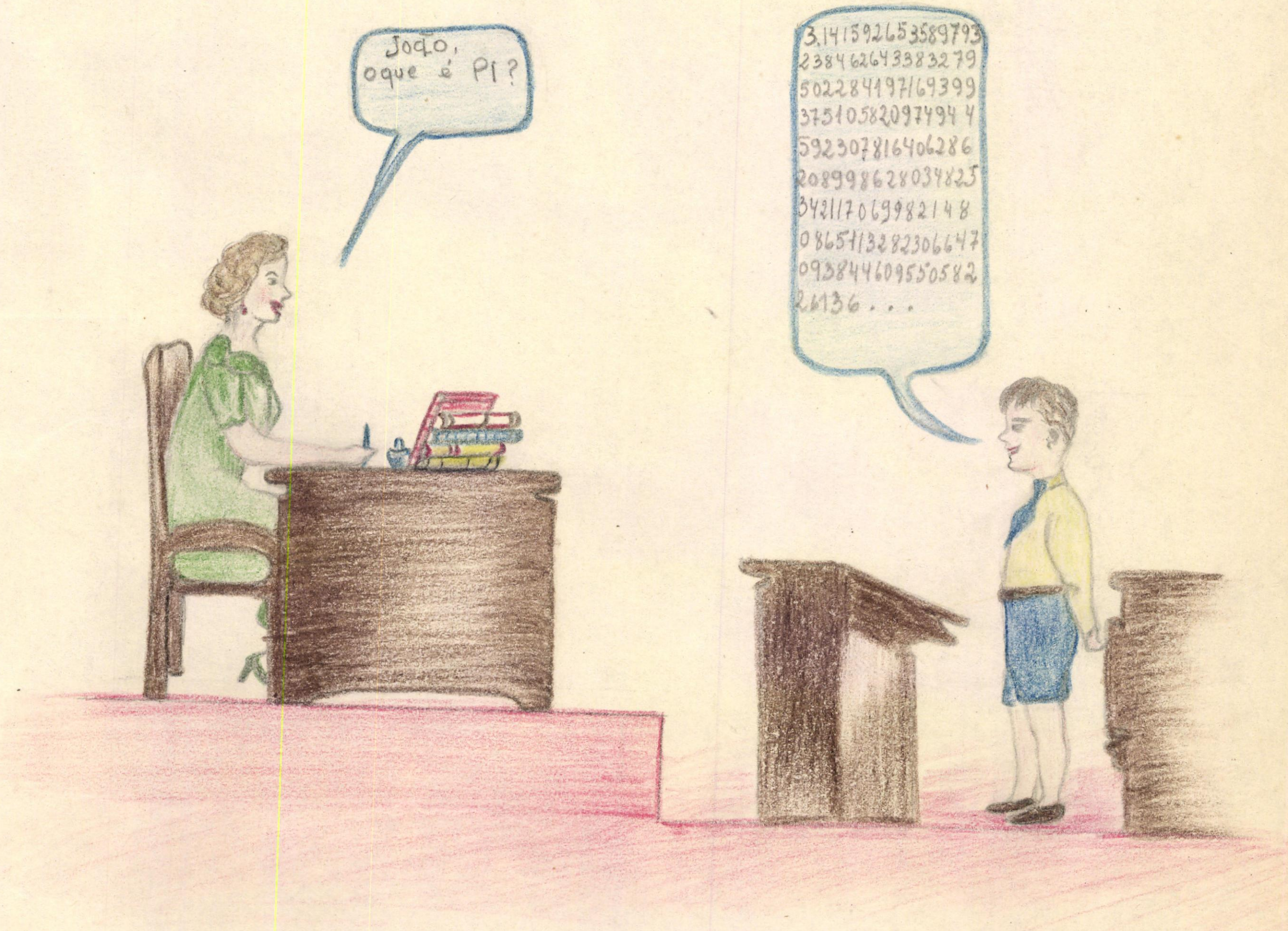
João,
oque é PI?
3,14159265358979323846264338327950228419716939937510582097494459230781640628620899862803482534211706998214808651328230664709384460955058226136...

F R A Ç Õ E S   O R D I N Á R I A S .

Building Mathematical Concepts in the Elementary School

Peter Lincoln Spencer
Marguerite Brydegaard

Tradução.

[illegible] Zoltoni
Regina Gonçalves e Silva
Dalila E. Radaelli
Maria Teresa P. D'Oliveira
Rute Tereza da Silva

CONCEITOS SUBJACENTES.

Processos de cálculo com frações ordinárias.

$\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{2}$ de ...

$\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{7}$ de $\frac{1}{8}$ de $\frac{1}{6}$ de ...

Um meio de um meio de um meio ... até o infinito.

A extensão que cada um pode ir desenvolvendo, em graus infinitamente pequenos, usando expressão de frações ordinárias, é semelhante à resposta de João para " Que é pi"?.

João apresentou 140 decimais na expressão fracionária da razão entre a circunferência de um círculo e o seu diâmetro.

A razão tinha sido trabalhada com mais de 700 algarismos ! Contudo, a resposta de João não indica que êle tem uma compreensão funcional do pí (π). A compreensão de relações é muito mais importante do que a apresentação de algarismos ou fórmulas que tenham sido memorizadas.

Há, muitas vêzes, pequena relação entre a habilidade de calcular e apresentar quantidades pequenas como as descritas acima, e compreensão inteligente dos conceitos que êles - envolvem. Haverá muito poucas vêzes, ocasiões em que um cálculo extenso com frações será necessário na vida comum do cidadão. Porém, o espírito que preside o trabalho com frações ordinárias e decimais será poderoso em têrmos de conduta.

Se as idéias são desenvolvidas em um nível elevado de compreensão pelo aprendiz, êle encontrará muitos usos para ela.

CONCEITOS CONCERNENTES A NATUREZA DAS FRAÇÕES ORDINÁRIAS.

Frações representam valores numéricos

Nem todos os valores numéricos podem ser descritos como múltiplo da unidade. O sistema de notação usado para números inteiros foi estendido como discutimos no capítulo precedente, para tornar possível a representação numérica de partes determinadas da unidade.

A extensão do sistema decimal de notação, para a ~~en~~-

Muitos de nós nos contentamos em considerar o pi matemático (razão da circunferência de um círculo com seu diâmetro) como 3, 14 16 ... Joãozinho, porém, o pequeno sabichão sabe que fanáticos da forma calcularam até mais de 700 decimais.

Sim há ocasiões em que o esmêro pode conduzir a extremos - porém muitas vêzes não é dada suficiente atenção a isso.

expressão de valores menores que a unidade, tem as mesmas propriedades que o sistema de números inteiros. O valor posicional é o mais importante, contudo há certos valores quantitativos que são comumente exponenciados os quais não podem ser expressos pela notação decimal. Por exemplo, suponhamos que alguém quisesse expressar numéricamente um valor três vêzes menor ou um terço do valor da unidade. Na notação decimal, aquele valor seria determinado pela divisão de um por três(1 por 3)

Aquela divisão produz uma divisão contínua cujo valor exato, sempre teóricamente menor, não pode nunca ser determinado.

$$3)\overline{1.0000000}\quad 3\,3333333 \qquad 1:3 = 0,333\ldots$$

O SÍMBOLO DE FRAÇÃO IMPLICA DIVISÃO

Na experiência comum, encontram-se inteiros partidos, isto é, fracionados. As partes de tais inteiros podem ser denominados fragmentos ou frações. Êste é o significado genérico do têrmo fração.

Os fragmentos são reconhecidos como tendo valor quantitativo, porém, usualmente, não é necessário especificar seus valores em têrmos numéricos.

Êles são designados simplesmente "uma das partes" - "a parte maior" "a parte menor". Contudo, há situações nas quais a especificação numérica é possivel e desejável.

Quando as partes são divididas por igual, elas podem ser trabalhadas da mesma maneira, como os números inteiros.

Obviamente, para tal propósito, é necessário que haja uma notação distinta para essas duas séries de valores - números inteiros e números fracionários - afim de se evitar confusão.

Nossa série de números inteiros é baseada sôbre um processo de multiplicação. Os símbolos dêste sistema representam múltiplos da unidade.

A série de fração é baseada na divisão.

Seus símbolos representam múltiplas partes iguais de unidade.

OS SISTEMAS DE NOTAÇÃO DE INTEIROS E FRAÇÕES SUPLEMENTAM-SE.

Neuza

Os símbolos usados para representar frações são compostos dos números usados no sistema de notação decimal, porém, êles são dispostos de modo a mostrar a relação de divisão existente entre êles :

$$\frac{2}{3} \qquad 2/3 \qquad 3\overline{)2} \qquad 2 \div 3 \qquad 2 : 3$$

OS SÍMBOLOS FRACIONÁRIOS TEM MÚLTIPLOS USOS

Os símbolos dos números inteiros são usados com muitas finalidades. Além do seu uso básico para designar uma série de unidades, também os símbolos fracionários podem ser usados para significar coisas diferentes.

A unidade fracionária, isto é, um símbolo com 1 como dividendo (numerador) pode referir-se a uma das partes iguais ou pode ser interpretado para indicar que um (unidade) foi dividido em partes iguais.

Quando êle é usado com um nome tal como $\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{3}$, êle serve como um <u>substantivo</u>. Aquele é semelhante ao uso de um número como <u>nome de coisas</u>.

Quando o símbolo fracionário é usado para representar um processo como a divisão, 1 ser dividido por 2, e 3 por 4, etc, êle tem a função de um <u>verbo</u>. Êle indica uma relação operacional, um ato a ser efetivado. Em algumas situações, o símbolo representa comparação. Nas medidas de visão, o símbolo $\frac{20}{20}$ tem a forma de fração, porém êle sòmente expressa uma comparação entre o que poderia ser visto a uma distância de 20 pés e o que é visto a tal distância.

Comparação é semelhantemente envolvida nas relações da razão 2 está para três. Uma igualdade entre as relações de tais razões é a base para equação da proporção.

$$2 : 3 : : 4 : 6$$

$$\left(\frac{2}{3} = \frac{4}{6} \right)$$

O símbolo de fração pode ser usado ou para indicar uma soma ou um agrupamento de partes iguais; por exemplo, o símbolo $\frac{5}{6}$ pode representar um agrupamento de 5 das 6 partes de alguma coisa ou pode representar 5 coisas divididas por 6,

Neuza

isto é, o valor de 5 tomado 6 vêzes menor.

O último significado expressa um valor quantitativo, é a interpretação mais usada para fins de cálculos.

AS FRAÇÕES ORDINÁRIAS NÃO SE ENQUADRAM NAS CONFIGURAÇÕES DECIMAIS.

Que as frações ordinárias não são pròpriamente uma parte do sistema decimal de notação seria claramente evidente

Escrevendo números inteiros decimais, o algarismo à direita representa sempre valores da unidade. Se, com uma expressão dada, um outro algarismo é escrito à direita de tal posição, o algarismo já escrito, representando valores de unidade, passa a representar dezena, ex:

O 5 no 25 é um valor de unidades.

Suponhamos que um 6 fôsse escrito à direita do 5. A expressão se tornaria 256.

O 6 agora expressa valores da unidade e o 5 tem posição das dezenas.

A invenção do sistema decimal de notação serve para expressar certos valores menores que a unidade. Se uma fração ordinária é escrita à direita da unidade da expressão acima, o 5 representa ainda unidades, ex:

$$25\frac{1}{2}.$$

Por isso, acrescentando-se uma fração ordinária a uma expressão decimal, não se altera o valor posicional da expressão decimal.

OS TÊRMOS DA FRAÇÃO ORDINÁRIA REPRESENTA DIVIDENDO E DIVISOR.

Uma fração ordinária é um símbolo representando uma quantidade. A êste respeito, a fração ordinária não difere do inteiro. O valor de uma fração ordinária é determinado pela divisão. Seu valor é o valor expresso pela dividendo (numerador) tomado tantas vêzes menor quantas são indicadas por seu divisor (denominador).

Ex.: O valor de 1/2 é o valor de 1 feito duas vêzes menor. Esta condição se torna mais evidente quando o símbolo fracionário é interpretado como uma divisão indicada. A prática usual refere-se aos têrmos do símbolo fracionário como numerador (o indicador do número de partes a ser simboliza simbolizado) e denominador o indicador do tamanho ou denominação das partes a serem consideradas. Enquanto tais têrmos têm algum valor, nisto êles identificam relações específicas para um processo partitivo, êles não auxiliam a indicar relações de cálculos. Uma terminologia mais funcional sugeriria a relação de divisão mais diretamente. Consequentemente, os têrmos dividendo e divisor nos parecem preferível.

$\frac{1}{2}$ dividendo (numerador) valor que é dividido.
divisor (denominador) grande redução no valor. -

A NOTAÇÃO DE FRAÇÃO INCLUI TANTO FRAÇÃO ORDINÁRIA COMO DECIMAL.

Valores de frações decimais são incluidas entre frações ordinárias, porém, as frações ordinárias podem representar valores que não podem ser expressos decimalmente.

Contudo, o verdadeiro ou aproximado equivalente na notação decimal de algumas expressões de frações ordinárias, podem ser obtidas efetuando-se a divisão indicada.

Como foi indicado no exemplo anterior, a equivalente decimal de fração ordinária $\frac{2}{5}$ é obtida dividindo-se:

2 por 5. - $5 \overline{)20}$ 4

Muitas vêzes, a divisão indicada não é conversível em uma expressão decimal.

Isso não ocorre quando a divisão fôr por 10 ou potência de 10.

Contudo, há necessidade de ser indicada a divisão - por outros números de partes iguais.

Há necessidade de um sistema de notação que alcance êsse objetivo.

O sistema de fração ordinária é êsse sistema.

Como vimos, as frações ordinárias expressam quantidades exatas tão realmente como os números inteiros.

Os símbolos de frações ordinárias utilizam os símbolos para números inteiros em total acôrdo com a significação dos símbolos na sucessão de números inteiros.

Contudo, por meio da divisão indicada, o valor da expressão numérica é reduzido. O valor expresso pelo símbolo torna-se tantas vêzes menor que o indicado pelo divisor no símbolo da fração. A idéia básica é tão simples assim.

Os gráficos seguintes do sistema de números inteiros e sistema de frações podem ajudar a esclarecer êste ponto.

A notação do sistema inteiro decimal, que é baseado na multiplicação e o sistema de notação de frações ordinárias que é baseado na divisão, são indicados.

Para cada sistema, os valores básicos são as unidades. Cada sistema pode ser extendido indefinidamente.

Pode ser extendidos indefinidamente ...

Mil. 1000 vêzes maior que a unidade	Cent. 100 vêzes maior que a unidade	Dezena 10 vêzes maior que a unidade	Unidade valor base	Unidade (valor base)	Meios (2 vêzes menor)	Terços (3 vêzes menor)	Quartos (4 vêzes Menor	Quintos (5 vêzes menor
0	0	0	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	2		2	2	2
2	2	2	2	3			3	3
3	3	3	3	4				4
4	4	4	4	5				
5	5	5	5	6				
6	6	6	6	7				
7	7	7	7	8				
8	8	8	8	9				
9	9	9	9					

... Pode ser extendidos indefinidamente

Técnicas de agrupamento são usadas na notação de fração.

Expressões, indicando valores quantitativos, são agrupados em categorias específicas dentro de cada sistema.

No caso de sistema decimal, os agrupamentos têm uma relação constante. Um grupo de dez dos valores designados pela coluna à direita é equivalente a um dos valores indicados na coluna seguinte à esquerda.

No sistema de frações ordinárias, a relação é menos restrita. Lendo para a direita, desde a classe das unidades, cada grupo que se mude tem uma parte mais que o indicado pela coluna precedente. Por exemplo, há sòmente duas metades para UM inteiro.

Há, igualmente, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{4}$ *etc. Em ambos os sistemas, as unidades são usadas como valores básicos.-*

Um é o referente para todos os valores numéricos - O valor de 2 é o valor de 1 e 1.

O valor de $\frac{1}{2}$ é 1 tomado 2 vêzes menor. No sistema decimal, o valor maior, determinado por cada grupamento, isto é, o valor do lugar é 9. No sistema de frações ordinárias, o maior valor determinado em um grupo é o valor mais próximo, porém menor que a unidade ou um inteiro.

Por exemplo, na categoria das metades, o maior valor determinado é 1, referindo-se a um meio ou uma das metades daquela categoria. Duas metades representam o valor de uma unidade e aquêle valor é melhor expresso como 1 na categoria das unidades.

Semelhantemente, na categoria dos terços $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$ serão expressos. Porém, $\frac{3}{3}$ é igual à unidade e pode ser fàcilmente expresso por 1.

FRAÇÕES IMPRÓPRIAS SÃO UMA VARIAÇÃO DO USUAL AGRUPAMENTO

Isto não significa que, ocasionalmente, não possa haver necessidade de expressões como treze unidades no sistema decimal, ou como $\frac{3}{2}$ no sistema de frações. Contudo, tais expressões violentam o principio de agrupamento que é a base do sistema. No caso das frações ordinárias, os símbolos que representam valores de 1 inteiro ou maiores que 1 inteiro são denominados *impróprios* em reconhecimento ao fato de que êles não são própriamente partes do inteiro.

As expressões de frações, que representam quantidades menores que o inteiro, são chamddas frações *próprias*. Elas estão de acôrdo com os princípios básicos dos sistemas de notações das frações.

RELAÇÕES BÁSICAS DE OPERAÇÕES ENTRE DIVISOR-DIVIDENDO-QUOCIENTE NA INTERPRETAÇÃO DAS EXPRESSÕES DAS FRAÇÕES ORDINÁRIAS.

Uma fração ordinária expressa divisão. Muitos dos conceitos, que são fundamentais para a interpretação das frações ordinárias, são os conceitos de divisão.

As três relações básicas de divisor, dividendo, quociente, que operam como sistema decimal de frações, também são ~~são~~ válidas para as frações ordinárias.

1 - Quando o dividendo é constante, um ACréscimo do divisor produz um correspondente DEcréscimo no quociente e um DEcréscimo no divisor causa um correspondente ACréscimo no quociente (proporção inversa)

(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$

Nos exemplos acima, os dividendos são constantes.

Lendo da esquerda para a direita, os divisores aumentam e o valor numérico das expressões diminuem. Lendo da direita para a esquerda, os divisores diminuem e o valor numérico - das expressões aumentam.

Comparemos o exemplo (b) com (a). Os dividendos são constantes.

O divisor do exemplo (b) é duas vêzes maior em valor numérico que o do exemplo (a) e o valor total do exemplo (b) é duas vêzes menor que do exemplo (a).

Comparemos o exemplo (b) com o exemplo (d):

Os dividendos são os mesmos. O divisor do exemplo (b) é quatro vêzes menor que o exemplo (d), e o valor do exemplo - (b) é quatro vêzes maior do que o valor do exemplo (d) etc.

G E N E R A L I Z A Ç Õ E S:

(a) - Quando as expressões das frações ordinárias são constantes, aumentando o divisor, diminue o valor da fração e diminuindo o divisor aumenta o valor da fração.

<u>O valor de fração ordinária depende inversamente do valor do divisor quando o dividendo é constante</u>.

(b) - <u>O modo de dividir o valor de uma fração ordinária é multiplicar seu divisor</u>.

(c) - <u>O modo de multiplicar o valor de uma fração ordinária é dividir seu divisor</u>...

2 - Quando o divisor é constante, o valor do quociente depende diretamente do tamanho do dividendo.

(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{16}{9}$

No exemplo acima, os divisores são constantes e os dividendos variam. Lendo da esquerda para a direita, os ~~divisores~~ dividendos aumentam e o valor das frações ordinárias aumentam também.

Lendo da direita para a esquerda, os dividendos diminuem e os valores das frações ordinárias também.

Comparemos o exemplo (c) com o exemplo (a).

Os ~~dividendos~~ divisores são os mesmos. O dividendo do exemplo (c) é quatro vêzes o do exemplo (a) e a fração $\frac{4}{9}$ é quatro vêzes maior que $\frac{1}{9}$.

GENERALIZAÇÕES:

a) - Quando as divisões das frações são constantes, o aumento do dividendo determina um aumento das frações; a diminuição do dividendo, uma diminuição do valor da fração.

O valor da fração ordinária depende diretamente do tamanho do dividendo se o divisor é constante.

b) - Um modo de dividir uma fração é dividir seu dividendo

c) - Um meio para multiplicar uma fração é multiplicar seu dividendo

3 - O divisor e o dividendo podem ser trocados no mesmo modo (proporção direta) e o valor do quociente permanece constante. Consideremos o conceito com valor decimais.

(a)	(b)	(c)	(d)
$\begin{array}{r}3\\ 1\overline{)\,3}\end{array}$	$\begin{array}{r}3\\ 2\overline{)\,6}\end{array}$	$\begin{array}{r}3\\ 4\overline{)\,12}\end{array}$	$\begin{array}{r}3\\ 8\overline{)\,24}\end{array}$

Em cada exemplo acima o quociente é 3.

Observemos os exemplos (a) e (b). No exemplo (b), o divisor é duas vêzes maior que o de (a).

Que podemos provar sôbre o dividendo (b) comparado com o dividendo de (a) se os quocientes para (a) e para (b) - são os mesmos ?

Comparemos os exemplos (c) e (a). Os quocientes são os mesmos. O dividendo do exemplo (c) é quatro vêzes maior em valor numérico que do exemplo (a). Que podemos provar sôbre o divisor do exemplo (c), comparando-o com o de (a) ?

O divisor do exemplo (d) é 8 vêzes maior em valor numérico que o de (a). Mantenhamos os mesmos quocientes, que podemos provar sôbre o dividendo do exemplo (d) comparando - com o exemplo (a) ?

(a)	(b)	(c)	(d)
$\begin{array}{r}3\\ 1\overline{)\,3}\end{array}$	$\begin{array}{r}3\\ 2\overline{)\,6}\end{array}$	$\begin{array}{r}3\\ 4\overline{)\,12}\end{array}$	$\begin{array}{r}3\\ 8\overline{)\,24}\end{array}$

Lendo da esquerda para a direita, como os divisores aumentam no valor do número, os dividendos aumentam do mesmo modo como os divisores. Lendo da direita para esquerda, os dividendos diminuem no valor do número, os divisores diminuem do mesmo modo que os dividendos.

G E N E R A L I Z A Ç Õ E S:

Mantenhamos o valor do quociente constante, uma mudança no divisor pode ser acompanhada por uma proporção direta na mudança do dividendo.

Ambos os têrmos da fração podem ser multiplicados ou ambos divididos pelo mesmo número, causando uma mudança quantitativa no valor da fração.

A generalização estabelecida é usada no lugar da mudança de uma fração ordinária por um têrmo maior ou menor.

MUDANÇA DA EXPRESSÃO DE UMA FRAÇÃO ORDINÁRIA PARA TÊRMOS MAIS ELEVADOS E (REDUÇÃO ASCENDENTE)

Para mudar uma expressão de uma fração em um valor equivalente, expresso numa denominação (ou grupo) mais alta-, ambos os têrmos da fração deverão ser multiplicados por um número que se tornará o divisor da fração igual ao valor desejado. Êste processo é algumas vêzes chamado de "redução ascendente", isto é, que transforma para categorias de grupo mais elevados. É essencialmente semelhante o processo de mudar valores na posição dos dez para representar quantidades comparáveis, expressados como unidade.

$$\underset{(a)}{\frac{1}{2}} = \underset{(b)}{\frac{\quad}{4}}$$

No exemplo (b), o divisor é duas vêzes maior em valor numérico que o divisor do exemplo (a). O que deve ser feito ao dividendo para que o valor dos dois exemplos seja constante ?

O dividendo do exemplo (b) deve ser feito duas vêzes maior em valor numérico:

$$\underset{(a)}{\frac{3}{4}} = \underset{(b)}{\frac{12}{\quad}}$$

No exemplo (b), o dividendo foi feito quatro vêzes maior em valor numérico que o do exemplo (a).

O que deve ser verdade a respeito do divisor do exemplo (b) comparado com o do exemplo (a), sendo iguais o valor das duas expressões ?

Mudando a expressão de uma fração ordinária para têrmos mais baixos (redução descendente).

Para mudar a expressão de uma fração para um valor equivalente, expresso numa denominação (ou grupo) mais baixo, será preciso dividir ambos os têrmos da fração por um número que tornará o divisor da fração igual ao valor desejado.

Êsse processo é denominado "redução descendente", isto é, mudança para categorias de agrupamento mais baixo, ex:-

(a) (b)

$$\frac{6}{8} = \frac{\quad}{4}$$

No exemplo (b), o divisor foi feito duas vêzes menor em valor numérico que o do exemplo (a). O que deve ser verdade a respeito do dividendo do exemplo (b) em comparação com o do exemplo (a) ?

C A N C E L A M E N T O :

O conceito em que se baseia o cancelamento é uma aplicação do conceito de redução descendente:

$$\frac{3}{\cancel{8}_{1}} \times \cancel{8}^{1} \qquad \frac{\text{dividendo dividido por } 8}{\text{Divisor dividido por } 8}$$

Se o dividendo e o divisor forem cada um dêles tornados 8 vêzes menores em valor numérico, o valor do produto não mudará. Em outras palavras, quando o 3 fôr multiplicado por 8 e depois dividido por 8 seu valor será ainda 3 (3x8=24 24 dividido por 8 é igual a 3)

Similarmente, considera-se expressões como as que seguem:

$$\frac{2}{\cancel{5}_{1}} \times \cancel{10}^{2} \qquad \frac{\text{Dividendo dividido por } 5}{\text{Divisor dividido por } 5}$$

Se tanto o dividendo como o divisor forem divididos pelo mesmo número, o valor da resposta não mudará. O dividendo e o divisor ambos foram divididos por 5.

$$\frac{3}{\cancel{4}_{2}} \times \frac{\cancel{6}^{3}}{7} \qquad \frac{\text{Dividendo dividido por } 2}{\text{Divisor dividido por } 2}$$

Nêste exemplo, o fator que é comum tanto ao dividendo como ao divisor não é aparente mas deve ser determinado. Os exemplos que apresentam êsse tipo de cancelamento, são potencialmente mais difíceis que os tipos nos quais o fator comum é aparente.

TÉCNICAS PARA O CÁLCULO COM EXPRESSÕES DE FRAÇÕES ORDINÁRIAS

Os mesmos princípios que dirigem o cálculo com inteiros e frações decimais são usados no cálculo com frações ordinárias: é o de interpretação da fração.

A interpretação que melhor se aplica no cálculo, é a aquela baseada na divisão, isto é, o valor numérico de uma fração é o valor numérico de seu dividendo feito tantas vêzes menor quantas são indicadas por seu divisor. Ex.: a mais usa da interpretação de expressão $\frac{5}{6}$ é a que tem o valor de 5 tornado 6 vêzes menor. Obviamente, êste é o difícil conceito para visualizar ou representar por meio de um desenho. Porém, não é uma idéia particularmente difícil para compreender. Ela pode ser ilustrada por meio de alguns exemplos de divisão, usando valor de números inteiros.

(a)	(b)	(c)	(d)
$\frac{12}{2}$	$\frac{15}{3}$	$\frac{16}{4}$	$\frac{10}{5}$
$2\overline{)12}$ = 6	$3\overline{)15}$ = 5	$4\overline{)16}$ = 4	$5\overline{)10}$ = 2

O valor numérico de cada uma das expressões acima é o valor do quociente obtido pela divisão. Porém, como foi esclarecido acima, nem tôdas as frações podem ser divididas. Então, é mais fácil aplicá-las como uma "divisão indicada" e usar as técnicas adequadas.

A ordem de introdução do processo de cálculo, no caso das frações ordinárias, necessita cuidadosa consideração.-

A ordem usual é aquela seguida com outros tipos de expressão numérica - adição, subtração, seguida por multiplicação e divisão. As dificuldades encontradas em mudar os valores das frações para denominadores comuns (grupos comparáveis) faz com que esta ordem seja discutível. O processo da multiplicação e divisão não requer que as frações usadas tenham o mesmo denominador. Êstes processos podem ser aprendidos sem envolver a redução ao mesmo denominador.

Partindo dêste ponto de vista e das dificuldades po tenciais com o cálculo, <u>a multiplicação e a divisão de frações ordinárias precederiam a adição e subtração de frações - ordinárias na sequência didática</u>.

Grandes conceitos sôbre os quais repousam a multiplicação de frações ordinárias.

Os seguintes conceitos fundamentam a multiplicação - de frações.

1)- Os conceitos de multiplicador, multiplicando, produto e suas relações são básicos para interpretação da multiplicação de frações ordinárias.

2)- A interpretação da notação da fração ordinária é - fundamental para compreensão de multiplicação das mesmas.

3)- A interpretação da relação entre divisor, dividendo, quociente fundamenta as técnicas de multiplicação de frações ordinárias.

4)- Uma interpretação das combinações dos conceitos apresentadas acima é a chave para compreensão da multiplicação de frações ordinárias.

Exemplos nos quais um fator é um número inteiro e o outro uma fração ordinária.

(a) $8 \times 3 = 24$ $\qquad 24 : 3 :: 8 : 1$

(b) $4 \times 3 = 12$

(c) $2 \times 3 = 6$

(d) $1 \times 3 = 3$

(e) $\frac{1}{2} \times 3 = \frac{3}{2}$ $\qquad \frac{3}{2} : 3 :: \frac{1}{2} : 1$

Nos exemplos acima, os multiplicandos são constantes

Lendo-os, de cima para baixo, os multiplicadores diminuem numa proporção definida. Cada multiplicador depois do 1º é duas vêzes menor que o precedente. Que é que se nota em relação aos produtos ? Comparemos o exemplo (b) com o exemplo (a). O multiplicador do exemplo (b) é duas vêzes menor no - valor do número que a do exemplo (a).

O que é certo sôbre o produto para o exemplo (b) comparado com a do exemplo (a) ?

Comparemos o exemplo (d) com o exemplo (e). Os multiplicandos são constantes. O multiplicador do exemplo (e) é duas vêzes menor no valor do número como o multiplicador do exemplo (d).

O que se conclui do produto do exemplo (e) comparado com o do exemplo (d) ?

O que se conclui multiplicando 3 unidades por 1/2? (um meio). Do desenvolvimento inicial da multiplicação de frações ordinárias, o aprendiz (aluno) concluirá que multiplicando uma expressão dada por uma fração própria, o valor desta expressão decresce.

Da mesma forma, o desenvolvimento específico, com os dados acima, produzirá generalizações dêste tipo:

a) - Um número multiplicado por $\frac{1}{2}$ é êste numero dividido por 2

b) - Um número multiplicado por $\frac{1}{5}$ é êste número dividido por 5

c) - Um número multiplicado por $\frac{1}{10}$ é êste número dividido por 10

d) - Um número multiplicado por $\frac{2}{3}$ diminue de valor porque será êste número multiplicado por 2 e dividido por 3.

e) - Um número dado multiplicado por uma fração própria produz um resultado que é menor de que o número dado. X

1 x 7 = 7   1 x 8 = 8   1/2 x 7 =   1/5 x 8 =

1 x 10 = 10   2/3 x 10 =

Exemplos nos quais o multiplicador é um inteiro e o multiplicando uma fração ordinária, podem ser relacionados aos conhecimentos anteriores de adição. Por exemplo: $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ é expresso como a seguinte multiplicação: $2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

Êste tipo de exemplo é um caso especial de adição. -

O processo é o de tornar o valor do produto tantas - vêzes tão grande como o valor das parcelas que foram indicadas pelo multiplicador. No exemplo 2 x 1/3, o produto seria duas vêzes uma parcela. Nestas relações, surge uma técnica para apresentação da multiplicação de frações ordinárias por um inteiro.

Já que o valor numérico da fração é avaliado pelo valor de seu dividendo, quando o divisor não muda, para multiplicar o valor de uma fração ordinária pode-se multiplicar o dividendo.

Logo 5 x 2/3 é efetuado por $\frac{5 \times 2}{3}$ ou $\frac{10}{3}$.

Porém, já que o valor de 10/3 é maior que o valor propriamente expresso em terços, êle é mudado para expressão que envolve unidades e terços: $3\frac{1}{3}$. Para fazer a troca, simplesmente se efetua a divisão indicada.

O valor numérico é o mesmo tanto antes de dividir como depois. A troca na forma é grandemente recomendada por convenção, porém ela se faz de acôrdo com o plano do sistema de notação de frações.

EXEMPLOS NOS QUAIS AMBOS OS FATÔRES SÃO FRAÇÕES ORDINÁRIAS:

Quando uma fração ordinária é usada como multiplicador, a multiplicação é semelhante àquela em que uma fração decimal é usada como multiplicador. Na multiplicação de frações decimais, a influência do tamanho do multiplicador foi interpretada e recordada pela colocação do ponto decimal(vírgula)no produto numa posição que:

Na multiplicação de frações ordinárias a mesma relação de multiplicador e multiplicando prevalece, porém, não há um esquema tão simples para registrá-la. O valor numérico do produto depende diretamente do valor numérico do multiplicador, quando o multiplicando é fixo.

Suponhamos, por exemplo, que o multiplicador, no exemplo acima, fôsse 5/7 em vez de 5. O exemplo seria então: $\frac{5}{7} \times \frac{2}{3}$

A troca no multiplicador é tal que seu valor numérico é 7 vêzes menor que o valor do multiplicador precedente isto é, 5 é 7 vêzes menor em valor que 5. Por conseguinte, o valor do novo produto deve ser 7 vêzes menor que aquele produzido pelo 5.

Para diminuir o valor de uma expressão fracionária, aumenta-se o valor do divisor. O aumento do divisor determina uma diminuição do quociente, se o dividendo é constante.

Então, para fazer o valor de $\frac{10}{3}$ sete vêzes menor, o divisor é feito sete vêzes maior: $\frac{10}{7 \times 3}$ ou $\frac{10}{21}$

Esta solução está sujeita a uma técnica: por exemplo, para multiplicar duas expressões fracionárias(ordinárias) multiplica-se o dividendo por um novo dividendo e multiplica-se o divisor por um novo divisor.

Tais técnicas podem ser percebidas e demonstradas pelas crianças quando elas estabelecem as relações que envolvem situações de cálculo. Elas não seriam apresentadas puramente como técnicas e nem o desenvolvimento das idéias que - as envolvem.

GRANDES CONCEITOS SÔBRE AS QUAIS REPOUSA A DIVISÃO DE FRAÇÕES ORDINÁRIAS.

Os seguintes conceitos fundamentam a divisão de frações.

1 - Os conceitos que são básicos na divisão de inteiros e frações decimais são também básicos na divisão de frações ordinárias.

2 - A interpretação das expressões de frações ordinárias é fundamental para compreensão de divisão das mesmas frações.

3 - A interpretação da combinação dos conceitos apresentados acima é chave para a compreensão de divisão de frações ordinárias.

Exemplos nos quais o dividendo é um inteiro e o divisor uma fração.

A relação básica: dividendo, divisor e quociente no qual o dividendo é constante e o divisor variado seria estabelecido antes da apresentação da divisão de frações ordinárias, o aluno compreenderia o conceito tão bem que poderia estabelecer a idéia.

" Quando o dividendo é constante, se você muda o divisor, o quociente muda em sentido contrário," com sua própria linguagem. A palavra "inverso", definindo a idéia de "sentido contrário" e "proporção", definindo a natureza de troca, seria introduzida sòmente depois de muitas experiências, e de muitos trabalhos.

De grande importância é a precisão com a qual o aprendiz deduz o conceito, traduzindo em linguagem sòmente depois do trabalho bem estabelecido.

(a) $1\overline{)6}$ quociente 6 (b) $\frac{1}{2}\overline{)6}$ quociente 6×2

O exemplo (a) ilustra a idéia de que algum número dividido por 1 é êste número. Comparemos o exemplo (a) com o exemplo (b). O divisor do exemplo (b) é duas vêzes menor no valor do número do que do exemplo (a).

Estará certo o quociente do exemplo (b) ? Poderá ser feito duas vêzes maior no valor do número.

Como poderá alguém mostrar que o valor é duas vêzes maior ? Nós podemos tornar 2 vêzes maior multiplicando o quociente por 2 (2 x 6 = 12).

O divisor do exemplo original é um simples produto direto que facilita a escrita nos graus do exemplo.

Apresentando a lição inicial por divisão de frações ordinárias, na divisão estarão as relações de divisão, de início mais real e mais clara.

Semelhantemente, esta forma facilita a identificação do aprendizado do qual é o dividendo e do qual é o divisor na forma convencional $6 : \frac{1}{2}$. Usando ambas as formas de expressão $\frac{1}{2} \overline{)6}$ e $6 : \frac{1}{2}$, apresentará não o problema se o aprendiz entender as relações envolvidas.

Para o desenvolvimento inicial da divisão de frações ordinárias, o aprendiz será levado a observar primeiro: que dividindo uma expressão dada por uma fração própria aumenta o valor numérico da expressão dada.

Tais generalizações seriam formuladas seguindo a primeira etapa do desenvolvimento da divisão das frações ordinárias.

a) um número dividido por 1/2 é êste número multiplicado por 2.

b) um número dividido por 1/10 é êste número multiplicado por 10.

c) um número dividido por 2/3 é aumentado no valor (1.1/2 vêzes maior no valor do número)

d) um número dividido por 2/3, produz uma resposta que é maior do que o dividendo (o resultado é 2.1/2 vêzes maior no valor do número como no dividendo)

e) um número dividido por uma fração própria produz um quociente que é maior que o número dado.

<u>Exemplos nos quais o dividendo</u> é um inteiro e o divisor é uma fração própria.

(a) $\frac{1}{\cancel{2}\,3} \overline{)6}$ 6×3

(b) $\frac{2}{3} \overline{)6}$

Comparemos o exemplo (b) com o exemplo (a). Os dividendos dos dois exemplos são os mesmos. O divisor do exemplo (b) é duas vêzes maior no valor, do número do que do exemplo (a). Por esta razão, o quociente do exemplo (b) torna-se duas vêzes menor do que do exemplo (a).

Pode ser feito duas vêzes menor pela divisão por 2.

(a) (b)

$$\frac{1}{3}\ \overline{)\ 6}\quad 6 \times \overset{3}{\cancel{2}} \qquad\qquad \frac{2}{3}\ \overline{)\ 6}\quad \frac{6 \times 3}{2} = 9$$

Habilidade com cálculos não apresentará problemas - se as seleções básicas forem atendidas. Se o aprendiz tem alcançado sucesso no trabalho de operações com multiplicação de frações ordinárias e nos tipos de situações com cancelamento, com números mistos, etc, êle foi bem orientado. As habilidades que fundamentam as duas áreas são uma e a mesma.

Exemplos nos quais dividendo e divisor são frações.

Consideremos o exemplo $\frac{2}{3} : \frac{5}{7}$ *e* $\frac{5}{7}\ \overline{)\ 2/3}$

Todo número dividido por 1 dá como quociente o próprio valor do número.

Se o valor do divisor é tomado 7 vêzes menor sem uma mudança no dividendo o quociente torna-se 7 vêzes maior.

$$\frac{1}{7}\ \overline{)\ 2/3}\quad 2 \times 7$$

Para indicar que o valor do quociente de fração tornou-se 7 vêzes maior, o dividendo de tal fração é multiplicado por 7. Se o valor do divisor torna-se 5 vêzes maior, sem se alterar o dividendo, o valor do quociente será 5 vêzes menor.

$$\frac{5}{7}\ \overline{)\ \frac{2}{3}}\quad \frac{2 \times 7}{3 \times 5}$$

Para indicar que o valor do quociente da fração tornou-se 5 vêzes menor, o divisor da fração é multiplicado por 5. A observação dos têrmos na solução acima mostra que na ordem para dividir, quando o divisor é uma fração ordinária, pode-se inverter o divisor e multiplicar o dividendo por aquele valor.

Esta é a parte que é comumente ensinada pelo "metodo do" faze o que eu digo e fixada pela prática de repetição.

Como resultado de tal prática algumas pessoas são capazes de dar uma explicação racional para o processo e, ainda mais, suas justificativas básicas residem nas relações funcionais que são observadas na divisão de números inteiros.

As mesmas relações prevalecem na divisão de frações decimais e são a base para a técnica - para a colocação da -

virgula no quociente. Não há nenhum truque ou mistério sôbre isso.

As classes de escola elementar exploraram o processo de divisão por fração ordinária e descobriram o fato da inversão em um outro período letivo.

Elas formularam a regra para inversão baseados em sua própria observação e raciocínio e sem saberem que isto é comumente apresentado em seu livro de texto. Nas ilustrações anteriores, os símbolos fracionários foram escritos como são escritos os inteiros. Êles são usados como símbolos de quantidades. Há uma desvantagem em usá-los dessa maneira em certas situações.

Grandes conceitos que fundamentam a soma e a subtração de fração ordinária.

Os seguintes conceitos fundamentam a adição e a subtração de frações ordinárias.

1)- Os conceitos e técnicas básicas de adição e subtração de inteiros e frações decimais aplicam-se também na fração ordinária.

2)- Sòmente têrmos que têm a mesma posição ou valores grupados podem ser somados e subtraídos.

3)- As técnicas para tornar fração heterogênea em expressões comparáveis por terem o mesmo divisor (isto é fração homogênea) são baseadas nas relações de divisão.

4)- As técnicas para reunir inteiros e frações na adição ou desagrupar frações de inteiros na subtração são baseadas nas características do sistema de notação de fração.

5)- As relações entre divisor, dividendo e quociente são fundamentais para a interpretação das operações de frações ordinárias.

6)- A explicação das combinações dos conceitos apresentados acima forma a chave para a compreensão das técnicas usadas na adição e subtração de frações ordinárias.

Muitas vêzes, o aumento de valores na adição de frações produz um valor que é maior que o valor assinalado para aquêle agrupamento no sistema de frações, isto é, a soma pode ser igual ou maior que 1. Em tais circunstâncias, é costume reduzir o valor a uma expressão mista. Um número misto é uma expressão numérica que inclui tanto um inteiro como uma fração ordinária.

É comparável a uma decimal mista que inclui um inteiro e parte decimal.

Contràriamente, na subtração de números mistos há ocasiões em que o valor expresso pela fração no subtraendo excede o valor expresso pela fração no minuendo.

Então, é necessário reagrupar as unidades do número inteiro do minuendo e combiná-lo com o valor da fração daquela expressão (Reduzir o misto à fração imprópria).

Exemplos nos quais as frações a serem somadas ou subtraídas são frações semelhantes (homogêneas)

$$\begin{array}{cccc} \frac{1}{3} & \frac{2}{7} & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ + \frac{1}{3} & + \frac{3}{7} & - \frac{4}{5} & - \frac{1}{5} \\ \hline 3 & 7 & 5 & 5 \end{array}$$

Se as frações são homogêneas - o que ocorre quando seus divisores são iguais - seus dividendos podem ser somados ou subtraídos e o divisor (denominador) comum usado. Consideremos a idéia com inteiros:

$$2\overline{)\,4}^{\,2} + 2\overline{)\,6}^{\,3} = 2\overline{)\,10}^{\,5}$$

Os dividendos 4 e 6 podem ser somados e então divididos pelo divisor 2. Isto dá a mesma resposta como quando os dois exemplos de divisão são divididas separadamente e seus quocientes somados.

O tamanho do quociente depende diretamente do tamanho do dividendo quando o divisor permanece constante.

<u>ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE FRAÇÕES HOMOGÊNEAS -</u>

Somando têrmos que pertençam ao mesmo agrupamento numérico, podem ser somados ou diminuidos. Por isso, frações heterogêneas necessitam ser tornadas valores equivalentes com divisores os mesmos para poderem ser somados ou subtraídos.-

O processo de "redução", isto é, mudanças do grupo fracionário foi discutido acima.

Agora, nossa atenção será fixada sôbre a técnica.

O primeiro passo na conversão de fração heterogênea em homogênea é achar um divisor comum (um denominador comum) - para diversas frações. Há 3 tipos de tais situações.

1)- Um dos divisores dados é o divisor comum (múltiplo comum) dos diversos dados:

$$\frac{2}{3} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{16}$$
$$\frac{1}{6} \quad \frac{3}{8} \quad \frac{1}{4}$$

2)- Os diversos divisores não têm nenhum fator comum além de 1.

Então, o menor múltiplo comum é o produto dos divisores dados. $\frac{1}{4}$ $\frac{2}{7}$ $\frac{4}{9}$

$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{8}$

3)- Os diversos divisores contém um fator ou fatores além de 1.

Para êste tipo, o menor divisor comum é um valor menor que o produto de divisores dados. $\frac{1}{9}$ $\frac{3}{10}$ $\frac{5}{8}$

$\frac{1}{6}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{6}$

O que se quer em todos os casos é o menor número que contenha todos os divisores dados. Êste valor pode ser determinado selecionando-se o maior número entre os divisores das frações que serão combinadas. Então, experimenta-se se aquêle número contém os outros divisores. Se contém é êste o menor múltiplo comum dos divisores. Se não contém os outros, então usa-se o maior divisor multiplicado por 2: Se não contiver, então usa-se o 3º múltiplo do maior divisor. Continua-se a usar o próximo multiplo maior do maior divisor dado até encontrar um valor que é o menor múltiplo dos divisores. (Isto é o maior divisor multiplicado por 2,3,4, etc,). Por exemplo, em

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{8}$$

8 é o maior divisor. Qualquer um prontamente percebe que 8 não é um divisor comum para oitavos e sextos.

$8 \times 2 = 16$. 16 não é um divisor comum porque não contém 6 um número. exato de vêzes.

$8 \times 3 = 24$. 24 é um divisor comum, Tanto 8 como 6 estão contidos exatamente nêle.

Com frações heterogêneas, depois do menor múltiplo comum dos divisores ter sido determinado, a etapa seguinte é ~~se~~ agrupar o valor expresso por cada fração dada em valor equivalentes ao grupo designado por aquêle divisor

Isto se faz multiplicando-se ambos os têrmos da fração dada por quantidades que tornem o divisor dado igual em valor ao divisor comum. Quando todos os valores das frações tiverem sido mudadas para frações com o mesmo denominador, aplica-se o processo usado com frações homogêneas.

As crianças que não adquirem uma maneira fácil e desejável de encontrar o múltiplo comum dos divisores podem incorrer em muitas dificuldades.

Se o processo de multiplicar os divisores dados e - usar o produto para divisor é usada, o menor divisor pode ser encontrado para certos tipos de exemplos, porém não para todos os tipos.

O uso dêste processo é ineficiente e indesejável. No exemplo anterior, 48 será o divisor se o produto dos dois divisores for usado.

Compare-se as dificuldades que advém do uso do produto dos dois divisores como divisor comum contrastando com o uso do menor multiplo comum dos divisores.

$$\frac{5}{8} = \frac{30}{48} \qquad\qquad \frac{5}{8} = \frac{15}{24}$$

$$\frac{5}{6} = \frac{40}{48} \qquad\qquad \frac{5}{6} = \frac{20}{24}$$

$$\frac{70}{48} = 1\frac{22}{48} = 1\frac{11}{24} \qquad\qquad \frac{35}{24} = 1\frac{11}{24}$$

Sendo maior o divisor usado, maiores serão as combinações necessárias. E, usando-se o menor múltiplo comum, os têrmos são menores e a resposta reduzida.

As chances de êrro, usando-se um processo em que o divisor é muito grande, são muito maiores do que quando se trabalha com o menor divisor comum. Parace-nos preferível ensinar os tipos de exemplos nos quais o M. M. C. dos divisores é o menor que o produto dos divisores dados antes de ensinar os tipos nos quais êle é o próprio produto.

....

$\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{3}$ ... até o infinito ! Infinitos graus de pequenez podem ser expressões através de frações ordinárias, Da mesma forma, infinitos graus de dificuldades nas técnicas de cálculo pode encerrar o trabalho com frações ordinárias: Quando as técnicas de cálculo são desenvolvidas através do processo " faz como eu digo", frequentemente, até os alunos que adquirem o domínio das técnicas não adquirem competência com as idéias que fundamentam as frações ordinárias. O resultado de tal método conduz a uma questão: se é oportuno incluir como unidade didática as frações ordinárias na Escola Primária. Tal questão é procedente. Porém, o quadro é muito diferente quando o aluno é levado a processo de cálculo com frações ordinárias através de in terpretação das idéias que a tornem significativa. Quando o ensino de unidade é baseado em idéias e relações, o aluno libera-se para interpretar os conceitos básicos.

A liberação que chega através da compreensão, é acompanhada por um alto nível de habilidade em recordar e de aplicabilidade.