ DÉCIMOS

A criança agora está pronta para fazer experiências com tôdas as lâminas fracionárias para ter certeza que êle agora distingue uma da outra - conhece quais são as frações grandes e quais são as pequenas sem ser desorientado pelo tamanho do denominador. Nestas experiências êle usa a coleção completa de molduras e as lâminas equivalentes.

Inicialmente, tôdas as lâminas são retiradas das molduras e empilhadas num monte com as molduras alinhadas no outro lado da mesa. A criança apanha uma lâmina, lê o "nome" ($\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$ ou seja qual fôr) e a coloca atrás, dentro da moldura correspondente.

Lâmina após lâmina é colocada atrás, dentro de sua respectiva moldura, até a pilha de lâminas ter desaparecido.

Após esta experiência, a tarefa pode ser mudada.

Desta vez êle escolhe uma das molduras cheias e tem de selecionar e inserir a lâmina apropriada da pilha.

Para a moldura dos décimos êle precisa da lâmina do tamanho $\frac{1}{10}$; para a moldura dos meios, uma lâmina do tamanho $\frac{1}{2}$ e assim por diante. Dêste modo o tamanho relativo às frações se torna familiar para as crianças.

Elas não procurarão uma lâmina grande quando êles querem $\frac{1}{10}$, ou uma lâmina pequena quando êles precisam de $\frac{1}{2}$, a maior de tôdas as frações.

Assim êles aprendem pela experiência prática que um denominador grande designa um tamanho pequeno.

Como uma experiência final, a criança coloca as lâminas, uma abaixo da outra, de acôrdo com o tamanho; a tarefa consiste em selecionar as denominações desde meios descendo até décimos. Se alguma criança começa esta experiencia ainda pensando que a lâmina com 6 abaixo da linha divisória deve ser menor do que uma com 8, em breve verifica que o oposto é o verdadeiro: os sextos são maiores do que os oitavos.

SOMANDO E SUBTRAINDO

FRAÇÕES HOMOGÊNEAS

O aluno agora escolhe alguma moldura e experimenta com ela. Tomando 4 lâminas-quartos e comparando-as com o inteiro, êle acha:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1$$

$$\text{ou} \quad \frac{4}{4}=1$$

Entre outras palavras 4 quartos formam 1 inteiro.

Ao colocar juntas 1 lâmina e 2 outras, o aluno descobre:

$$\frac{1}{4}+\frac{2}{4}=\frac{3}{4} \quad \text{(1 quarto e 2 quartos são 3 quartos)}$$

E tomando 3 lâminas das 4 lâminas, o aluno descobre que 1 lâmina está sobrando:

$$\frac{4}{4}-\frac{3}{4}=\frac{1}{4} \quad \text{(4 quartos menos 3 quartos sobra 1 quarto)}$$

Assim o cômputo com frações Homogêneas, isto é, frações do mesmo tamanho - não é dificil. Ao aluno são dados alguns, em soma e subtração, escrito em outra forma:

$$+\begin{array}{c}\frac{1}{3}\\[4pt]\frac{2}{3}\\\hline\end{array}\qquad -\begin{array}{c}\frac{3}{4}\\[4pt]\frac{2}{4}\\\hline\end{array}\qquad +\begin{array}{c}\frac{1}{2}\\[4pt]\frac{1}{2}\\\hline\end{array}\qquad +\begin{array}{c}\frac{2}{4}\\[4pt]\frac{2}{4}\\\hline\end{array}\qquad -\begin{array}{c}\frac{3}{3}\\[4pt]\frac{1}{3}\\\hline\end{array}\qquad -\begin{array}{c}\frac{1}{4}\\[4pt]\frac{1}{4}\\\hline\end{array}$$

De cada vez, o aluno confere seu trabalho com as lâminas frações. Colocando juntas 1 lâmina-têrço com mais 2, êle acha 3 têrços ou 1 inteiro. Pela retirada agora de 2 quartos de 3 quartos, êle acha 1 lâmina-quarto restante.

Pela adição de 1 meio a outro meio êle chega aos 2 meios ou 1 inteiro. No último exemplo êle remove 1 lâmina-quarto e nada sobra.

Os exemplos acima, todos distribuidos com frações homogêneas ou para usar o novo têrmo, frações com o mesmo denominador. Que fêz agora o aluno quando somou estas frações homogêneas? Êle somou o nº de pedaços - noutras palavras, os numeradores.

Assim chegamos ao princípio estrutural - à regra que contém a verdade em todos os casos de adição de fração homogêneas.

→ Para somar frações homogêneas, somam-se os numeradores das frações e escreve-se a soma sôbre o denominador comum.

Exemplo: $\frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{\text{Soma dos numeradores}}{\text{Denominador comum}}$

$$\frac{1 + 2}{4} = \frac{3}{4}$$

Que fêz o aluno quando subtraiu as frações homogêneas?

Quando êle tirou 2 lâminas-quartos das 3 lâminas-quartos obteve 1 lâmina-quarto restante. Novamente êle trabalhou sòmente com o nº de lâminas - ou com os numeradores das frações.

→ Para subtrair frações homogêneas, subtraem-se os numeradores e se escreve a difereça sôbre o denominador comum.

Exemplo: $\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{\text{Diferença dos numeradores}}{\text{Denominador comum}}$

$$\frac{3 - 1}{4} = \frac{2}{4}$$

MULTIPLICANDO UMA FRAÇÃO POR UM Nº INTEIRO

descobriu anteriormente

O aluno ~~acha em seu "foregoing"~~ que 3 dos quartos, por exemplo, somam $\frac{3}{4}$. Podemos chegar a êste total por adição (tomando $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$) ou por ~~xu~~ multiplicação, tomando 1 lâmina-terço 3 vêzes ($3x \frac{1}{4}$).

Assim podemos fàcilmente descobrir como multiplicamos uma fração por um nº inteiro. Deixemos o aluno colocar 3 vêzes 2 lâminas-quintos sôbre a mesa; êle achará que resultam 6 lâminas-quintos. Agora deixe-o achar o total de 4 vêzes $\frac{2}{3}$. Desta vez êle terá 4 filas, contendo cada uma 2 lâminas-terços, ou 8 lâminas-terços. Êle escreve embaixo o que encontrou:

$$3X \frac{1}{4} \qquad 3 X \frac{2}{5} = \frac{,6}{5} \qquad 4 X \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

Assim nós descobrimos que multiplicando uma fração por um nº inteiro significa multiplicar o número de partes pelas frações com as quais estamos operando. Isto nos dá a regra:

→ Para multiplicar uma fração por um inteiro, digo, nº inteiro, multiplica-se o numerador da fração pelo nº inteiro e coloca-se o produto sôbre o denominador.

Exemplo: $2 X \frac{3}{7} = \frac{\text{nº inteiro vêzes numerador}}{\text{denominador}}$

$$\frac{2 x 3}{7} = \frac{6}{7}$$

O principal objetivo destas experiências é desenvolver a compreensão clara de que multiplicar uma fração significa multiplicar o número de pedaços, conseqüentemente, multiplicamos o numerador. Isto cedo se torna o mais natural procedimento o qual pode fàcilmente ser reconstruido; os alunos que simplesmente memorizam a regra sem tal percepção do significado estrutural, estão certos de se perderem. Se o aluno acha $10 \times \frac{3}{5} = \frac{30}{5}$ nós lhe deixamos o resultado $\frac{30}{5}$, enquanto os 30 pedaços estão visíveis para êle. Sòmente depois que o nôvo processo estiver realmente ensinado é que devemos pedir-lhe para preparar o resultado - mudar a fração imprópria $\frac{30}{5}$ para o número inteiro 6.

FRAÇÕES PRÓPRIAS E IMPRÓPRIAS E NÚMEROS MISTOS

Aqui o aluno pode experimentar com lâminas-quintos, usando duas molduras e 10 lâminas-quintos. Êle dispõe $\frac{7}{5}$, $\frac{9}{5}$ e $\frac{6}{5}$ sucessivamente sôbre a mesa. Em vez de usar tôdas as 7 lâminas-quintos, êle pode substituir 1 inteiro por $\frac{5}{5}$ ou cobrir as primeiras 5 lâminas-quintos com 1 lâmina-inteiro. Nos três exemplos êle acha:

$$\frac{7}{5} = 1 + \frac{2}{5} = 1\frac{2}{5}$$

$$\frac{9}{5} = 1 + \frac{4}{5} = 1\frac{4}{5}$$

$$\frac{6}{5} = 1 + \frac{1}{5} = 1\frac{1}{5}$$

Escrevemos as frações $\frac{7}{5}$, $\frac{9}{5}$ e $\frac{6}{5}$ e o aluno de início construiu com êles 7, 9 e 6 lâminas-quintos. Porém êle já descobriu que cada uma dessas frações é maior do que o inteiro.

Chamamos $\frac{7}{5}$ uma fração imprópria e $1\frac{2}{5}$ um número misto.

O aluno lê o nº misto que achou:

"Um e dois-quintos, um e quatro-quintos, um e um-quinto".

Se $\frac{7}{5}$, $\frac{9}{5}$ e $\frac{6}{5}$ são chamadas frações impróprias, $\frac{5}{5}$ deve ser chamada assim também, porque é igual a 1 inteiro e não é fração própria, a qual por definição é uma parte de um inteiro. Noa exemplos acima $\frac{2}{5}$, $\frac{4}{5}$ e $\frac{1}{5}$ são frações próprias, porque elas são menores do que 1 inteiro.

Por significação das lâminas, o aluno pode fàcilmente determinar com quais êle está operando . Êle tem sòmente de tomar o inteiro e medir : $\frac{3}{5}$ é menor do que o inteiro, $\frac{7}{5}$ é mais do que 1 inteiro. Se nós olharmos das lâminas para os algarismos, descobriremos uma simples relação numérica.

___ Frações cujo numerador é menor que o denominador, são frações próprias. (Temos menos que o número de pedaços que perfazem o inteiro, como 3 quintos fora dos 5 quintos).

___ Frações cujo numerador é tão grande ou maior do que o denominador são frações impróprias. (Temos todos ou maisq que todos os pedaços que perfazem o inteiro, como 5 quintos ou 7 quintos).

___ Um número misto é um número composto de um número inteiro e uma fração.

Uma fração imprópria pode ser mudada em um número misto e vice-versa.

Se tivermos uma grande quantidade de lâminas-quintos - vamos dizer, $\frac{29}{5}$ - qual é a maneira mais rápida de compreender quantos inteiros e quintos êles representam?

Um modo é medir com a lâmina-inteiro - isto é, agrupar cada 5 quintos juntos. (Ocultando) Cobrindo cada 5 lâminas-frações com uma lâmina-inteiro, chegamos aos 5 inteiros e 4 lâminas-quintos restantes. Descobrimos outro meio quando trabalhamos com dinheiro.

A fração quando escrita em símbolos ($\frac{29}{5}$) contém a indicação para chegar à solução: a linha entre o numerador e o denominador é chamada linha divisória.

Entretanto, para transformar a fração imprópria $\frac{29}{5}$ em inteiros e frações, nós simplesmente transportamos através da divisão indicada: 29 : 5 = 5 e um resto de 4. Êste resto deve ser dividido por 5 também, assim obtemos o resultado: $5 \frac{4}{5}$. Olhando para os algarismos descobrimos a regra que é dada no livro-texto e que parece claro e simples para nossas crianças:

___ Para transformar uma fração imprópria em um número misto (ou um nº inteiro), dividimos o numerador pelo denominador. O resto da divisão é para ser expresso por uma fração com o mesmo denominador.

O aluno não achará dificuldade na mudança de $\frac{20}{4}$ ou $\frac{11}{3}$ ou $\frac{7}{2}$ para um inteiro ou um nº misto.

Se êle quiser trabalhar com os materiais, êle, naturalmente, precisará de mais lâminas-quartos, lâminas-terços e lâminas-meios que a moldura contém, desde que a fração imprópria consiste em mais de 1 inteiro.

Agora vimos para um degrau que é o reverso do procedimento. Quando o aluno estava estudando números denominados êle não só mudou (dinheiro) níquel em centavos como centavos em níquel. A mesma operação é usada mudando inteiros em frações as quais, obviamente, serão frações impróprias.

Se o aluno fôr interrogado sôbre quantos quintos há em 3 inteiros (na forma usual: $3 = \frac{?}{5}$) êle coloca 3 lâminas-inteiros, lado a lado, e mede quantos quintos êles contêm.

Cada um é igual a 5 quintos, assim 3 inteiros igual a 3x5 ou 15 quintos;

a
3 inteiros = ? quintos
3 inteiros = (3 x 5) quintos

$$3 = \frac{15}{5}$$

Se agora lhe fôr dado o exemplo $4 = \frac{?}{3}$, ou 4 inteiros igual a quantos terços? Êle tem sòmente de pensar: 1 inteiro igual a 3 terços, assim 4 inteiros igual a 4 x 3 ou 12 terços. Noutros termos, êle escreve o exemplo como se êle estivesse operando com números denominados em vez de frações. Então êle sabe como proceder.

Há um procedimento aritmético também que conduz a rápidas e fieis soluções. 1 inteiro é igual a $\frac{3}{3}$ ou $\frac{4}{4}$ ou $\frac{9}{9}$, assim 5 inteiros, por exemplo, igual a (~~xxxxxxxx~~) $5 \times \frac{3}{3}$ ou $5 \times \frac{4}{4}$ ou $5 \times \frac{9}{9}$. Se quisermos mudar inteiros em frações com o denominador 3, multiplicamos por $\frac{3}{3}$. Se quisermos uma fração com o denominador 4, multiplicamos por $\frac{4}{4}$, assim:

$$4 = \frac{?}{3} \qquad 4 \times \frac{3}{3} = \frac{12}{3}$$

$$6 = \frac{?}{8} \qquad 6 \times \frac{8}{8} = \frac{48}{8}$$

→ Para transformar um inteiro em uma fração com um denominador dado "n", multiplica-se o nº inteiro por $\frac{n}{n}$.

Visto que êste procedimento é fàcilmente reconstruído, a regra comumente dada e estruturalmente indequada. (inadequada)

Embora a regra trabalhe para a resposta correta, é cega para a solução real: "Para transformar um número inteiro em uma fração com denominador dado, multiplica-se o nº inteiro pelo denominador. O resultado é o novo denominador".

Se o aluno perguntar por que a regra trabalha - não há resposta. Se as palavras são esquecidas, não há orientação pela qual a solução possa ser reconstruída.

Como transformar um número misto em fração imprópria?

Deixemos que o aluno experimente descobrir a operação por si mesmo.

O aluno pode, naturalmente, obter a resposta com as lâminas, mas pode também tão fàcilmente pensá-lo através de:

4 inteiros são 20 quintos e mais 2 quintos são 22 quintos.

Êle escreve: $4\frac{2}{5} = \frac{22}{5}$

Nossa regra aritmética é outra rápido e seguro guia para a representação:

$$4\frac{2}{5} = \frac{?}{5} \qquad \left(4 \times \frac{5}{5}\right) + \frac{2}{5} = \frac{20}{5} + \frac{2}{5}$$
$$= \frac{22}{5}$$

→ <u>Para transformar um número misto em fração imprópria, transforma-se o número inteiro em uma fração com o mesmo denominador e adiciona-se a fração original.</u>

Depois que êste sensível procedimento tiver sido empregado um grande número de vêzes, não há prejuizo em conduzir o aluno à abreviação na representação, tão desastradamente expressa pela hábil receita: "Para transformar um número misto em uma fração imprópria, multiplica-se o número inteiro pelo denominador, adiciona-se o numerador da fração e coloca-se o resultado sôbre o denominador". Se o inteiro é visualizado com 5 quintos ou $\frac{5}{5}$, a mudança de um número inteiro ou números mistos em frações impróprias será sempre feita com completa compreensão.

DIVISÃO COM FRAÇÕES

Quando somamos ou subtraímos frações homogêneas ou multiplicamos uma fração por um inteiro, somamos, subtraímos ou multiplicamos o "número de pedaços", de cada vez - isto é, trabalhamos com o numerador da fração. 2 sétimos mais 3 sétimos; 6 sétimos menos 2 sétimos; 5 vêzes 4 sétimos são tratados exatamente do mesmo como $(2 + 3)$ $(6 - 2)$ ou (5×4) ou alguma cousa, maçãs ou varetas ou dezenas.

A característica especial da fração torna-se aparente, entretanto, se <u>dividimos</u> com frações. Vamos usar material de frações, nas seguintes experiências.

O professor toma a lâmina-inteiro e a bissecciona, isto é, divide-a em dois, com um lápis ou com régua.

O aluno registra: $1{:}2 = \frac{1}{2}$. Então a professôra escolhe uma das lâminas -meios, divide-a em dois e pede ao aluno para achar a LÂMINA-FRAÇÃO que é igual à metade da lâmina-meio. O aluno vê que 1 lâmina-quarto é a metade do tamanho da (lâmina-meio) lâmina $\frac{1}{2}$ e escreve:

$$\frac{1}{2} \div 2 = \frac{1}{4}$$

Igualmente ela acha que a lâmina-têrço, dividida por dois (2) é igual à lâmina-sexto, e assim por diante.

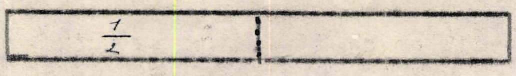
Podemos conferir o caso da divisão pelo caso da multiplicação correspondente : 2 lâminas-meios igual a 1 inteiro.

2 lâminas-quartos igual a 1 lâmina-meio

2 lâminas-sextos igual a 1 lâmina-têrço.

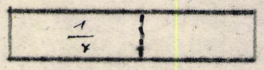
Assim, incidentalmente, achamos algumas novas relações com as quais será estudado num novo degrau:

$\frac{2}{2} = 1$ $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, etc.



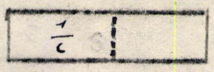
$1 : 2 = \frac{1}{2}$

$2 \times \frac{1}{2} = 1$



$\frac{1}{2} : 2 = \frac{1}{4}$

$2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$



$\frac{1}{3} : 2 = \frac{1}{6}$

$2 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

Agora o aluno divide cada fração por 3 e prova o resultado pela multiplicação. Quando a lâmina-inteiro é dividida por 3, o resultado é $\frac{1}{3}$; 3 lâminas-terços formam um inteiro. Quando a lâmina-meio é dividida em 3 partes iguais, o resultado é uma lâmina do tamanho de $\frac{1}{6}$; 3 lâminas do tamanho de $\frac{1}{6}$ agora igual à lâmina-meio.

Assim êle chega aos seguintes fatos:

$1 : 3 = \frac{1}{3}$ $3 \times \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$

$\frac{1}{2} : 3 = \frac{1}{6}$ $3 \times \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{4} : 3 = \frac{1}{12}$ $3 \times \frac{1}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

Qual é a significação estrutural dêstes fatos da divisão?

Que acontece quando êle divide uma metade em 2 partes ($\frac{1}{2} : 2 = \frac{1}{4}$)?

O inteiro, por êste ato é agora cortado em quatro partes. Assim, dividir por 2 significa duplicar o número de partes do inteiro, transformar os meios em quartos. Que acontece se o aluno divide uma fração por 3? Êle acha $\frac{1}{2} : 3 = \frac{1}{6}$.

Divisão do meio em 3 partes equivale à divisão do inteiro em 6 partes; há 3 vêzes quantas partes houver no inteiro. Em vez de $\frac{1}{2}$ que significa 1 de 2 partes, chegamos a $\frac{1}{6}$ a 1 de 6 partes. Dividindo uma fração por 2 ou 3, mudamos seu tamanho, sua denominação. Agora estamos prontos para formular o princípio estrutural - a regra para divisão de frações:

——> Para dividir uma fração por um número inteiro, multiplica-se o denominador da fração pelo número inteiro.

Divida terços por 3 e você obterá nonos. Divida quintos por 2 e você obterá décimos. A criança pode ainda trabalhar com os materiais, mas ela pode usá-los para verificação sòmente.

Se êle encontra os exemplos no papel, êle sabe o que significam e como são resolvidos.

FRAÇÃO DE FRAÇÃO

Uma vez que as frações são criadas, tôdas as operações feitas com inteiros são experimentadas no novo domínio também. Sabemos como achar $\frac{1}{4}$ de alguma totalidade: dividimo-la por 4 e olhamos para uma das 4 partes resultantes da divisão.

Vamos tomar uma fração de fração, por exemplo, $\frac{1}{4}$ de $\frac{1}{2}$.

Isto significa divisão de $\frac{1}{2}$ por 4 (o que fazemos pela multiplicação do denominador por 4):

$$\frac{1}{4} \text{ de } \frac{1}{2} = \frac{1}{2} : 4 = \frac{1}{8}$$

Se $\frac{1}{4}$ de um número é $\frac{1}{8}$, $\frac{3}{4}$ deve ser 3 vêzes as much:

$$\frac{3}{4} \text{ de } \frac{1}{2} = 3 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

Se tomamos uma fração, como $\frac{1}{4}$ de um número, tomamos o número $\frac{1}{4}$ vêzes.

9

$$\frac{1}{4} \text{ de } \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \quad \text{e} \quad \frac{3}{4} \text{ de } \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

Assim descobrimos como frações são multiplicadas por uma outra.

Que fizemos? Dividimos por 4 - isto é, nós multiplicamos o denominador por 4 e obtemos oitavos; então multiplicamos por 3 - isto é, multiplicamos o numerador por 3 e obtemos $\frac{3}{8}$. Em vez de dois movimentos, podemos representar num ato:

$$\frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3 \times 1}{4 \times 2} = \frac{3}{8}$$

O aluno pode verificar o resultado com as lâminas:

Êle troca a lâmina-meio por 4 lâminas-oitavos.

Se não tomarmos o "meio" completo, mas sòmente $\frac{3}{4}$ do mesmo, teremos 3 das lâminas-oitavos. Do mesmo modo, podemos achar $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{2}$ ou $\frac{2}{3}$ vêzes $\frac{1}{2}$;

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2 \times 1}{3 \times 2} = \frac{2}{6}$$

1 têrço de 1 meio é 1 sexto e 2 terços são 2 sextos.

Se examinarmos os números concluimos que uma regra muito simples governa a multiplicação de uma fração por outra:

Duas frações são multiplicadas, multiplicando um numerador pelo outro numerador e um denominador pelo outro denominador.

Os professôres, naturalmente, gritarão contra nosso fim um exemplo com $\frac{2}{6}$; para de início êle treinarem a criança na mudança de frações para seus mais baixos têrmos. Mas não queremos que o façam mecânicamente. Em nosso método atacamos o problema pela demonstração do significado de tal procedimento com nossos esquemas concretos.

FRAÇÕES EQUIVALENTES

O alvo dêste degrau é mostrar o significado estrutural da mudança de frações para mais alto e mais baixos têrmos.

Como um requisito, o aluno deve estudar frações equivalentes - isto é, frações do mesmo valor - pela significação das experiências com os materiais.

As molduras - frações são colocadas uma abaixo da outra e o aluno enche a metade da moldura com lâminas onde fôr possível.

Assim êle acha : $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10}$

Agora êle enche um têrço de tantas molduras quanta êle puder. O professor lhe mostra a maneira de achar quais há: elatem apenas que pôr uma régua sôbre a linha marcada $\frac{1}{3}$ na lâmina-têrços e acha onde ela coincide com linhas nas outras molduras.

Êle descobre:

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{4}{12}$$

Êste experimento mostra uma relação razoável. Vamos tomar uma totalidade (integer) - por exemplo, 6. Quando o multiplicamos por 5 obtemos 30, e quando dividimos 30 novamente por 5, chegamos ao ponto inicial, 6. Igualmente, dividimos $\frac{1}{2}$ por 2 e obtemos $\frac{1}{4}$, e então multiplicamos $\frac{1}{4}$ por 2 e chegamos a $\frac{2}{4}$. A fração final, $\frac{2}{4}$, naturalmente tem o mesmo valor que $\frac{1}{2}$. Consequentemente chamamos $\frac{2}{4}$ e $\frac{1}{2}$ frações equivalente.

Se dividimos uma fração por 2, multiplicamos o denominador por 2. Se multiplicamos uma fração por 2, multiplicamos o numerador por 2.

O que fizemos acima em dois movimentos pode ser dado em uma simples operação:

$$\frac{1}{2} \times \frac{2}{2} = \frac{2}{4}$$

Das duas frações equivalentes $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$, $\frac{2}{4}$ mostra o maior número e está por isso em mais altos têrmos; $\frac{1}{2}$ não está somente em "têrmos mais baixos" (desde que os números 1 e 2 são menores), mas nós "mais baixos têrmos".

Estruturalmente, chegamos à "parte maior" com a qual podemos representar o valor de $\frac{1}{2}$. Se vamos para os têrmos maiores, obtemos 2 quartos ou 3 sextos ou 4 oitavos - isto é, obtemos mais e mais partes do menor e menor tamanho.

Podemos agora formular a regra de acôrdo com a qual nós mudamos frações para têrmos mais altos:

Para mudar uma fração para têrmos mais altos, multiplicam-se ambos o numerador e o denominador pelo mesmo número. É óbvio que não mudamos o valor da fração por tal operação. O que agora fazemos é multiplicar de cada vez por 1 desde que $\frac{3}{3}$ ou $\frac{4}{4}$ são iguais a 1. Sabemos que um número multiplicado por 1 não é mudado, assim isto dá sentido ao fato de chegarmos a frações equivalentes se multiplicarmos numerador e denominador pelo mesmo número.

Êste conceito é usado quando queremos mudar uma fração em outra com denominador dado. Quantos oitavos são 3 quartos?

Êle escreve abaixo dos números.

Desde que ela já sabe ela deve multiplicar o denominador 4 por 2 a fim de chegar a 8, ela vê que deve também multiplicar o numerador 3 pelo mesmo número:

$$\frac{3}{4} = \frac{?}{8}$$

$$\frac{3}{4} \times \frac{2}{2} = \frac{6}{8}$$

Assim êle acha que 3 quartos é igual a 6 oitavos.

Não há dificuldade em tais tarefas.

Em breve ela será capaz de fazer o degrau intermediário mentalmente.

Lendo $\frac{7}{8} = \frac{?}{24}$, ela domina a relação entre 8 e 24, e, diretamente, multiplicando 7 também por 3, chega até a resposta $\frac{21}{24}$.

Vamos agora para a terefa oposta: transformar uma fração para mais baixos têrmos e para os mais baixos têrmos.

Se o professor coloca 3 lâminas-sextos sôbre a mesa e pergunta ao aluno que outra lâmina caberia (exatamente) dentro e êle ràpidamente escolherá a lâmina-meio e inserirá 3 lâminas-sextos, chegando ao resultado: $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

O aluno é convidado a olhar para tôdas as frações possíveis com 6 como denominador:

$$\frac{1}{6} \quad \frac{2}{6} \quad \frac{3}{6} \quad \frac{4}{6} \quad \frac{5}{6} \quad \frac{6}{6} \quad 1$$

Qual pode êle mudar por pedaços maiores? Naturalmente as 2 lâminas-sextos podem ser substituidas por 1 lâmina-têrço. Três lâminas-sextos podem ser substituidas por (uma) 1 lâmina-meio, como êle já achou. E 4 lâminas-sextos igual a 2 lâminas-terços. Êle não pode fazer nada com 5 lâminas-sextos. Êle não pode ~~xxx~~ transformá-los em têrmos mais baixos; êles já estão nos têrmos mais baixos. Que feição característica possuem as outras 3 frações que as fazem mutáveis para têrmos mais baixos em contraste com $\frac{5}{6}$? Entre seus numeradores e denominadores existe uma relação: 3 sextos são metade do inteiro, 2 sextos são um têrço e 4 sex tos são naturalmente 2 vêzes um têrço. Há um fator commum (além de 1) em 3 e 6 - isto é, cada um (têrmo) tem um fator commum com o outro (têrmo). Entre 5 e 6, entretanto, não há relação, não há fator commum.

As frações $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$ estão nos têrmos mais baixos, porque o numerador e o denominador não têm outro fator em commum (além de 1). Assim, também, são $\frac{5}{7}$, $\frac{3}{8}$ e $\frac{2}{9}$; não há fração de maior tamanho na qual elas possam ser transformadas. Por outro lado, uma fração como $\frac{4}{8}$ não está nos mais baixos têrmos. Nossas crianças cedo conhecerão nossos materiais fracionários tão bem que elas imediatamente inserem as 4 lâminas-oitavos na moldura - meio e quasi instantânea mente registra suas descobertas como $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$. Se o aluno deixa de lado o material e estuda $\frac{4}{8}$ sôbre o papel, êle observa que neste exemplo, ambos, o numerador e o denominador contém 4. O 4 é um fator comum. Êle pode agora tornar a escrever a fração como $\frac{4}{8} = \frac{1 \times 4}{2 \times 4} = \frac{1}{2}$.

Os $\frac{4}{4}$ são eliminados, porque é igual a 1 e, entretanto, deixa o valor da fração (não mudada) intata.

Tal eliminação de fatôres comuns é chamada cancelamento.

Se os números sôbre e sob a linha da fração contiverem ambos um 9, por exemplo, nós podemos cancelar a fração por 9, desde que êste ato ,digo, desde que por êste ato nós simplesmente eliminamos $\frac{9}{9}$, sem mudança do valor da fração. Quando terminamos com uma fração na qual ~~xx~~ não há fator commum, teremos mudado a fração para seus mais baixos têrmos.

Para mudar uma fração para seus têrmos mais baixos têrmos, divida ambos, o numerador e o denominador pelo mesmo número. Quando o numerador e o denominador duma fração não podem ambos ser divididos exatamente por um outro número, exceto 1, a fração está em seus mais baixos têrmos.

Esta regra tem sentido para nossos alunos, porque êles trabalharam fora do processo descrito. Desde que êles compreendam o significado do princípio, êles podem aplicar a regra em vez de usar os materiais para resolver algum exemplo:

$$\frac{6}{10} = ?$$

$$\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

Ambos os números contém 2, assim cada um é dividido por 2.

No início, particularmente, as crianças gostam de verificar seus resultados com nossos materiais.

Pela inversão de 6 lâminas-décimos na moldura-quintos, êles vêm que a solução está correta e, desde que não há partes de tamanho maior dentro da qual êles possam mudar os quintos, êles sabem que $\frac{3}{5}$ é agora a fração nos seus têrmos mais baixos.

Nesta parte o aluno adquiriu uma compreensão da facilidade com que algumas frações podem ser mudadas em outras com um denominador dado.

No próximo degrau êle deparará com a necessidade do uso dêstes recursos em novas operações

No próximo degrau êle deparará com a necessidade do uso dêstes recursos em novas operações.

S O M A N D O E S U B T R A I N D O

FRAÇÕES HETEROGÊNEAS

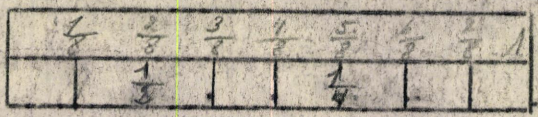
A finalidade dêste próximo degrau é ensinar soma e subtração de frações heterogêneas, isto é, frações com denominadores (denominadores) diferentes. O professor escreve no quadro alguns exemplos, tais como: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = ?$

É excitante ver nossas crianças resolver êste exemplo.

Alguns ensaiam a moldura-meio, primeiramente, e inserem as 3 lâminas (a lâmina-meio, a lâmina-quarto e a lâmina-oitavo).

Mas não há marca que indique o resultado, assim a moldura-meio está errada. A seguir êles podem experimentar a moldura-quarto, e novamente êles podem achar o resultado. Finalmente êles colocam tôdas as 3 lâminas dentro da moldura - oitavos e agora êles vêem claramente que as frações somam $\frac{7}{8}$.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$



(Fig. 58)

Como pode o aluno chegar ao mesmo resultado sem a moldura? Que fez a moldura para obter o resultado? Quando $\frac{1}{2}$ foi colocado dentro dela o aluno viu que alcançou a marca $\frac{4}{8}$. Quando somou $\frac{1}{4}$ ficaram mais 2 oitavos que formaram um total $\frac{6}{8}$. Quando a última lâmina $\frac{1}{8}$ foi inserida, ela teve $\frac{7}{8}$ juntos. Isso significa que êle agora somou oitavos. Isto pode ser feito sôbre o papel também. Não podemos somar meios, quartos e oitavos diretamente, assim como não podemos somar maçãs, laranjas e bananas, até que nós as agrupemos sob a mesma denominação "fruta".

Igualmente temos de mudar frações diferentes (heterogêneas) para frações equivalentes que tenham o mesmo denominador. Se não usarmos as lâminas, mas sòmente olharmos para os números, como podemos achar um denominador conveniente? Mudamos uma fração pela multiplicação. Entre os números 2, 4 e 8 é o 8 que contém 2 e 4 como fatôres e assim seria achado o denominador comum:

$$\frac{1}{2} \times \frac{4}{4} = \frac{4}{8}$$

$$\frac{1}{4} \times \frac{2}{2} = \frac{2}{8}$$

$$= \frac{1}{8}$$

$\frac{7}{8}$

$$\frac{7}{8}$$

O trabalho no papel novamente corresponde ao atual trabalho das crianças com os materiais.

Como somamos quintos e décimos? Desde que 10 contém 5 como fator - ou, como costumamos dizer, é um multiplo de 5 - mudamos os quintos para décimos e somamos décimos.

Subtrair frações diferentes (heterogêneas) não é mais dificil do que somá-las. Os primeiros exemplos seriam tais que o aluno possa executá-los com o material. Como um início o seguinte exemplo pode ser dado: $\frac{7}{9} - \frac{2}{3} = ?$

Desta vez o aluno coloca 7 lâminas-nonos em uma fila

Pega 2 lâminas-terços que estão para ser subtraidas e cobre 6 das lâminas -nonos com elas. Quando êle subtrai estas retirando-as para um lado, sòmente 1 lâmina-nono resta.

Eis como o aluno trabalha com os números:

$$\begin{array}{rcl} \frac{7}{9} & = & \frac{7}{9} \\ -\frac{2}{3} & = & \frac{6}{9} \\ \hline & & \frac{1}{9} \end{array}$$

Desde que 9 é um múltiplo de 3, podemos fàcilmente transformar terços em nonos e nossa tarefa é simplesmente subtrair nonos.

Tudo que resta para aprender sôbre soma e subtração de frações é transpote e empréstimo. Como de costume, quando a nova feição é introduzida, o professor apresentará um exemplo que possa ser resolvido com nosso mateial de frações:

$$3\frac{1}{2} - 2\frac{5}{8} = ?$$

$$\begin{array}{rcl} 3\frac{1}{2} & = & 3\frac{4}{8} \\ 2\frac{5}{8} & = & 2\frac{5}{8} \\ \hline & & 6\frac{1}{8} \end{array}$$

Depois de ter mudado o "meio" para o denominador commum 8, os alunos resolvem o exemplo nestas palavras:

"$\frac{4}{8}$ e $\frac{5}{8}$ são $\frac{9}{8}$ ou $1\frac{1}{8}$. Colocamos abaixo a fração $\frac{1}{8}$ no lugar das frações e transportarmos 1 inteiro para os inteiros. 3 mais 2 mais 1 igual a 6"

Depois dêste trabalho com as lâminas, o aluno acha o procedimento sôbre o papel tão claro que parece desnecessário dizer uma outra palavra sôbre o transporte.

E o empréstimo é bastante claro para êle.

Suponhamos queoo professor escreva o seguinte exemplo :

$$5\frac{1}{6} - 2\frac{2}{3} = ?$$

Selecionando o material-fração o aluno saberá de antemão que $\frac{2}{3}$ é maior que $\frac{1}{6}$. Êle nunca poderá tirar 4 sextos (o equivalente a $\frac{2}{3}$) de 1 sexto. obviamente, êle terá de transformar 1 dos inteiros em 6 sextos. Isto lhe dará 7 sextos dos quais $\frac{2}{3}$ ou $\frac{4}{6}$ deverão ser fàcilmente subtraídos, (deixando) restando $\frac{3}{6}$ ou $\frac{1}{2}$. E em vez de 5 inteiros, sòmente restam 4 dos quais êle retira 2 inteiros. Assim o resto é $2\frac{1}{2}$. Sôbre o papel, êle procede do mesmo modo:

$$\begin{array}{rl} 5\frac{1}{6} = & 4\frac{7}{6} \\ -\ 2\frac{2}{3} = & 2\frac{4}{6} \\ \hline & 2\frac{3}{6} = 2\frac{1}{2} \end{array}$$

Com isto êle dominou todos os princípios de adição e subtração de frações diferentes (heterogêneas).

Parece uma lástima, entretanto, limitar o campo de exemplos para casos onde o denominador comum é mais ou menos dado como na prática comum, atualmente. Por que privar o aluno da excitante caçada do denominador comum nas mais difíceis situações? Se estamos somando quintos e sétimos, quartos e sextos, como transformamos estas frações heterogêneas em frações homogêneas?

É claro que estamos procurando um número que contenha 5 e 7 no 1º caso, 4 e 6 no segundo. Qual é o múltiplo comum de 5 e 7, ou 4 e 6? Como o achamos? Na Aritmética Estrutural o conceito de múltiplo comum e medida comum tem sido desenvolvida quando a criança estudou divisão com a "Pista de Números" (Vêr ficha nº)

Se procurarmos um denominador comum entre muitos números, procuramos o <u>menor</u> número que contenha todos. Vamos voltar a estudar estas relações no domínio das totalidades às quais pertencem.