CENTRO ESTADUAL DE FORMAÇÃO DE PROFESSORES GEN. FLORES DA CUNHA
ENSINO MÉDIO

Disciplina ______________________ Professor ______________________

Trimestre________ Turma __________ Série__________ Data: ___/___/200__.

Aluno: ____ Nº

Estudos de Recuperação 01

1) Dada a matriz $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ tal que $a_{ij} = i^2 + 2j - 5$, calcule $a_{12} + a_{31}$.

2) Ache m, n, p e q, de modo que:

$$\begin{bmatrix} m & 2m \\ p & p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n & -n \\ q & -3q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

3) Sendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, calcule $A^{-1} \cdot A^t$.

4) Resolver a equação $\begin{vmatrix} x + 3 & 2 \\ x - 1 & 5 \end{vmatrix} = 0.$

5) (UF-PR) Considere as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ z & y & x \\ y & z & x \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} x + y & x + z \\ z - y & z - x \end{pmatrix}$$

e $C = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Sabendo que a matriz B é igual à matriz C, calcule o determinante da matriz A.

6) (Fuvest-SP) Calcule os determinantes:

$$B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ a & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

7)

8) Escreva a matriz M^t e $(-M^t)^t$, sendo $M = [m_{ij}]_{3 \times 2}$ definida por:

$$m_{ij} = \begin{cases} i + j, \text{ se } i = j \\ i - j, \text{ se } i \neq j \end{cases}$$

$M^t = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{vmatrix} 2 \times 3$

$(-M^t)^t = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -2 & -4 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}$

9) Dadas as matrizes $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$, sendo $a_{ij} = i^j$ e $B = [b_{ij}]_{2 \times 2}$, sendo $b_{ij} = j^i$, determine:

a) $a_{11} + b_{11}$ $= 2$

b) $a_{12} - b_{21}$ $= 0$

c) $a_{21} \cdot b_{21}$ $= 2$

d) $a_{22}(b_{11} + b_{22})$ $= 20$

10) Escreva a matriz $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$, tal que:

$$a_{ij} = \begin{cases} \text{sen } i \cdot \frac{\pi}{2}, \text{ se } i = j \\ \cos j \cdot \pi, \text{ se } i \neq j \end{cases}$$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

11) Determine os números reais x e y em cada caso:

a) $\begin{bmatrix} x + 1 & 3 \\ 1 & x - y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ $x = 9, y = 7$

b) $\begin{bmatrix} 8 & 3x - 2y \\ x + 3y & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ $x = y = 1$

12) Dadas as matrizes M e N e sabendo que $M = N^t$,

$M = \begin{bmatrix} x^2 & y \\ x & 2y \end{bmatrix}$ e $N = \begin{bmatrix} x & x^2 \\ 2y & y \end{bmatrix}$, determine o valor de x e de y:

$x = 0, y = 0$ ou $x = 1, y = 0$

13) Determine o conjunto solução das equações:

a) $\begin{vmatrix} x + 3 & 2x - 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 0$ $S = \{-\frac{3}{8}\}$

b) $\begin{vmatrix} 2 & x & x \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 12$ $S = \{-\frac{3}{2}\}$

14) Determine os valores de x para que o determinante da matriz:

$\begin{vmatrix} 3 & 3 & x \\ 4 & 4 & 4 \\ 5 & x & 5 \end{vmatrix}$ seja nulo. $V = \{3, 5\}$

15) Determine o conjunto solução das seguintes equações:

a) $\begin{vmatrix} 3 & x \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0$ $S = \{6\}$

b) $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ x & 9 \end{vmatrix} = 0$ $S = \{-3\}$

c) $\begin{vmatrix} 2x & -4 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = 38$ $S = \{1\}$

d) $\begin{vmatrix} x + 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7$ $S = \{4\}$

16) Determine o conjunto solução das equações, aplicando a regra de Sarrus:

a) $\begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ -2 & -4 & 2 \\ 4 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 0$ $S = \{2\}$

b) $\begin{vmatrix} -3 & 4 & x \\ 5 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$ $S = \{8\}$

17) Calcule o determinante da matriz 2 × 2, cujos elementos são:

$$\begin{cases} a_{ij} = i + 2j, \text{ se } i \geq j \\ a_{ij} = i^2 - j, \text{ se } i < j \end{cases}$$

det = 22

05. O determinante de matriz $\begin{bmatrix} x+2 & 2y & 2 \\ x+3 & 3y & 3 \\ x+4 & 4y & 4 \end{bmatrix}$ é:

a. nulo, somente se $x = y$.

b. nulo, somente se $x = 0$, qualquer que seja **y**.

c. nulo, somente se $y = 0$, qualquer que seja **x**.

d. nulo, quaisquer que sejam **x** e **y**.

e. igual a 1, quaisquer que sejam **x** e **y**.

a. Falsa, o determinante é nulo mesmo se $x \neq y$.

b. Falsa, o determinante é nulo mesmo se $x \neq 0$.

c. Falsa, o determinante é nulo mesmo se $y \neq 0$.

d. Verdadeira.

e. Falsa, quaisquer que sejam **x** e **y**, o determinante é nulo.

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & x & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 14 \\ x & 5 \end{vmatrix} \Rightarrow 5 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 4 \cdot$$

$$\cdot 4 \cdot 3 - 3 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 4 \cdot 2 - 5 \cdot 4 \cdot x = 3 \cdot$$

$$\cdot 5 - 14 \cdot x \Rightarrow 10 + 2x + 48 - 3 - 16 - 20x =$$

$$= 15 - 14x \Rightarrow 39 - 18x = 15 - 14x \Rightarrow x = 6$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & 2 & x \\ 0 & 1 & -1 \\ 3x & x+1 & 2x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3x & 2x \\ 4 & -x \end{vmatrix}$$

$$(x-1)2x - 6x - 3x^2 + (x-1)(x+1) = -3x^2 - 8x$$

$$-8x - 1 = -3x^2 - 8x \Leftrightarrow 3x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

08. Calcule os determinantes a seguir.

a. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 7 & 9 \\ 3 & 10 & 12 & 15 \\ 5 & 21 & 15 & 18 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 7 & 9 \\ 3 & 10 & 12 & 15 \\ 5 & 21 & 15 & 18 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot$$

$$\cdot \begin{vmatrix} 5-2\cdot 2 & 7-2\cdot 3 & 9-2\cdot 4 \\ 10-3\cdot 2 & 12-3\cdot 3 & 15-3\cdot 4 \\ 21-5\cdot 2 & 15-5\cdot 3 & 18-5\cdot 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \\ 11 & 0 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 3 \cdot (-2) + 4 \cdot 0 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \cdot 11 - 1 \cdot 3 \cdot 11 - 3 \cdot 0 \cdot$$

$$\cdot 1 - 1 \cdot 4 \cdot (-2) = -6 + 0 + 33 - 33 - 0 + 8 = 2$$

5. Encontre o produto das matrizes:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

6. Calcule cada produto indicado:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

7. Ache A^2 e A^3, dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

8. Ache A^2 e A^3, dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

9. Calcular os produtos indicados:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

10. Verifique se o produto das matrizes A e B é comutativo.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

11. Calcule o produto das matrizes:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

Respostas:

5. a) $\begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 \\ -1 & -3 & 4 \\ 12 & 6 & 6 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 12 & 7 & 18 \\ 16 & 10 & 19 \end{bmatrix}$ 6. a) $\begin{bmatrix} 14 & 11 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 20 & 19 & 43 \\ -3 & 1 & 4 \\ 16 & 4 & 4 \end{bmatrix}$

7. a) $\begin{bmatrix} 1 & 9 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -7 & 12 \\ -4 & -11 \end{bmatrix}$ 8. a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

9. a) $\begin{bmatrix} 4 & 1 & 7 & 4 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 10 & 5 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 3 & 9 \\ 4 & 1 & 5 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ 10. Não

11. a) $\begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 6 & 12 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 6 & 3 & 9 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & 2 \\ -3 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

12. Efetue as operações indicadas:

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

13. Sendo dadas as matrizes quadradas do tipo (3x3) tais que $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$, calcule A.B se $a_{ij} = i - j$ e $b_{ij} = i \cdot j$.

14. Calcular m, sendo $AB + B = T$, conhecidas as matrizes

$A = \begin{bmatrix} m & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ e $T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$

15. As matrizes A e B são quadradas e do tipo (3x3). Verificar se as igualdades são verdadeiras:

a) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

b) $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$

c) $(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - B^2$

16. Resolva a equação matricial:

$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

17. Encontre as matrizes $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, que comutam na multiplicação com $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

18. Dada a matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, calcular a matriz B^n.

19. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, calcular $(A \cdot B)^2 + A$.

20. Se $A = (a_{ij})$ e $a_{ij} = i + j - 2$, calcule A^2, com a matriz A do tipo (3x3)

Respostas:

12) $\begin{bmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ 13) $\begin{bmatrix} -8 & -16 & -24 \\ -2 & -4 & -6 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix}$ 14) $m = -2$

15) Somente quando AB = BA. 16) $x = 16, y = -4, z = 2, t = 0$

17) $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, a e b reais 18) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$ 19) $\begin{pmatrix} 3 & 20 \\ 4 & 64 \end{pmatrix}$ 20) $\begin{pmatrix} 5 & 8 & 11 \\ 8 & 14 & 20 \\ 11 & 20 & 29 \end{pmatrix}$

E78. Determine $m \in \mathbb{R}$ para que os sistemas sejam possíveis e determinados:

a) $\begin{cases} mx + y = 3 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + my = 2 \\ 4x - 5y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} mx + 8y = 5 \\ 2x + my = 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + 2y + mz = 4 \\ 2x + 3y + 2z = 1 \\ 3x + my + 3z = 0 \end{cases}$

Resolução de E78-a

Sistema possível e determinado:

$$\Downarrow$$

$$\det A \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} m & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$2m - 3 \neq 0 \Rightarrow m \neq \frac{3}{2}$$

$$S = \left\{ m \in \mathbb{R} \mid m \neq \frac{3}{2} \right\}$$

TESTES DE VESTIBULARES

T1. (UFPI) Seja A uma matriz de ordem $m \times n$ e B uma matriz de ordem $r \times s$. Para que o produto $A \times B$ exista, é necessário que:

a) $m = r$
b) $n = r$
c) $m = s$
d) $n = s$ e $m = r$

T2. (FCMSCSP) Sejam A, B e C matrizes de tipos $4 \times n$, $p \times 3$ e $2 \times r$, respectivamente. Para que seja possível determinar uma matriz X, tal que $X = A \cdot (B + C)$, deve-se ter:

a) $n = p = 3$ e $r = 2$
b) $n = p = 4$ e $r = 3$
c) $n = p = 2$ e $r = 3$
d) $n = r = 3$ e $p = 4$
e) $n = r = 4$ e $p = 3$

T3. (UNIFOR-CE) Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. A matriz $A^2 + B^2$ é:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}$
b) $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$
c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 12 \end{bmatrix}$
d) $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 12 \end{bmatrix}$
e) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

T4. (PUCSP) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, então $AB - BA$ é:

a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
b) $\begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$
c) $\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$
d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
e) $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$

T5. (UFRN) O valor de x para o qual se tem $\begin{bmatrix} x & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ é:

a) -2 b) -1 c) 0 d) 1 e) 2

T6. (UMC-SP) O determinante $\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ é igual a:

a) 5 b) 7 c) -7 d) 0 e) 1

T7. (PUC-RS) A solução da equação $2x - \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0$ é:

a) -2 b) $-\frac{1}{2}$ c) 0 d) $\frac{1}{2}$ e) 2

T8. (UFPI) Para multiplicar o determinante de uma matriz por um número $K \neq 0$, multiplica-se:

a) uma linha da matriz por K
b) uma linha e uma coluna da matriz por K
c) todas as linhas da matriz por K
d) a matriz por K

T9. (UFPA) O determinante de uma matriz quadrada vale 25. Por quanto se devem multiplicar os elementos da 1ª linha da matriz para que o valor do determinante desta nova matriz seja igual a 5?

a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{3}$ d) 5 e) 25

T10. (UM-SP) O valor de um determinante é 42. Se dividirmos a primeira linha por 7 e multiplicarmos a primeira coluna por 3, o valor do novo determinante será:

a) 2 b) 14 c) 18 d) 21 e) 42

T11. (UM-SP) A é uma matriz quadrada de ordem 4 e $\det(A) = -6$. O valor de x, tal que $\det(2A) = x - 97$, é:

a) -12 b) 0 c) 1 d) $\frac{97}{2}$ e) 194

T12. (ESANSP) O valor do determinante $\begin{vmatrix} \text{sen}^2 a & \cos^2 a & 1 \\ \text{sen}^2 b & \cos^2 b & 1 \\ \text{sen}^2 c & \cos^2 c & 1 \end{vmatrix}$ é:

a) 1
b) $\text{sen}^2 a \cos^2 b$
c) $\text{tg}^2 a \, \text{tg}^2 b \, \text{tg}^2 c$
d) 0
e) n. d. a.

T13. (UDF) Seja M a matriz quadrada de 3ª ordem em que $a_{ij} = i + j$. Determine o cofator do elemento a_{32}:

a) 2 b) 5 c) 0 d) 32

E74. Determine **m** de modo que os sistemas sejam possíveis:

a) $\begin{cases} x + my = 3 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x - (m + 1)y = 2 \end{cases}$

E75. Discuta em função de **a** e **b** os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x + y = b \\ 2x + ay = 4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y - z = 4 \\ 2x + y - 2z = 6 \\ 3x - 2y + az = 6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + by = 3 \\ 3x + 2y = a \end{cases}$ d) $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x - ay + 3z = 9 \\ 3x + 3y - 2z = b \end{cases}$

E76. Discuta em função de **p** e **q** os seguintes sistemas:

a) $\begin{cases} x + py + z = 1 \\ 2x + 3y - z = q \\ x + y - 4z = 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y + py = 0 \\ x - 2y + 3z = 0 \\ 4x - y + z = q \end{cases}$

Resolução de E75-a

Discutir um sistema linear é determinar as condições para que o sistema seja determinado, indeterminado ou impossível.

$$\begin{cases} x + y = b \quad \times(-2) \\ 2x + ay = 4 \quad + \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = b \\ (a - 2)y = 4 - 2b \end{cases}$$

$a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2$
$4 - 2b = 0 \Rightarrow b = 2$

Discussão

- Se $a \neq 2 \Rightarrow$ sistema possível e determinado
- Se $a = 2$ e $b = 2 \Rightarrow$ sistema possível e indeterminado
- Se $a = 2$ e $b \neq 2 \Rightarrow$ sistema impossível

Regra de Cramer

A **regra de Cramer** é utilizada para se obter a solução de um sistema linear normal.

Seja o sistema:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Para obtermos sua solução, calculamos:

Sistema linear normal

É todo sistema $n \times n$ no qual o determinante da matriz dos coeficientes das incógnitas (matriz incompleta) é diferente de zero.

- det A = determinante da matriz incompleta A:

$$\boxed{\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}} \quad (\det A \neq 0)$$

Matriz incompleta do sistema

É a matriz formada pelos coeficientes das incógnitas do sistema ordenado.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- det X_i = determinantes das matrizes obtidas substituindo-se na matriz incompleta a coluna dos coeficientes de x_i pela coluna de termos independentes do sistema:

11. (UFPA) Em um sistema cartesiano ortogonal, o coeficiente angular de uma reta é igual a $\frac{1}{2}$ e a reta passa pela origem. Qual a equação dessa reta?

a) $y = -2x$

b) $y = -x$

c) $y = -\frac{1}{2}x$

d) $y = \frac{1}{2}x$

e) $y = 2x$

12. (UFPA) Uma reta forma com o eixo do x um ângulo de 45° e passa pelo ponto B(0, 1). Então sua equação é:

a) $y = x - 1$

b) $y = x$

c) $y = x + 1$

d) $y = \frac{1}{2}x + 1$

e) $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + 1$

13. (FGV) A equação da reta na figura abaixo é:

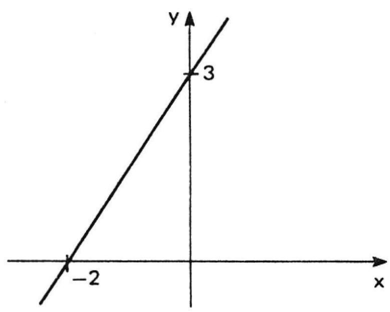
a) $3x + 2y = 6$

b) $3x - 2y = 6$

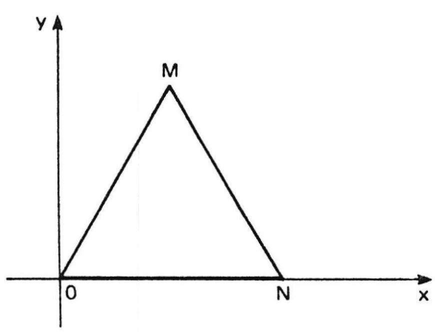
c) $2x + 3y = 6$

d) $-3x + 2y = 6$

e) $-2x + 3y = 6$



14. (Cesgranrio)



Na figura, o triângulo MNO é eqüilátero e de lado igual a 2. A reta que contém o lado MN é:

a) $2x + y\sqrt{3} = 1$

b) $x + y\sqrt{3} = 2$

c) $x\sqrt{3} + y = 2\sqrt{3}$

d) $x\sqrt{2} + y = 1$

e) $x + y = 2\sqrt{3}$

15. (MACK-SP) A reta que passa pelo ponto A(2, 5) com declive $\frac{-3}{2}$, também passa pelo ponto:

a) (4, 2)

b) (5, 2)

c) (−2, −5)

d) (−3, 2)

e) (2, 4)

16. (UC-PR) A distância da origem do sistema cartesiano ao ponto médio do segmento de extremos (−2, −7) e (−4, 1) é:

a) $\sqrt{5}$

b) $2\sqrt{2}$

c) $2\sqrt{3}$

d) $3\sqrt{3}$

e) $3\sqrt{2}$

17. (UFES) Sejam dadas as retas (r): $x + y = 0$, (s): $2y - 3x + 1 = 0$ e o ponto A(−3, 1). Sejam B e C os pontos sobre (r) e (s) respectivamente tais que A é o ponto médio do segmento BC. A abscissa do ponto C vale:

a) $-\frac{23}{5}$

b) 23

c) −7

d) −23

e) $-\frac{7}{5}$.

18. (UFRS) Os pontos médios dos lados do quadrado ABCD, com A = (1; 2) e B = (4; 2), são vértices do quadrado de área igual a:

a) 9

b) $\frac{9}{2}$

c) 3

d) $\frac{3}{2}$

e) $\frac{3}{4}$

Questões de vestibular

Geometria analítica

Retas

1. (UFRN) A distância entre os pontos $(-3, -4)$ e $(3, 4)$ é igual a:

a) 2
b) 4
c) 6
d) 8
e) 10

2. (Cesgranrio) A distância entre os pontos de coordenadas $(-3, -5)$ e $(-3, 9)$ é:

a) 4
b) 9
c) 12
d) 14
e) 15

3. (FCC) Se o ponto $(x; x)$ for eqüidistante de $(4; 8)$ e $(2; -2)$ então teremos:

a) $x = -1$
b) $x = 0$
c) $x = 1$
d) $x = 2$
e) $x = 3$

4. (FF-SP) O coeficiente angular da reta que contém os pontos $(3, 2)$ e $(-1, 4)$ é:

a) $-\frac{1}{2}$
b) -1
c) $\frac{1}{2}$
d) 1
e) 2

5. (FCC) O coeficiente angular da reta que passa pelos pontos de coordenadas $\left(0; \frac{1}{m}\right)$ e $\left(-\frac{1}{m}; 0\right)$ vale:

a) $\frac{2}{m}$
b) $\frac{1}{m}$
c) m
d) $+1$
e) -1.

6. (FGV-SP) Os pontos $(1, 3)$, $(2, 7)$ e $(4, k)$ do plano cartesiano estão alinhados se e somente se:

a) $k = 11$
b) $k = 12$
c) $k = 13$
d) $k = 14$
e) $k = 15$

7. (MACK-SP) Se os pontos $(2, -3)$, $(4, 3)$ e $\left(5, \frac{k}{2}\right)$ estão numa mesma reta, então k é igual a:

a) -12
b) -6
c) 6
d) 12
e) 18

8. (UFGO) Se os pontos $A(1, 0)$, $B(a, b)$ e $C(0, 1)$ estão alinhados, então:

a) $b = a + 1$
b) $a + b = 1$
c) $a - 2 = 2$
d) $a \cdot b = -1$
e) $\frac{a}{b} = 1$

9. (MACK-SP) A abscissa do ponto pertencente à reta $y = 2x + 1$ e eqüidistante dos pontos $(0, 0)$ e $(2, -2)$ é:

a) 2
b) -2
c) -3
d) $-\frac{1}{2}$
e) $-\frac{1}{3}$

10. (UFPA) A distância do ponto $A(m, 1)$ ao ponto $B(4, 0)$ é de $2\sqrt{2}$ unidades. Qual o valor de m?

a) $2 \pm \sqrt{7}$
b) $2 \pm 4\sqrt{7}$
c) 8
d) $4 \pm \sqrt{7}$
e) $4 \pm 2\sqrt{7}$

Exercícios

1. Calcule as coordenadas do ponto médio M do segmento $\overline{AB}$.

a. A(5, 1) e B(9, 3)

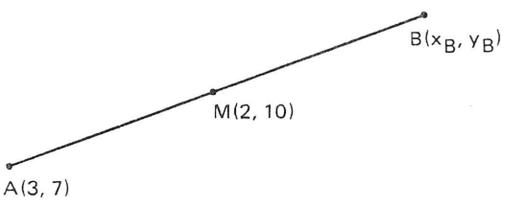
Resolução

$$\left.\begin{array}{l} x_M = \dfrac{5+9}{2} \rightarrow x_M = 7 \\ \\ y_M = \dfrac{1+3}{2} \rightarrow y_M = 2 \end{array}\right\} M(7, 2)$$

b. A(3, 2) e B(13, 8)
c. A(5, −1) e B(3, 11)
d. A(−4, 7) e B(−6, 5)
e. A(−10, −4) e B(−8, 4)
f. A(−1, 2) e B(1, −2)
g. A(−5, −9) e B(−11, −3)
h. A(1, 3) e B(2, 1)
i. $A(\sqrt{2}, -\sqrt{3})$ e $B(3\sqrt{2}, \sqrt{3})$
j. $A(2\sqrt{2}, -5)$ e $B(-6\sqrt{2}, -2)$

2. Calcule as coordenadas do extremo B do segmento $\overline{AB}$, sabendo que A é o ponto (3, 7) e M(2, 10) é o ponto médio de AB.

Resolução:



Tomando as coordenadas do ponto médio, podemos escrever:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \quad \text{e} \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Substituindo as coordenadas conhecidas, obtemos:

$$\left.\begin{array}{l} 2 = \dfrac{3 + x_B}{2} \rightarrow x_B = 1 \\ \\ \text{e} \quad 10 = \dfrac{7 + y_B}{2} \rightarrow y_B = 13 \end{array}\right\} B(1, 13)$$

3. Calcule as coordenadas do extremo B do segmento $\overline{AB}$, sabendo que A é o ponto (−3, 0) e M(−6, 4) é o ponto médio de $\overline{AB}$.

6. Dados A(−8, 3) e M(−6, 5), determine as coordenadas do ponto B, simétrico de A em relação a M.

7. Determine as coordenadas do ponto A simétrico de B(5, 3) em relação a M(−1, 2).

8. Determine as coordenadas do ponto A', simétrico de A em relação à origem:

a. A(3, 5)
b. A(−2, 4)
c. A(−5, −6)
d. $A\left(6, -\dfrac{1}{2}\right)$
e. A(0, 7)
f. A(8, 0)

9. Calcule as coordenadas dos pontos **M**, **N** e **P**, médios dos lados $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ do triângulo ABC, sabendo que A(1, 5), B(7, −1) e C(3, 7).

10. Com relação aos dados do exercício anterior, mostre que $MN = \dfrac{BC}{2}$.

11. Sendo M, N e P os pontos médios dos lados do triângulo ABC, e sabendo que A(0, 0), B(6, 0) e C(0, 8), mostre que:

a. o perímetro do triângulo MNP é a metade do perímetro do triângulo ABC.
b. a área do triângulo MNP é a quarta parte da área do triângulo ABC.

12. O segmento $\overline{AB}$ é um diâmetro da circunferência λ. Calcule as coordenadas do centro da circunferência, sendo A(10, −2) e B(−2, 6).

14. Dados três vérti
A(3, −5), B(5, −3)
quarto vértice D, opos
Obs.: O ponto de inters
ralelogramo é pont

15. Dados A(−3, 5) e
de um paralelogramo,
secção das suas diag
dois vértices.

4 Coo de 1

O baricentro
suas três medianas

B

É bom lemb
do triângulo ao p

Propriedade

O baricentro
de 2 para 1, isto

, 13) são as ex-
uma circunfe-
circunferência?

ao ponto Q(9, 8) é de 10 unidades?

Obs.: Um ponto do eixo das abscissas tem ordenada zero.

5. Verifique se o triângulo ABC é retângulo:

a. A(−4, 0), B(2,8) e C(6, 0)
b. A(1, 1) , B(2, 3) e C(5, −1)
c. A(2, 2) , B(−1, 6) e C(−5, 3)

Obs.: Um triângulo é retângulo se o quadrado da medida do maior lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois.

6. Verifique se são isósceles os triângulos cujos vértices são os pontos:

a. A(2, −2), B(−3, −1) e C(1, 6)

11. Seja **P** um ponto do eixo das ordenadas. Quais as coordenadas de **P** se a distância de **P** ao ponto Q(12, 2) é de 15 unidades?

Obs.: Um ponto do eixo das ordenadas tem abscissa zero.

12. Dados os pontos P(2, 2) e Q(5, −2), ache um ponto **R** do eixo das abscissas tal que o triângulo PQR seja retângulo em **R**.

13. Calcular a medida das diagonais do quadrilátero ABCD sabendo que A(1, 1), B(4, 1), C(4, 5) e D(1, 5).

x

3C, temos:

a e b o ponto M(−3, 2)
to $\overline{AB}$, sabendo que

−6, 5), determine as co-
simétrico de A em rela-

ıadas do ponto A simé-
io a M(−1, 2).

nadas do ponto A', si-
à origem:

ıs dos pontos **M**, **N** e **P**,
e $\overline{BC}$ do triângulo ABC,
7, −1) e C(3, 7).

ɔs do exercício anterior,

ıontos médios dos lados
ıdo que A(0, 0), B(6, 0)

ngulo MNP é a metade
ıgulo ABC.
ΛNP é a quarta parte da
C.

n diâmetro da circunfe-
ırdenadas do centro da
0, −2) e B(−2, 6).

ı mediana $\overline{AM}$, relativa
ɔ ABC, sendo A(5, 7),

ıo lado $\overline{BC}$ é o segmento
ı o vértice A e o ponto M,

14. Dados três vértices de um paralelogramo, A(3, −5), B(5, −3) e C(−1, 3), determine o quarto vértice D, oposto a B.

Obs.: O ponto de intersecção das diagonais de um paralelogramo é ponto médio dessas diagonais.

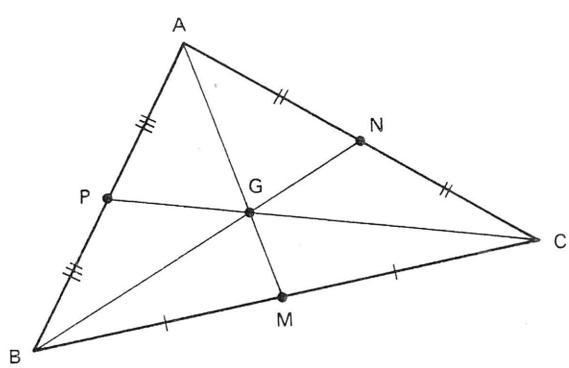
15. Dados A(−3, 5) e B(1, 7), vértices adjacentes de um paralelogramo, e M(1, 1), ponto de intersecção das suas diagonais, determine os outros dois vértices.

16. Dados três vértices de um paralelogramo ABCD, A(2, 3), B(4, −1) e C(0, 5), determine o quarto vértice **D**.

17. Os vértices de um triângulo são A(1, 4), B(3, −9) e C(−5, 2). Determine a medida da mediana relativa ao lado $\overline{AC}$.

4 Coordenadas do baricentro de um triângulo

O baricentro **G** de um triângulo ABC é o ponto de encontro das suas três medianas:



É bom lembrar que mediana é um segmento que liga um vértice do triângulo ao ponto médio do lado oposto.

Propriedade do baricentro

O baricentro **G** de um triângulo ABC divide cada mediana na razão de 2 para 1, isto é:

$$AG = 2GM \quad \text{ou} \quad \frac{AG}{GM} = 2$$

$$BG = 2GN \quad \text{ou} \quad \frac{BG}{GN} = 2$$

$$CG = 2GP \quad \text{ou} \quad \frac{CG}{GP} = 2$$

Dado o triângulo de vértices A(2; 3), B(6; −1) e C(−4; 1), determine:

a) a equação da reta que contém o lado $\overline{AB}$.

b) a equação da reta que contém o lado $\overline{BC}$.

c) a equação da reta que contém a mediana $\overline{AM}$.

d) a equação da reta que contém a mediana $\overline{CN}$.

a) Dos pontos P(12; 6), Q(0; 3) e R(−8; −9) qual(is) pertence(m) à reta de equação $3x - 4y - 12 = 0$?

b) Que valor deve ter α para que o ponto $P(2\alpha; \alpha - 1)$ pertença à reta de equação $x + 3y + 13 = 0$?

c) Que valor deve ter c para que o ponto P(2; −3) pertença à reta de equação $4x - y + c = 0$?

d) Da reta de equação $x + 3y - 9 = 0$, qual o ponto de abscissa 6? E o ponto de ordenada −5?

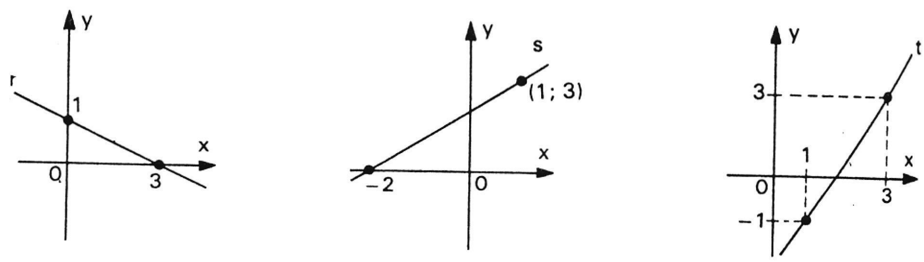
e) Da reta de equação $x + y + 9 = 0$, qual o ponto de abscissa −3? E o ponto de ordenada 12?

f) Determine os pontos em que a reta de equação $3x + 2y + 6 = 0$ intercepta os eixos coordenados.

g) Determine os pontos em que a reta de equação $10x + y - 5 = 0$ intercepta os eixos coordenados.

h) Desenhe, no plano cartesiano, as retas r, s e t, de equações: (r) $x + y - 2 = 0$, (s) $2x - y - 6 = 0$ e (t) $-2x + 3y - 6 = 0$.

i) Determine a equação das retas dadas nas figuras:



a) Desenhe as retas de equações:

(r) $2x - 3 = 0$, (s) $y - 3 = 0$, (t) $2x - y = 0$

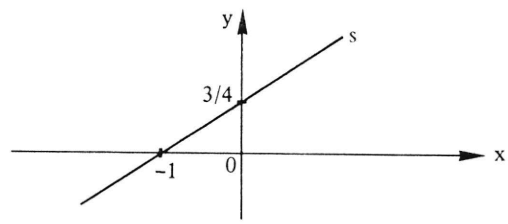
b) Estabeleça a correspondência entre as alternativas:

A) eixo Ox
B) eixo Oy
C) reta paralela a Ox
D) reta paralela a Oy
E) bissetriz dos quadrantes pares
F) bissetriz dos quadrantes ímpares

e a figura que representa cada uma das seguintes equações:

(I) $x = -3$
(II) $y = 5$
(III) $2y + 7 = 0$
(IV) $x = 0$
(V) $2x - 5 = 0$
(VI) $x + y = 0$
(VII) $y = 0$
(VIII) $x - y = 0$
(IX) $2x - 2y = 0$
(X) $3x = -3y$

22. (FAAP-79) Achar a equação do conjunto de todas as retas paralelas à reta s do gráfico:



23. (FUVEST-79) As projeções ortogonais do ponto $P = (1, 2)$ sobre as retas suportes dos lados do triângulo ABC estão alinhadas. Sendo $A = (0, 0)$, $B = (a, 0)$ e $C = (0, a)$, determinar **a**.

24. (PUC/SP-79) As equações das retas que contêm os lados de um triângulo ABC são: reta AB: $x + y - 5 = 0$, reta BC: $x + 7y - 7 = 0$ e reta CA: $7x + y + 14 = 0$.

A equação da bissetriz do ângulo interno em **B** é:

a. ( ) $3x + 6y - 4 = 0$
b. ( ) $3x + 6y - 10 = 0$
c. ( ) $3x + 6y - 16 = 0$
d. ( ) $3x + 6y - 18 = 0$
e. ( ) $3x + 6y - 20 = 0$

25. (UFCE-79) Calcule a área da região limitada pelas retas $5x - 2y - 20 = 0$, $x - 3y + 9 = 0$, $x = 0$ e $y = 0$.

26. (PUC/SP-79) A equação geral da reta que passa pelo ponto $P = (-3, 2)$ e tem coeficiente angular **m** é:

a. ( ) $mx + y + 3m = 0$
b. ( ) $mx - y + 2 + 3m = 0$
c. ( ) $x + my + 2 = 0$
d. ( ) $x - my + 3m = 0$
e. ( ) $x + y + 2 = 0$

27. (PUC/SP-79) O ponto simétrico de $P = (25, 34)$ com relação à reta (t) $y = x$ é:

a. ( ) $Q = (52, 43)$
b. ( ) $Q = (23, 54)$
c. ( ) $Q = (24, 35)$
d. ( ) $Q = (34, 25)$
e. ( ) $Q = (53, 24)$

28. (PUC/SP-79) $A = (3, 5)$, $B = (1, -1)$ e $C = (x, -16)$ pertencem a uma mesma reta, se **x** for igual a:

a. ( ) -5
b. ( ) -1
c. ( ) -3
d. ( ) -4
e. ( ) -2

29. (UFSC-79) O coeficiente angular da reta tangente à curva $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3}\,x$ no ponto de abscissa 1 é:

a. ( ) 0
b. ( ) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
c. ( ) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
d. ( ) $\sqrt{3}$
e. ( ) $-\sqrt{3}$

46. (UDF-79) Determine os valores dos parâmetros **m** e **n**, de tal modo que o sistema abaixo seja indeterminado:

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = m \\ 3x + 6y - 4z = 4 \\ 2x + ny - 6z = 1 \end{cases}$$

a. ( ) $m = 1$ e $n = -1$.
b. ( ) $m \neq -3$ e $n = 1$.
c. ( ) $m = 3$ e $n = 4$.
d. ( ) $m = -3$ e $n \neq 1$.

47. (UGF-78) Calcule os números reais **x** e **y**, tais que

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & x & 4 \\ 1 & 1 & y \end{vmatrix} = -1 \quad e \quad \begin{vmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & y & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 8.$$

a. ( ) $x = 0$ e $y = 1$.
b. ( ) $x = y = 0$.
c. ( ) $x = 3$ e $y = 2$.
d. ( ) $x = 2$ c $y = 4$.
e. ( ) $x = 3$ e $y = 5$.

48. (UDF-79) Considere o sistema $\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ -3x + 4y + 3z = 3. \\ -2x + y - 2z = 5 \end{cases}$ Determine o valor de $x + y - z$.

a. ( ) 6
b. ( ) 4
c. ( ) 0
d. ( ) 2

49. (UGF-78) Seja $\begin{cases} 2^{x+y} = 8 \\ 2^{x \cdot y} = 4 \end{cases}$. Então:

a. ( ) $x = 2, y = 1$ ou $x = 1, y = 2$.
b. ( ) $x = 1, y = 3$ ou $x = 3, y = 1$.
c. ( ) $x = 3, y = 2$ ou $x = 2, y = 3$.
d. ( ) $x = 0, y = 2$ ou $x = 2, y = 0$.
e. ( ) $x = 3, y = 4$ ou $x = 4, y = 3$.

50. (UFB-79) O sistema $\begin{cases} x + z = p \\ y + z = 100 \\ -mx + z = 80 \end{cases}$ é:

a. ( ) determinado e possível para $m = -1$.
b. ( ) impossível para $m = -1$ e $p = 80$.
c. ( ) indeterminado para $m = -1$ e $p = 80$.
d. ( ) indeterminado para $m = -1$ e $p = 100$.
e. ( ) impossível para qualquer valor de **m**.

51. (ABC-77) Seja $S = (s_{ij})$ a matriz quadrada de ordem 3, onde $s_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ se } i < j \\ i + j, \text{ se } i = j. \\ i - j, \text{ se } i > j \end{cases}$

Então, o valor do determinante de **S** é:

a. ( ) 0
b. ( ) 12
c. ( ) 24
d. ( ) 48

52. (UDF-79) Seja **M** a matriz quadrada de 3ª ordem em que $a_{ij} = i + j$. Determinar o cofator do elemento a_{32}:

a. ( ) 2
b. ( ) 5
c. ( ) 0
d. ( ) 32

53. (UFCE-78) Sabe-se que **M** é uma matriz quadrada de ordem 3 e que $\det(M) = 2$. Então $\det(3M)$ é igual a:

a. ( ) 2
b. ( ) 6
c. ( ) 18
d. ( ) 54

54. (FEI-80) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$:

a) calcular a matriz-produto **AB**;
b) achar a condição para que o sistema $BA \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ tenha solução.

55. (FUVEST-80) O sistema linear $\begin{cases} x + y = 0 \\ x + z = 0 \\ y + mz = 0 \end{cases}$ é indeterminado para:

a. ( ) todo **m** real.
b. ( ) nenhum **m** real.
c. ( ) $m = 1$
d. ( ) $m = -1$
e. ( ) $m = 0$

56. (FMU/FIAM-80) Uma condição suficiente para que a solução do sistema

$$\begin{cases} x - 3y = p - 2r \\ z + x = 2 - p \\ 3(x - y) + z = q + p \end{cases}$$

seja (0, 0, 0) é:

a. ( ) $p = -2$ $q = -1$ $r = 2$
b. ( ) $p = 0$ $q = 0$ $r = 0$
c. ( ) $p = 1$ $q = 2$ $r = -2$
d. ( ) $p = +2$ $q = -2$ $r = +1$
e. ( ) $p = 1$ $q = 1$ $r = 1$

57. (FMU/FIAM-80) O sistema $\begin{cases} ax + by = 1 \\ bx + ay = 1 \end{cases}$

a. ( ) é determinado se $a = 2$ e $b = -2$.
b. ( ) é indeterminado se $a = 5$ e $b = 2$.
c. ( ) é impossível se $a = -b$.
d. ( ) é impossível para todo $a, b \in \mathbb{R}$.
e. ( ) é determinado para todo $a, b \in \mathbb{R}$.

58. (Sta. Casa-80) Dadas as matrizes **A** e **B**, tais que:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

o valor do determinante de $A \cdot B$ é:

a. ( ) −192
b. ( ) 32
c. ( ) −16
d. ( ) 0
e. ( ) n.d.a.

59. (FMU/FIAM-80) O sistema $\begin{cases} kx + y = 3k \\ x + 2by = 5k \end{cases}$ tem para solução o par (1, 2).

Então podemos concluir que:

a. ( ) $k = 1$ e $b = 1$.
b. ( ) $k = 1$ e $b = -1$.
c. ( ) $k = -1$ e $b = -1$.
d. ( ) $k = 2$ e $b = 1$.
e. ( ) $k = 1$ e $b = 2$.

39. (PUC/SP-79) As soluções do sistema $\begin{cases}(a-1)x + by = 1\\(a+1)x + 2by = 5\end{cases}$ são $x = 1$ e $y = 2$.

Logo:

a. ( ) $a = 0$ e $b = 0$.
b. ( ) $a = 1$ e $b = 0$.
c. ( ) $a = 2$ e $b = 1$.
d. ( ) $a = 0$ e $b = 1$.
e. ( ) $a = 1$ e $b = 2$.

40. (UFCE-79) Dado o sistema

$$\begin{cases}50x + 25y + 150z + 200w = 50\\18x - 6y + 12z + 42w = -12\\-36x + 108y + 36z + 36w = 216\\80x + 70y + 90z + 40w = 140\end{cases}$$

calcular o valor de **y**,

41. (CESGRANRIO-79) O valor de **m** para que o sistema $\begin{cases}x^2 + y^2 + x + m = 0\\x^2 + y^2 + mx + 1 = 0\end{cases}$ tenha uma única solução é:

a. ( ) 1
b. ( ) 0
c. ( ) −1
d. ( ) −2
e. ( ) −3

42. (UFB-79) Se $X = \begin{vmatrix}8 & 7 & 4\\10 & 1 & 5\\0 & 20 & 1\end{vmatrix}$ e $Y = \begin{vmatrix}8 & 7 & 4\\0 & 20 & 1\\10 & 1 & 5\end{vmatrix}$, então:

a. ( ) $X = Y \neq 0$
b. ( ) $X = Y = 0$
c. ( ) $X = 2Y$
d. ( ) $2X = Y$
e. ( ) $X + Y = 0$

43. (UFB-79) O sistema $\begin{cases}(m+1)x + 7y = 10\\4x + (m-2)y = 0\end{cases}$ é impossível se **m** valer:

a. ( ) 0 ou 1.
b. ( ) −1 ou 2.
c. ( ) 6 ou −5.
d. ( ) 7 ou 4.
e. ( ) 9 ou 2.

44. (CESGRANRIO-79) O valor de λ para que o sistema $\begin{cases}x + y - \lambda z = 0\\x + \lambda y - z = 0\\x + (1+\lambda)y + z = 0\end{cases}$ admita soluções (x, y, z) distintas de $(0, 0, 0)$ é:

a. ( ) 2
b. ( ) 1
c. ( ) 0
d. ( ) −1
e. ( ) −2

45. (UGF-78) Representando por **S** e **R**, respectivamente, os conjuntos das soluções dos sistemas:

(I) $\begin{cases}x + 2y = 7\\4x - y = 10\end{cases}$ e (II) $\begin{cases}3x - 3y = 3\\x - y = 1\end{cases}$

podemos concluir que:

a. ( ) $S = R$
b. ( ) $S \supset R$
c. ( ) $S - R = \{(2, 1)\}$
d. ( ) $S \cap R = \varnothing$
e. ( ) $S \cap R = \{(3, 2)\}$

15. (CESGRANRIO-77) O sistema $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}$ tem representação matricial:

a. ( ) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

b. ( ) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

c. ( ) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

d. ( ) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$

e. ( ) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

16. (ITA-79) Sejam **A**, **B** e **C** matrizes reais 3×3, satisfazendo às seguintes relações: $AB = C^{-1}$ e $B = 2A$. Se o determinante de C é 32, qual é o valor do módulo do determinante de **A**?

a. ( ) $\frac{1}{16}$
b. ( ) $\frac{1}{8}$
c. ( ) $\frac{1}{4}$
d. ( ) 8
e. ( ) 4

17. (MACK-79) **A** é uma matriz quadrada de ordem 4 e $\det(A) = -6$. O valor de **x**, tal que $\det(2A) = x - 97$, é:

a. ( ) -12
b. ( ) 0
c. ( ) 1
d. ( ) $\frac{97}{2}$
e. ( ) 194

18. (Alfenas-77) O sistema de equações $\begin{cases} ax + 5y = 5 \\ bx + y = 0 \end{cases}$ terá uma única solução se:

a. ( ) $a = 5b$
b. ( ) $a + 5b = 0$
c. ( ) $a - 5b \neq 0$
d. ( ) $5ab = 0$
e. ( ) $5ab \neq 0$

19. (UFB-79) Se $A = \begin{pmatrix} \cos a & \operatorname{tg} a \\ \operatorname{cotg} a & \sec a \end{pmatrix}$, **A** não tem inversa

PORQUE:

$\det(A) = 0$

a. ( ) se ambas são verdadeiras e a segunda é uma justificativa correta da primeira.
b. ( ) se ambas são verdadeiras, mas a segunda não justifica a primeira.
c. ( ) se a primeira é verdadeira e a segunda é falsa.
d. ( ) se a primeira é falsa e a segunda é verdadeira.
e. ( ) se ambas são falsas.

20. (ITA-77) Seja $\begin{cases} (k_1 + k_2)x + (k_2 - k_3)y + (k_1 - k_3)z = 0 \\ (k_2 - k_1)x + (k_2 + k_3)y + (k_3 - k_1)z = 0 \\ (k_1 - k_2)x + (k_3 - k_2)y + (k_3 + k_1)z = 0 \end{cases}$ um sistema homogêneo de equações lineares reais em **x**, **y** e **z**. Com respeito ao sistema, podemos afirmar:

a. ( ) Se $k_1 \neq \pm k_2$, $k_1 \neq \pm k_3$ e $k_2 \neq \pm k_3$, então o sistema só admite solução trivial.

b. ( ) Se $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 \neq 0$, então o sistema só admite solução trivial.

c. ( ) O sistema admite solução não-trivial, se e somente se, $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = 0$.

d. ( ) Se $k_1 \neq 0$, $k_2 \neq 0$ e $k_3 \neq 0$, então o sistema só admite solução trivial.

e. ( ) n.d.a.

15. (CESGRANRIO-77) O sistema $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}$ tem representação matricial:

a. ( ) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

b. ( ) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

c. ( ) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

d. ( ) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$

e. ( ) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

16. (ITA-79) Sejam **A**, **B** e **C** matrizes reais 3×3, satisfazendo às seguintes relações: $AB = C^{-1}$ e $B = 2A$. Se o determinante de C é 32, qual é o valor do módulo do determinante de **A**?

a. ( ) $\frac{1}{16}$

b. ( ) $\frac{1}{8}$

c. ( ) $\frac{1}{4}$

d. ( ) 8

e. ( ) 4

17. (MACK-79) **A** é uma matriz quadrada de ordem 4 e $\det(A) = -6$. O valor de **x**, tal que $\det(2A) = x - 97$, é:

a. ( ) -12

b. ( ) 0

c. ( ) 1

d. ( ) $\frac{97}{2}$

e. ( ) 194

18. (Alfenas-77) O sistema de equações $\begin{cases} ax + 5y = 5 \\ bx + y = 0 \end{cases}$ terá uma única solução se:

a. ( ) $a = 5b$

b. ( ) $a + 5b = 0$

c. ( ) $a - 5b \neq 0$

d. ( ) $5ab = 0$

e. ( ) $5ab \neq 0$

19. (UFB-79) Se $A = \begin{pmatrix} \cos a & \operatorname{tg} a \\ \operatorname{cotg} a & \sec a \end{pmatrix}$, **A** não tem inversa

PORQUE:

$\det(A) = 0$

a. ( ) se ambas são verdadeiras e a segunda é uma justificativa correta da primeira.

b. ( ) se ambas são verdadeiras, mas a segunda não justifica a primeira.

c. ( ) se a primeira é verdadeira e a segunda é falsa.

d. ( ) se a primeira é falsa e a segunda é verdadeira.

e. ( ) se ambas são falsas.

20. (ITA-77) Seja $\begin{cases} (k_1 + k_2)x + (k_2 - k_3)y + (k_1 - k_3)z = 0 \\ (k_2 - k_1)x + (k_2 + k_3)y + (k_3 - k_1)z = 0 \\ (k_1 - k_2)x + (k_3 - k_2)y + (k_3 + k_1)z = 0 \end{cases}$ um sistema homogêneo de equações lineares reais em **x**, **y** e **z**. Com respeito ao sistema, podemos afirmar:

a. ( ) Se $k_1 \neq \pm k_2$, $k_1 \neq \pm k_3$ e $k_2 \neq \pm k_3$, então o sistema só admite solução trivial.

b. ( ) Se $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 \neq 0$, então o sistema só admite solução trivial.

c. ( ) O sistema admite solução não-trivial, se e somente se, $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = 0$.

d. ( ) Se $k_1 \neq 0$, $k_2 \neq 0$ e $k_3 \neq 0$, então o sistema só admite solução trivial.

e. ( ) n.d.a.

9. (Sta. Casa-79) Considere uma matriz **A**, de ordem 3, tal que det A = 6 e a matriz B = $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$. Então, sendo C = AB, podemos afirmar que det C vale:

(**Obs.**: det = determinante.)

a. ( ) -12
b. ( ) 12
c. ( ) -24
d. ( ) 24
e. ( ) n.d.a.

10. (Mauá-77) Na matriz ao lado, calcule: $\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 9 \end{pmatrix}$

a) seu determinante.
b) os valores de **x** que anulam esse determinante.

11. (UFB-79) Se $\begin{cases} \log x + \log y = 1 \\ y^{\log x} = 1 \end{cases}$, então:

a. ( ) $x^y = 10$
b. ( ) $y^x = 1$
c. ( ) $y^x = 10$
d. ( ) $x^y = 0$
e. ( ) $x + y = 10$

12. (UFGO-78) Dado o sistema $\begin{cases} kx + y = 1 \\ x + ky = -1 \end{cases}$, considere as seguintes afirmações:

I) Existe (x, y), solução do sistema, tal que $x \cdot y > 0$.
II) Se $-1 < k < 1$, então qualquer (x, y), solução do sistema, é tal que $x < 0$ e $y > 0$.
III) Se $k = -1$, então o par (0, 0) é solução do sistema.
IV) Para todo valor de $k > 0$, o sistema admite uma solução.
V) Se $k > 1$, então qualquer (x, y), solução do sistema, é tal que $x > 0$ e $y < 0$.

Então, podemos afirmar corretamente que:

a. ( ) I e II são falsas e IV é verdadeira.
b. ( ) II e V são verdadeiras e IV é falsa.
c. ( ) I é verdadeira e II e III são falsas.
d. ( ) II e III são verdadeiras.
e. ( ) V é falsa.

13. (UB/DF-78) O sistema $\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x - 2y + 3z = 0 \\ 3x - z = 0 \end{cases}$

a. ( ) tem uma única solução.
b. ( ) não tem soluções reais.
c. ( ) tem três soluções distintas.
d. ( ) tem infinitas soluções reais.

14. (FAAP-77) Calcular:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \log 7 & \log 70 & \log 700 \\ (\log 7)^2 & (\log 70)^2 & (\log 700)^2 \end{vmatrix}$$

60. (CESGRANRIO-81) O número de soluções do sistema $\begin{cases} x - y = 1 \\ y - z = 2 \\ z - x = 3 \end{cases}$ é:

a. ( ) maior do que 3.
b. ( ) 3
c. ( ) 2
d. ( ) 1
e. ( ) 0

61. (ITA-81) Num sistema de coordenadas cartesianas ortogonais verificou-se que os pontos A = (a, 1, a); B = (2a, 1, a) e C = (b, a, a) são colineares. Além disso, o sistema $\begin{cases} ax + by = 0 \\ bx + y + z = 0 \\ bx + ay + bz = 0 \end{cases}$ nas incógnitas **x, y** e **z** é indeterminado. Sendo $a > 0$ e $b > 0$, qual é a alternativa correta?

a. ( ) **a** e **b** são números pares.
b. ( ) **a** e **b** são números inteiros consecutivos.
c. ( ) **a** não é divisor de **b**.
d. ( ) $0 < a < \frac{1}{2}$ e $0 < b < 1$.
e. ( ) Nenhuma das anteriores.

62. (CESGRANRIO-81) Se o par (x, y) de números reais é solução de $\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$ podemos concluir que $(x - y)^2$ é:

a. ( ) 0
b. ( ) 1
c. ( ) $\sqrt{5}$
d. ( ) 5
e. ( ) 36

63. (Sta. Casa-80) Se $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ e $f(x) = -x^2 - x - 1$, então $f\left(-\frac{1}{\det A}\right)$ vale:

(Obs.: det A = determinante de A.)

a. ( ) $-\frac{1}{4}$
b. ( ) $-\frac{3}{4}$
c. ( ) $-\frac{5}{4}$
d. ( ) -3
e. ( ) n.d.a.

64. (MACK-80) **A** e **B** são matrizes quadradas de ordem 3 e $B = k \cdot A$. Sabe-se que $\det A = 1{,}5$ e $\det B^t = 96$. Então:

a. ( ) $k = 64$
b. ( ) $k = 96$
c. ( ) $k = \frac{1}{4}$
d. ( ) $k = \frac{3}{2}$
e. ( ) $k = 4$

65. (MACK-80) O sistema $\begin{cases} x + y = 2 \\ mx + y = 1 \\ x - y = m \end{cases}$

a. ( ) apresenta uma única solução, qualquer que seja **m**.
b. ( ) é incompatível se $m = 0$.
c. ( ) é indeterminado se $m = -1$.
d. ( ) apresenta mais de uma solução, qualquer que seja **m**.
e. ( ) ou apresenta uma única solução, ou é incompatível, qualquer que seja **m**.

66. (FMU/FIAM-80) O sistema

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 4 \end{cases}$$

a. ( ) é impossível.
b. ( ) é indeterminado.
c. ( ) possui duas soluções diferentes.
d. ( ) possui uma solução tal que $x = y$.
e. ( ) possui uma solução tal que $x \neq y$.

67. (MACK-80) Se $\begin{vmatrix} \cos^2 x & \text{sen } x \\ a\,\text{sen } x & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{sen } x & 0 \\ -1 & 2\cos x \end{vmatrix}$, então para todo $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, o valor de **a** é:

a. ( ) 2 sen x
b. ( ) sec 2x
c. ( ) cos 2x
d. ( ) sen 2x
e. ( ) tg 2x

68. (MACK-80) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 5 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} a & 5 & 1 \\ b & 3 & 2 \\ c & 2 & 3 \end{bmatrix}$ de determinantes não nulos, então, para quaisquer valores de **a**, **b** e **c**, temos:

a. ( ) $\det A = 2 \det B$
b. ( ) $\det A = \det B^t$
c. ( ) $\det A^t = \det B$
d. ( ) $\det B = 2 \det A$
e. ( ) $\det A = \det B$

(**Obs.**: A^t: matriz transposta de A.)

69. (F. C. Chagas-80) O valor do determinante

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$ é:

a. ( ) -4
b. ( ) -2
c. ( ) 0
d. ( ) 2
e. ( ) 4

70. (F. C. Chagas-80) O maior valor real de x tal que

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ x & 0 & x^2 & 0 \\ 1 & x & \log x & 8 \\ 0 & 8 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$$ é:

a. ( ) -8
b. ( ) 0
c. ( ) 1
d. ( ) 8
e. ( ) 16

71. (F. C. Chagas-80) O sistema $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3x + k^2y + z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$ é:

a. ( ) incompatível, $\forall\, k \in \mathbb{R}$.
b. ( ) compatível e determinado se $k \neq -7$.
c. ( ) compatível e indeterminado se $k = \pm 7$.
d. ( ) compatível e indeterminado se $k = 0$.
e. ( ) compatível e determinado se $k \neq \pm\sqrt{7}$.

60. (CESGRANRIO-81) O número de soluções do sistema $\begin{cases} x - y = 1 \\ y - z = 2 \\ z - x = 3 \end{cases}$ é:

a. ( ) maior do que 3.
b. ( ) 3
c. ( ) 2
d. ( ) 1
e. ( ) 0

61. (ITA-81) Num sistema de coordenadas cartesianas ortogonais verificou-se que os pontos A = (a, 1, a); B = (2a, 1, a) e C = (b, a, a) são colineares. Além disso, o sistema $\begin{cases} ax + by = 0 \\ bx + y + z = 0 \\ bx + ay + bz = 0 \end{cases}$ nas incógnitas x, y e z é indeterminado. Sendo $a > 0$ e $b > 0$, qual é a alternativa correta?

a. ( ) **a** e **b** são números pares.
b. ( ) **a** e **b** são números inteiros consecutivos.
c. ( ) **a** não é divisor de **b**.
d. ( ) $0 < a < \frac{1}{2}$ e $0 < b < 1$.
e. ( ) Nenhuma das anteriores.

62. (CESGRANRIO-81) Se o par (x, y) de números reais é solução de $\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ xy = 6 \end{cases}$ podemos concluir que $(x - y)^2$ é:

a. ( ) 0
b. ( ) 1
c. ( ) $\sqrt{5}$
d. ( ) 5
e. ( ) 36

63. (Sta. Casa-80) Se $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ e $f(x) = -x^2 - x - 1$, então $f\left(-\frac{1}{\det A}\right)$ vale:

(**Obs.**: det A = determinante de A.)

a. ( ) $-\frac{1}{4}$
b. ( ) $-\frac{3}{4}$
c. ( ) $-\frac{5}{4}$
d. ( ) -3
e. ( ) n.d.a.

64. (MACK-80) **A** e **B** são matrizes quadradas de ordem 3 e $B = k \cdot A$. Sabe-se que $\det A = 1{,}5$ e $\det B^t = 96$. Então:

a. ( ) $k = 64$
b. ( ) $k = 96$
c. ( ) $k = \frac{1}{4}$
d. ( ) $k = \frac{3}{2}$
e. ( ) $k = 4$

65. (MACK-80) O sistema $\begin{cases} x + y = 2 \\ mx + y = 1 \\ x - y = m \end{cases}$

a. ( ) apresenta uma única solução, qualquer que seja **m**.
b. ( ) é incompatível se $m = 0$.
c. ( ) é indeterminado se $m = -1$.
d. ( ) apresenta mais de uma solução, qualquer que seja **m**.
e. ( ) ou apresenta uma única solução, ou é incompatível, qualquer que seja **m**.

66. (FMU/FIAM-80) O sistema $\begin{cases} x + y = 1 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 4 \end{cases}$

a. ( ) é impossível.
b. ( ) é indeterminado.
c. ( ) possui duas soluções diferentes.
d. ( ) possui uma solução tal que $x = y$.
e. ( ) possui uma solução tal que $x \neq y$.

67. (MACK-80) Se $\begin{vmatrix} \cos^2 x & \operatorname{sen} x \\ a \operatorname{sen} x & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \operatorname{sen} x & 0 \\ -1 & 2 \cos x \end{vmatrix}$, então para todo $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, o valor de **a** é:

a. ( ) 2 sen x
b. ( ) sec 2x
c. ( ) cos 2x
d. ( ) sen 2x
e. ( ) tg 2x

68. (MACK-80) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 5 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} a & 5 & 1 \\ b & 3 & 2 \\ c & 2 & 3 \end{bmatrix}$ de determinantes não nulos, então, para quaisquer valores de **a**, **b** e **c**, temos:

a. ( ) det A = 2 det B
b. ( ) $\det A = \det B^t$
c. ( ) $\det A^t = \det B$
d. ( ) det B = 2 det A
e. ( ) det A = det B

(**Obs.**: A^t: matriz transposta de A.)

69. (F. C. Chagas-80) O valor do determinante $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ é:

a. ( ) −4
b. ( ) −2
c. ( ) 0
d. ( ) 2
e. ( ) 4

70. (F. C. Chagas-80) O maior valor real de x tal que $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ x & 0 & x^2 & 0 \\ 1 & x & \log x & 8 \\ 0 & 8 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$ é:

a. ( ) −8
b. ( ) 0
c. ( ) 1
d. ( ) 8
e. ( ) 16

71. (F. C. Chagas-80) O sistema $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 3x + k^2 y + z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$ é:

a. ( ) incompatível, $\forall\ k \in \mathbb{R}$.
b. ( ) compatível e determinado se $k \neq -7$.
c. ( ) compatível e indeterminado se $k = \pm 7$.
d. ( ) compatível e indeterminado se $k = 0$.
e. ( ) compatível e determinado se $k \neq \pm\sqrt{7}$.

No exemplo, temos:

$$ax + by + c = 0 \rightarrow x + 2y - 7 = 0$$
$$a = 1, \; b = 2 \;\text{ e }\; c = -7$$

Outro exemplo: A equação geral da reta determinada por A(2; 0) e B(−4; 9) é:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -4 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -4y + 18 - 9x - 2y = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -9x - 6y + 18 = 0 \xRightarrow{\div(-3)}$$
$$\Rightarrow \boxed{3x + 2y - 6 = 0}$$

Observe que:

1º) Os coeficientes *a* e *b* não podem ser nulos ao mesmo tempo (a equação não poderia, nesse caso, representar uma reta: $0 \cdot x + 0 \cdot y + c = 0$).

2º) Para verificar se um ponto P [illegible] basta substituir as coordenadas de P na equação [illegible] P perten[illegible]

Por exemplo:

- $P_1(2;\ 5)$ *pertence* a (r) $3x - 4y + 14 = 0$, pois $3 \cdot (2) - 4 \cdot (5) + 14 = 6 - 20 + 14 = 0$
- $P_2(-3;\ -1)$ *não pertence* a (r) $3x - 4y + 14 = 0$, pois $3 \cdot (-3) - 4 \cdot (-1) + 14 = -9 + 4 + 14 = 9 \neq 0$

3º) Conhecida a equação geral de uma reta r, [illegible] pontos que pertencem a r podemos atribuir [illegible] e, da equação, *tirar* os valores correspondentes de *y* (ou de *x*).

Por exemplo, dada a reta r de equação $2x + y - 6 = 0$, temos:

- para $x = 2 \rightarrow 2 \cdot 2 + y - 6 = 0 \rightarrow y = 2$
  O ponto $P(2;\ 2)$ pertence a r
- para $y = -8 \rightarrow 2x + (-8) - 6 = 0 \rightarrow x = 7$
  O ponto $P'(7;\ -8)$ pertence a r

[illegible]

A.49 Da reta r, determinada pelos pontos A(3; 2) e B(−1; −6), pede-se:

a) a equação geral.
b) o ponto de abscissa 5.
c) o ponto de ordenada −2.
d) os pontos onde r intercepta os eixos Ox e Oy.
e) o gráfico.

No exemplo, temos:

$$ax + by + c = 0 \rightarrow x + 2y - 7 = 0$$
$$a = 1, \; b = 2 \; \text{ e } \; c = -7$$

Outro exemplo: A equação geral da reta determinada por A(2; 0) e B(−4; 9) é:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -4 & 9 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -4y + 18 - 9x - 2y = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -9x - 6y + 18 = 0 \xRightarrow{\div(-3)}$$
$$\Rightarrow \boxed{3x + 2y - 6 = 0}$$

Observe que:

1º) Os coeficientes *a* e *b* não podem ser nulos ao mesmo tempo (a equação não poderia, nesse caso, representar uma reta: $0 \cdot x + 0 \cdot y + c = 0$).

2º) Para verificar se um ponto P pert[illegible] bastará substituir as coordenadas de P na equação [illegible] igualdade, P perten[illegible]

Por exemplo:

- $P_1(2;\ 5)$ *pertence* a (r) $3x - 4y + 14 = 0$, pois $3 \cdot (2) - 4 \cdot (5) + 14 = 6 - 20 + 14 = 0$
- $P_2(-3;\ -1)$ *não pertence* a (r) $3x - 4y + 14 = 0$, pois $3 \cdot (-3) - 4 \cdot (-1) + 14 = -9 + 4 + 14 = 9 \neq 0$

3º) Conhecida a equação geral de uma reta r, [illegible] pontos que perten[illegible]cem a r podemos atribuir valor[illegible] ou [illegible] e, da equação, *tirar* os valores correspondentes de *y* (ou de *x*).

Por exemplo, dada a reta r de equação $2x + y - 6 = 0$, temos:

- para $x = 2 \rightarrow 2 \cdot 2 + y - 6 = 0 \rightarrow y = 2$

  O ponto *P*(2; 2) pertence a r
- para $y = -8 \rightarrow 2x + (-8) - 6 = 0 \rightarrow x = 7$

  O ponto *P'*(7; −8) pertence a r

Aplicação

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 3 = \frac{5}{2}(x - 2) \Rightarrow y - 3 = \frac{5}{2}x - 5 \Rightarrow y = \frac{5}{2}x - 5 + 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{5}{2}x - 2$$

Resposta: A forma reduzida é $y = \frac{5}{2}x - 2$, na qual o coeficiente angular é $m = \frac{5}{2}$ e o coeficiente linear é $b = -2$.

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

Resolva os problemas:

a) Escreva a equação da reta que tem coeficiente angular $m = 2$ e que cruza o eixo y no ponto $(0, -3)$.

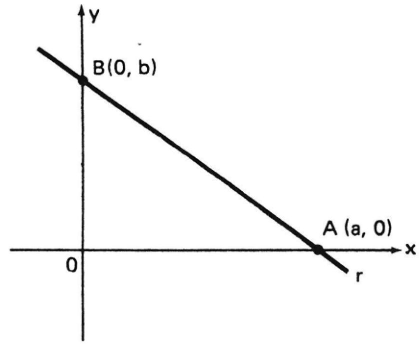
b) Dada a reta que tem como equação $3x + 4y = 7$, determine o coeficiente angular da reta.

c) Escreva na forma reduzida a equação da reta que passa pelos pontos A $(1, 3)$ e B $(4, 7)$.

Equação segmentária da reta

Consideremos uma reta r, tal que:

- r intercepta o eixo x no ponto A (a, 0).
- r intercepta o eixo y no ponto B (0, b).



Daí:

$$m = \frac{b - 0}{0 - a} = \frac{b}{-a} = -\frac{b}{a}$$

Então, a equação da reta será:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 0 = -\frac{b}{a}(x - a)$$

$$y = -\frac{b}{a}x + b$$

$$ay = -bx + ab$$

$$bx + ay = ab$$

Dividindo ambos os membros por ab, se $a \neq 0$ e $b \neq 0$, temos:

$$\frac{bx}{ab} + \frac{ay}{ab} = \frac{ab}{ab} \Rightarrow \boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1} \longrightarrow$$ forma denominada equação segmentária da reta

$$1 + \frac{3}{2} m_1 = \frac{3}{2} - m_1 \Rightarrow 2 + 3m_1 = 3 - 2m_1 \Rightarrow 5m_1 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_1 = \frac{1}{5}$$

(3) Cálculo da equação da reta r:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 3 = \frac{1}{5}(x-2) \Rightarrow y - 3 = \frac{1}{5}x - \frac{2}{5} \Rightarrow y - 3 - \frac{1}{5}x + \frac{2}{5} = 0$$

$$\Rightarrow 5y - 15 - x + 2 = 0 \Rightarrow -x + 5y - 13 = 0 \Rightarrow x - 5y + 13 = 0$$

Resposta: A equação da reta r pedida é $x - 5y + 13 = 0$.

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

a) Sejam as retas ℓ_1 e ℓ_2 de equações $\sqrt{3}x - 3y - 1 = 0$ e $x - 2 = 0$, respectivamente. Determine o ângulo agudo formado pelas retas.

b) A reta r, cujo coeficiente angular é $m_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, faz um ângulo de 30° com a reta s, cujo coeficiente angular é m_2. Calcule m_2.

c) Seja uma reta r que passa pelo ponto A (1, 1) e faz um ângulo de 45° com a reta s de equação $x - 2y + 2 = 0$. Determine a equação da reta r.

d) Qual é o ângulo agudo que a reta ℓ_1, de equação $6x - 2y + 5 = 0$, faz com a reta ℓ_2, de equação $4x + 2y - 1 = 0$?

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

1. As retas ℓ_1 e ℓ_2, de equações $x - \sqrt{3}y + 1 = 0$ e $3x + 2 = 0$, respectivamente, fazem um ângulo agudo $\hat{\theta}$. Calcule $\hat{\theta}$.

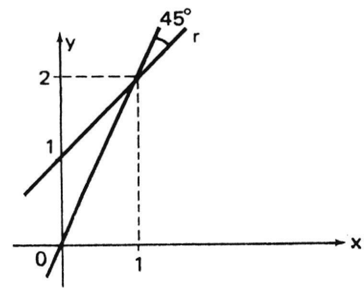
2. Seja $\hat{\alpha}$ o ângulo agudo formado pelas retas de equações $x - 3y - 7 = 0$ e $x - 13y - 9 = 0$. Calcule $\text{cotg}\,\hat{\alpha}$.

3. Calcule o coeficiente angular m_1 de uma reta ℓ_1 que faz um ângulo de 45° com a reta ℓ_2 determinada pelos pontos A (2, −1) e B (5, 3).

4. Seja $\hat{\alpha}$ o ângulo formado pela reta r, de equação $3x - 2y + 1 = 0$, com a bissetriz dos quadrantes ímpares. Calcule $\text{tg}\,\hat{\alpha}$.

5. Qual é a equação da reta r que passa pelo ponto P (2, 5) e faz um ângulo de 45° com a reta s de equação $y = 2x + 1$?

6. (Cescea) Considerando o gráfico ao lado, determine a equação da reta r.



A reta suporte do lado AB deve ter coeficiente angular $m = -\frac{1}{2}$ e passar pelo ponto B (6, 2) dado:

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 2 = -\frac{1}{2}(x - 6) \Rightarrow y - 2 = -\frac{1}{2}x + 3 \Rightarrow y - 2 + \frac{1}{2}x - 3 = 0$

$\Rightarrow 2y - 4 + x - 6 = 0 \Rightarrow x + 2y - 10 = 0$

Resposta: A equação da reta suporte do lado $\overleftrightarrow{AB}$ é $x + 2y - 10 = 0$.

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

a) As equações das retas r e s são, respectivamente, $2x + y - 5 = 0$ e $4x + 2y - 1 = 0$. Verifique se r e s são paralelas.

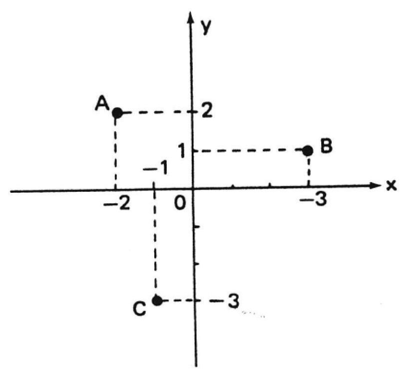
b) Dados os pontos A (2, 3) e B (−1, −4), determine a equação de uma reta ℓ paralela a uma reta determinada pelos pontos A e B, e que passa pelo ponto C (−1, 2).

c) Determine a equação de uma reta r, que passa pelo ponto P (1, 5) e é paralela à bissetriz dos quadrantes pares.

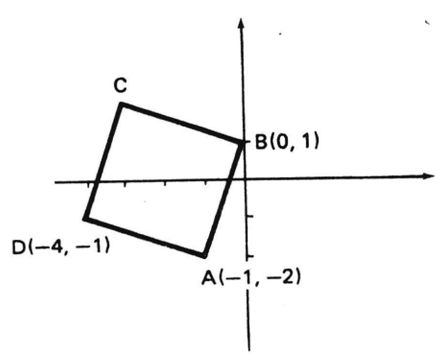
d) Verifique se as retas ℓ_1 e ℓ_2, de equações $\frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 1$ e $y = 5x - 2$, respectivamente, são paralelas.

e) Seja a reta r de equação $7x + 3y + \sqrt{2} = 0$. Determine a equação da reta s paralela a r e que passa pelo ponto (−9, 10).

f) (Fatec-SP) Observe a figura ao lado e determine a equação da reta que passa pelo ponto A e é paralela à reta determinada pelos pontos B e C.



g) Na figura ao lado, ABCD é um quadrado. Determine a equação da reta suporte do lado BC.



(2) Vamos determinar o coeficiente angular m_2 da reta s:

$$4x - 6y - 1 = 0 \Rightarrow -6y = -4x + 1 \Rightarrow 6y = 4x - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{4}{6}x - \frac{1}{6} \Rightarrow y = \underbrace{\frac{2}{3}}_{\text{coeficiente angular}} x - \frac{1}{6} \quad \therefore \quad m_2 = \frac{2}{3}$$

Comparando m_1 e m_2, temos que $m_1 = m_2$.

Logo: a reta r é paralela à reta s.

2.º exemplo: Para que valores de a as retas ℓ_1 e ℓ_2, de equações $2x + (a - 2)y - 5 = 0$ e $4x + ay - 1 = 0$, respectivamente, são concorrentes?

Resolução:

(1) Vamos determinar o coeficiente angular m_1 da reta ℓ_1:

$$2x + (a - 2)y - 5 = 0 \Rightarrow (a - 2)y = -2x + 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{-2}{(a-2)}x + \frac{5}{(a-2)} \quad \therefore \quad m_1 = \frac{-2}{a-2}$$

(2) Vamos determinar o coeficiente angular m_2 da reta ℓ_2:

$$4x + ay - 1 = 0 \Rightarrow ay = -4x + 1 \Rightarrow y = \frac{-4}{a}x + \frac{1}{a}$$

$$\therefore \quad m_2 = \frac{-4}{a}$$

(3) Para que ℓ_1 e ℓ_2 sejam concorrentes, devemos ter:

$$m_1 \neq m_2 \Rightarrow -\frac{2}{a-2} \neq -\frac{4}{a} \Rightarrow \frac{2}{a-2} \neq \frac{4}{a} \Rightarrow 4a - 8 \neq 2a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a \neq 8 \Rightarrow a \neq 4$$

Resposta: $a \neq 4$.

EXERCÍCIOS DE APRENDIZAGEM

a) Qual é a posição da reta r, de equação $6x + 4y - 3 = 0$, em relação à reta s, de equação $9x + 6y - 1 = 0$?

b) As retas ℓ_1 e ℓ_2, de equações $\frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 1$ e $2x - y + 5 = 0$, respectivamente, são paralelas ou concorrentes?

c) Para que valores de a as retas de equações $(a + 3)x + 4y - 5 = 0$ e $x + ay + 1 = 0$ são paralelas?

d) (Faap-SP) Determine os valores de m para que as retas ℓ_1 e ℓ_2, de equações $(1 - m)x - 10y + 3 = 0$ e $(m + 2)x + 4y - 11m - 18 = 0$, sejam concorrentes.

e) (Faap-SP) As retas r e s, de equações $px + 8y + 1 = 0$ e $2x + py - 1 = 0$, respectivamente, são paralelas. Nestas condições, calcule o valor de p.

f) (Cescem) Qual deve ser a relação de igualdade entre a e b para que a reta ℓ_1, de equação $x - 3y + 15 = 0$, seja paralela à reta ℓ_2 determinada pelos pontos A (a, b) e B (1, 2)?

Seja **Q** a projeção ortogonal de **P** sobre **r**. A distância de **P** até **r**, indicada por d(P, r), é a medida do segmento $\overline{PQ}$. Executando todas as passagens do último exercício para uma reta **r** qualquer — cuja equação é ax + by + c = 0 — e para um ponto $P(x_0, y_0)$ qualquer, teremos a fórmula que permite calcular diretamente a distância de **P** até **r**, ou seja:

$$\begin{array}{l} P(x_0,\ y_0) \\ \quad\ \downarrow \quad\ \downarrow \\ (r):\ ax + by + c = 0 \end{array} \rightarrow \boxed{d(P, r) = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

Exercícios

1. Calcule a distância de P até r:

a. P(1, 2), (r): 3x + 4y + 4 = 0

Resolução:

$$d(P, r) = \frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{15}{5} \rightarrow \boxed{d(P, r) = 3}$$

b. P(3, 3) e (r): 4x + 3y + 4 = 0

c. $P\left(-2, \frac{3}{2}\right)$ e (r): −3x + 4y − 2 = 0

d. P(0, 0) e (r): $\sqrt{3}\,x + \sqrt{13}\,y + 40 = 0$

e. $P(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ e (r): x − y = 0

f. P(5, 3) e (r): x − 10 = 0

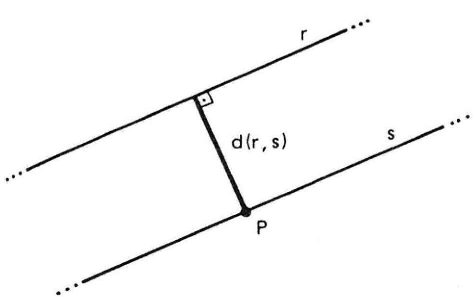
g. P(6, 9) e (r): y − 1 = 0

2. Calcule a distância entre as retas paralelas r e s.

a. (r): 3x + 4y + 4 = 0 e (s): 3x + 4y − 1 = 0

Resolução:

A distância entre duas retas paralelas é a distância de um ponto P qualquer de uma delas até a outra.



Tomamos um ponto P qualquer de s:

x = 0 → 3x + 4y − 1 = 0 → 4y − 1 = 0 →

$\rightarrow y = \frac{1}{4} \rightarrow P\left(0, \frac{1}{4}\right)$

Agora, calculamos a distância de P até r:

$$d(r, s) = d(P, r) = \frac{\left|3 \cdot 0 + 4 \cdot \frac{1}{4} + 4\right|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{d(r, s) = 1}$$

b. (r): 3x − y − 6 = 0 e (s): 3x − y − 8 = 0

c. (r): $\sqrt{3}\,x + y - 1 = 0$ e (s): $\sqrt{3}\,x + y + 5 = 0$

d. (r): 10x + 6y − 1 = 0 e (s): 10x + 6y + 19 = 0

e. (r): x + 1 = 0 e (s): x + 5 = 0

f. (r): y − 3 = 0 e (s): y − 8 = 0

3. Sabendo que dois lados de um quadrado estão nas retas x − y − 2 = 0 e x − y + 5 = 0, calcule a área desse quadrado.

4. Sendo A(2, 5), B(1, 2) e C(3, 0) os vértices de um triângulo ABC, calcule:

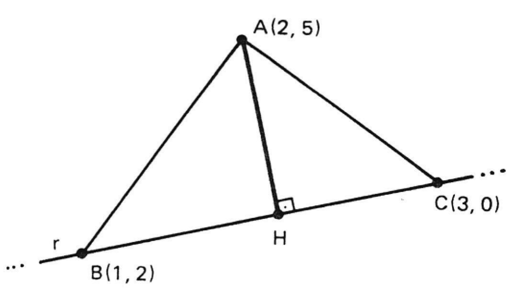
a. a medida h da altura $\overline{AH}$ relativa ao lado $\overline{BC}$;

b. a medida do lado $\overline{BC}$;

c. a área A do triângulo ABC.

Resolução:

a. A medida da altura $\overline{AH}$ é a distância de A até a reta r que contém o lado $\overline{BC}$:



Nesta fórmula, **m** é o coeficiente angular de $\overleftrightarrow{PP'}$.

Equação de $\overleftrightarrow{PP'}$:

$$y - 7 = -\frac{1}{2}(x - 4) \rightarrow x + 2y - 18 = 0$$

Resolvendo o sistema,

$$\begin{cases} 2x - y + 4 = 0 \\ x + 2y - 18 = 0 \end{cases}$$

obtemos: Q(2, 8)

Segunda parte: obter P'

Q é ponto médio de PP'. Logo:

$$\left.\begin{array}{l} x_Q = \dfrac{x_P + x_{P'}}{2} \rightarrow 2 = \dfrac{4 + a}{2} \rightarrow a = 0 \\ y_Q = \dfrac{y_P + y_{P'}}{2} \rightarrow 8 = \dfrac{7 + b}{2} \rightarrow b = 9 \end{array}\right\} \boxed{P'(0, 9)}$$

18. Obtenha as coordenadas do ponto P' simétrico de P em relação a r:

a. P(1, 0) e (r) $x - y = 0$

b. P(2, 7) e (r) $x - y + 1 = 0$

c. P(−1, 1) e (r) $x + 2y - 11 = 0$

d. P(−2, −7) e (r) $x + 3y + 13 = 0$

19. Dadas as equações de dois lados de um retângulo, $5x + 2y - 7 = 0$ e $5x + 2y - 36 = 0$, e a equação de uma de suas diagonais, $3x + 7y - 10 = 0$, determine as equações dos outros lados e da outra diagonal.

20. Sendo r a reta de equação $x + y - 1 = 0$ e P o ponto de coordenadas $(1, 2\sqrt{2})$, determine:

a. o coeficiente angular de r;

b. o coeficiente angular da reta s que passa por P e é perpendicular à reta r;

c. a equação de s;

d. o ponto Q, projeção ortogonal de P sobre r;

e. a distância de P até Q.

Resolução:

a. (r) $x + y - 1 = 0 \rightarrow y = -x + 1 \rightarrow$

$\rightarrow \boxed{m_r = -1}$

b. $s \perp r \rightarrow m_s \cdot m_r = -1 \rightarrow m_s \cdot (-1) = -1 \rightarrow$

$\rightarrow \boxed{m_s = 1}$

c. s passa por $P(1, 2\sqrt{2})$ e $m_s = 1$, logo:

$y - 2\sqrt{2} = 1(x - 1) \rightarrow \boxed{x - y + 2\sqrt{2} - 1 = 0}$

d. Resolvendo o sistema,

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x - y + 2\sqrt{2} - 1 = 0 \end{cases}$$

obtemos: $Q(1 - \sqrt{2}, \sqrt{2})$.

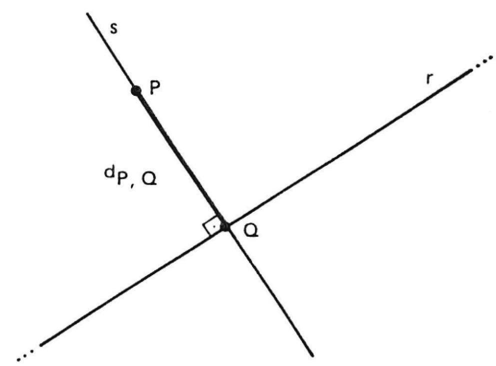
e. $d(P, Q) =$

$= \sqrt{[1 - (1 - \sqrt{2})]^2 + (2\sqrt{2} - \sqrt{2})^2} =$

$= \sqrt{4} = 2$

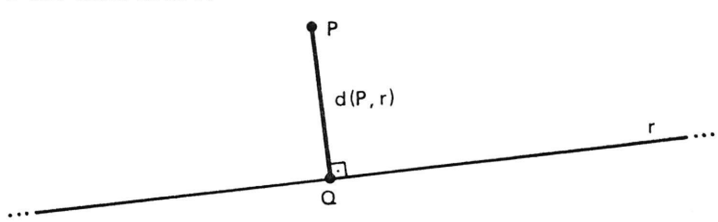
$\boxed{d(P, Q) = 2}$

Acompanhe novamente a seqüência da resolução do último exercício. O que fizemos foi calcular a distância de P até a reta r.



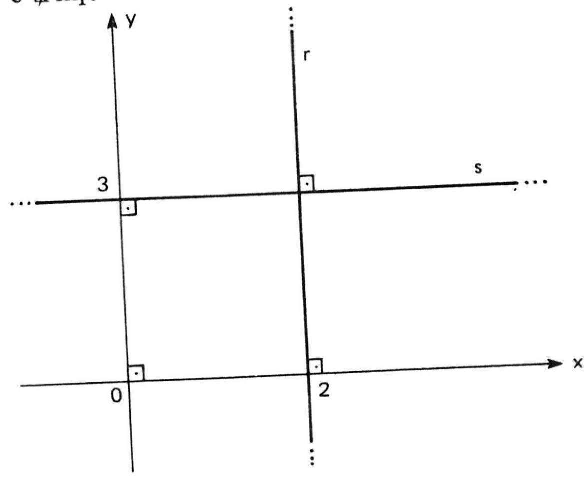
15 Distância de um ponto até uma reta

Em primeiro lugar, recordemos a definição de distância de um ponto **P** até uma reta **r**:



Um caso particular: r vertical e s horizontal

As retas (r) $x - 3 = 0$ e (s) $y - 2 = 0$ são perpendiculares, pois r é vertical e s é horizontal. Entretanto, não vale $m_r \cdot m_s = -1$, pois $m_s = 0$ e $\nexists\, m_r$.



Exercícios

1. Considerando que r e s são perpendiculares e que $m_s = -\frac{1}{3}$, calcule m_r.

Resolução:
Substituindo, na condição de perpendicularidade, m_s por $-\frac{1}{3}$, obtemos:

$$m_s = -\frac{1}{3} \rightarrow m_r \cdot m_s = -1 \rightarrow m_r \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{m_r = 3}$$

2. Sendo r perpendicular a s, calcule o coeficiente angular (m_r) da reta r:

a. $m_s = 2$
b. $m_s = -2$
c. $m_s = -\frac{2}{3}$
d. $m_s = \frac{4}{5}$
e. $m_s = \frac{\sqrt{2}}{2}$
f. $m_s = \sqrt{3}$
g. $m_s = -1$
h. $m_s = 0$
i. $m_s = \frac{\sqrt{3}}{3}$
j. $m_s = -\frac{\sqrt{2}}{4}$

3. Determine que pares de retas são perpendiculares:

a. (r) $3x - y + 5 = 0$ e (s) $x + 3y - 1 = 0$

Resolução:
Passando as equações para a forma reduzida, temos:

(r) $3x - y + 5 = 0 \rightarrow y = 3x + 5 \quad \rightarrow m_r = 3$

(s) $x + 3y - 1 = 0 \rightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \rightarrow m_s = -\frac{1}{3}$

$m_r \cdot m_s = 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{3}{3} = -1 \rightarrow r \perp s.$

b. (r) $3x - 4y + 1 = 0$ e (s) $4x - 3y + 7 = 0$
c. (r) $6x - 15y + 7 = 0$ e (s) $10x + 4y - 3 = 0$
d. (r) $9x - 12y + 5 = 0$ e (s) $8x + 6y - 13 = 0$
e. (r) $7x - 2y + 1 = 0$ e (s) $4x + 6y + 17 = 0$
f. (r) $5x - 7y + 3 = 0$ e (s) $3x + 2y - 5 = 0$
g. (r) $5x - 10 = 0$ e (s) $-3y + 9 = 0$

4. Escreva a equação da reta r que passa pelo ponto P(2, 4) e é perpendicular à reta (s) $y = \frac{1}{5}x + 2$.

Resolução:
$m_s = \frac{1}{5}$

$r \perp s \Rightarrow m_r \cdot m_s = -1 \Rightarrow m_r \cdot \frac{1}{5} = -1 \Rightarrow \boxed{m_r = -5}$

r passa por P(2, 4) e $m_r = -5$.

Logo: $y - 4 = -5(x - 2) \rightarrow y - 4 = -5x + 10 \rightarrow$

$\rightarrow \boxed{5x + y - 14 = 0}$

5. Escreva a equação da reta r que passa pelo ponto P(−1, 3) e é perpendicular à reta (s) $2x - 6y + 12 = 0$.

6. Escreva a equação da reta r que passa pelo ponto P(−2, −3) e é perpendicular à reta (s) $\frac{x}{(-2)} + \frac{y}{3} = 1$.

3. (OSEC-79) Dado o determinante $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 16 & 24 \\ 0 & 16 & 32 & 48 \\ 0 & 8 & 16 & 24 \end{vmatrix}$, pode-se afirmar que:

a. ( ) esse determinante é nulo somente para $x = \frac{1}{2}$.

b. ( ) esse determinante é nulo somente para $x = 0$.

c. ( ) esse determinante é nulo somente para $x = 0$ ou $x = \frac{1}{2}$.

d. ( ) esse determinante é nulo somente para $x \in \mathbb{N}^*$.

e. ( ) esse determinante é nulo para qualquer x real.

4. (ITA-78) Sejam r_1 e r_2, respectivamente, as características das matrizes incompleta e completa do sistema $\begin{cases} 3x + 2y + Kz = 3 \\ x + y + z = 2 \\ -x - y + Kz = 0 \end{cases}$ e $M = (K + r_1 + r_2)^2$.
Quais as condições sobre **M** e **K**, de modo que o sistema admita solução única?

a. ( ) $M = 25$ e $K = -1$.
b. ( ) $M \neq 25$ e $K = -1$.
c. ( ) $M \neq 25$ e $K \neq -1$.
d. ( ) $M = 25$ e $K \neq -1$.
e. ( ) n.d.a.

5. (FEI-77) Se $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, calcular o número real **x**, tal que $\det(A - xB) = 0$.

6. (UFT-79) Para multiplicar o determinante de uma matriz por um número $K \neq 0$, multiplica-se:

a. ( ) uma linha da matriz por **K**.
b. ( ) uma linha e uma coluna da matriz por **K**.
c. ( ) todas as linhas da matriz por **K**.
d. ( ) a matriz por **K**.

7. (UFSC-79) O valor de **m** para que o sistema $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x + y + mz = 4 \\ 3x - 2y - 3z = 6 \end{cases}$ seja indeterminado é:

a. ( ) 1
b. ( ) $-\frac{1}{2}$
c. ( ) $\frac{1}{2}$
d. ( ) 2
e. ( ) -2

8. (MACK-79) Com relação ao sistema $\begin{cases} 3x + 2y = 1 - ky \\ 3y - 2x = 1 - kx \end{cases}$, **k** real, podemos afirmar que:

a. ( ) se $k = \sqrt{13}$, o sistema é indeterminado.

b. ( ) se $k = 5$, o sistema é incompatível.

c. ( ) se $k = 5$, o sistema é determinado.

d. ( ) não existe **k**, de modo que o sistema seja determinado.

e. ( ) não existe **k**, de modo que o sistema seja incompatível.

3. (OSEC-79) Dado o determinante $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 16 & 24 \\ 0 & 16 & 32 & 48 \\ 0 & 8 & 16 & 24 \end{vmatrix}$, pode-se afirmar que:

a. ( ) esse determinante é nulo somente para $x = \frac{1}{2}$.

b. ( ) esse determinante é nulo somente para $x = 0$.

c. ( ) esse determinante é nulo somente para $x = 0$ ou $x = \frac{1}{2}$.

d. ( ) esse determinante é nulo somente para $x \in \mathbb{N}^*$.

e. ( ) esse determinante é nulo para qualquer x real.

4. (ITA-78) Sejam r_1 e r_2, respectivamente, as características das matrizes incompleta e completa do sistema $\begin{cases} 3x + 2y + Kz = 3 \\ x + y + z = 2 \\ -x - y + Kz = 0 \end{cases}$ e $M = (K + r_1 + r_2)^2$.

Quais as condições sobre **M** e **K**, de modo que o sistema admita solução única?

a. ( ) $M = 25$ e $K = -1$.
b. ( ) $M \neq 25$ e $K = -1$.
c. ( ) $M \neq 25$ e $K \neq -1$.
d. ( ) $M = 25$ e $K \neq -1$.
e. ( ) n.d.a.

5. (FEI-77) Se $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, calcular o número real x, tal que $\det(A - xB) = 0$.

6. (UFT-79) Para multiplicar o determinante de uma matriz por um número $K \neq 0$, multiplica-se:

a. ( ) uma linha da matriz por **K**.
b. ( ) uma linha e uma coluna da matriz por **K**.
c. ( ) todas as linhas da matriz por **K**.
d. ( ) a matriz por **K**.

7. (UFSC-79) O valor de **m** para que o sistema $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x + y + mz = 4 \\ 3x - 2y - 3z = 6 \end{cases}$ seja indeterminado é:

a. ( ) 1
b. ( ) $-\frac{1}{2}$
c. ( ) $\frac{1}{2}$
d. ( ) 2
e. ( ) -2

8. (MACK-79) Com relação ao sistema $\begin{cases} 3x + 2y = 1 - ky \\ 3y - 2x = 1 - kx \end{cases}$, **k** real, podemos afirmar que:

a. ( ) se $k = \sqrt{13}$, o sistema é indeterminado.

b. ( ) se $k = 5$, o sistema é incompatível.

c. ( ) se $k = 5$, o sistema é determinado.

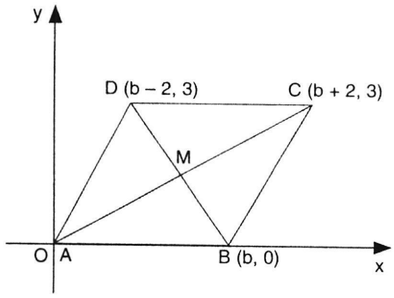
d. ( ) não existe **k**, de modo que o sistema seja determinado.

e. ( ) não existe **k**, de modo que o sistema seja incompatível.

soluções

lunas)
a ma-
do se
ar das
) pro-
onde

16. (UI – MG) Observe a figura:



Nessa figura, ABCD é um paralelogramo e M é ponto médio de $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$.

Nessas condições, as coordenadas do ponto M são:

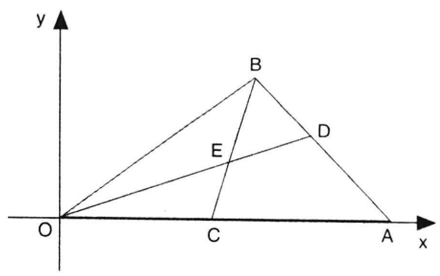
a) $\left(\frac{3}{2}, 3\right)$ b) $\left(2, \frac{1}{2}\right)$ c) $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$

d) $\left(3, \frac{3}{2}\right)$ e) $(3, 3)$

a) 4 b) $2\sqrt{5}$ c) 5

d) $\sqrt{26}$ e) $\sqrt{34}$

18. (UFES) Na figura, OD e BC são medianas do triângulo OAB. Se A = (5; 0), B = (4; 4) e O = (0; 0),



então o ponto E tem coordenadas:

a) $\left(\frac{7}{2}; \frac{4}{3}\right)$ b) $\left(\frac{5}{2}; \frac{4}{3}\right)$ c) $\left(\frac{5}{2}; \frac{5}{3}\right)$

d) $\left(3; \frac{5}{3}\right)$ e) $\left(3; \frac{4}{3}\right)$

19. (UFRJ) Sejam $M_1 = (1; 2)$, $M_2 = (3; 4)$ e $M_3 = (1; -1)$ os pontos médios dos lados de um triângulo. Determine as coordenadas dos vértices desse triângulo.

Capítulo 9: Equações da reta

1. (UNIBAN – SP) A equação da reta que contém os pontos A(1; 2) e B(2; 1) é:

a) $y = x$ b) $y = -x - 3$ c) $y = x - 3$

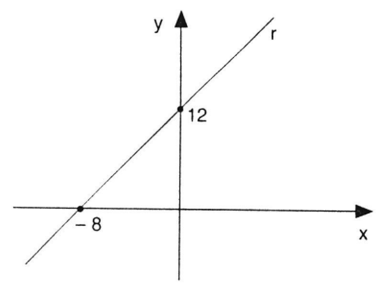
d) $y = -x + 3$ e) $y = x + 3$

2. (UNISO – SP) A reta que passa pelos pontos (–1; 4) e (2; 1) intercepta a reta x = 2 no ponto:

a) (2; –1) b) (2; 4) c) (2; 1)

d) (2; 3) e) (2; 0)

3. (USF – SP) Seja r a reta representada na figura abaixo:

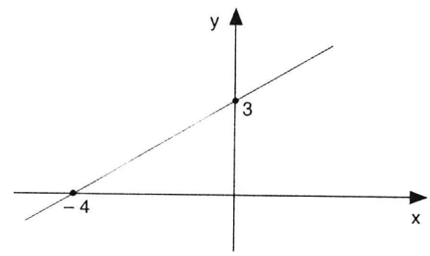


O ponto de **r**, que tem ordenada 198, tem abcissa igual a:

a) 124 b) 122 c) 120

d) 115 e) 110

4. (CESGRANRIO – RJ) A equação da reta mostrada na figura a seguir é:



a) $3x + 4y - 12 = 0$ b) $3x - 4y + 12 = 0$

c) $4x + 3y + 12 = 0$ d) $4x - 3y - 12 = 0$

e) $4x - 3y + 12 = 0$

5. (ECMAL – AL) A equação cartesiana da reta que liga a origem do sistema de coordenadas ao vértice da parábola $y = x^2 - 8x + 17$ é:

a) $x - y = 0$ b) $x - 2y = 0$

c) $x - 3y = 0$ d) $x - 4y = 0$

e) $x - 5y = 0$

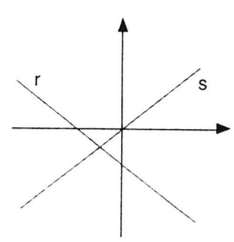
6. (USU – RJ) Sejam r e s duas retas do plano tais que suas equações são, respectivamente:

r: $ax + by + c = 0$

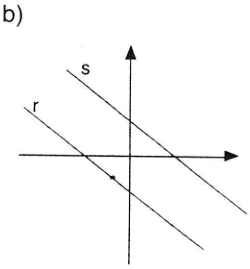
s: $bx - ay = 0$

onde a, b e c são números reais não-nulos. O gráfico cartesiano que melhor representa aquelas retas é:

a)



b)



18. (FATEC – SP) Sabe-se que as ordens das matrizes *A*, *B* e *C* são, respectivamente 3 x r, 3 x s e 2 x t. Se a matriz (A – B) . C é de ordem 3 x 4, então r + s + t é igual a:

a) 6 b) 8 c) 10 d) 12 e) 14

19. (UE – PI) Se $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & p \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ é a matriz inversa da matriz $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & q \end{pmatrix}$, então p + q é igual a:

a) $\frac{43}{12}$ b) $\frac{11}{3}$ c) $\frac{15}{4}$ d) $\frac{23}{6}$ e) $\frac{47}{12}$

20. (UF – AL) O elemento localizado na segunda linha e terceira coluna da matriz $A = (a_{ij})_{3x3}$ definida por

$$a_{ij} = \begin{cases} \sqrt{i}, \text{ se } i < j \\ \log j, \text{ se } i = j \\ i^j, \text{ se } i > j \end{cases}$$

a) 8 b) log 3 c) log 2 d) $\sqrt{3}$ e) $\sqrt{2}$

21. (FUNREI – MG) sendo *A* uma matriz quadrada, definimos $A^n = A . \underbrace{A . .... . A}_{n \text{ vezes}}$. No caso de A ser a matriz $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, é correto afirmar que a soma $A + A^2 + A^3 + A^4 + ... + A^{39} + A^{40}$ é igual à matriz:

a) $\begin{bmatrix} 20 & 20 \\ 20 & 20 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 40 & 40 \\ 40 & 40 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 0 & 40 \\ 40 & 0 \end{bmatrix}$

22. (PUC PELOTAS – RS) Seja a matriz $A = (a_{ij})_{3x3}$, na qual $a_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ se } i = j \\ 1 \text{ se } i > j \\ -1 \text{ se } i < j \end{cases}$ então $A - A^t + I_3$ resulta na matriz:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

23. (UF – SE) A matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 8 & 7 & 4 \end{pmatrix}$ pode ser descrita como a matriz $A = (a_{ij})_{3x3}$ tal que a_{ij} é igual a:

a) $\begin{cases} 1 + i \text{ se } i \le j \\ i^2 - j \text{ se } i > j \end{cases}$ b) $\begin{cases} 1 + i \text{ se } i \le j \\ 2(i + j) \text{ se } i > j \end{cases}$

c) $\begin{cases} 1 + i \text{ se } i \le 2 \\ 4(i - j) \text{ se } i = 3 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 1 + i \text{ se } i \le 2 \\ i^2 - 1 \text{ se } i = 3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 1 + i \text{ se } i \le 2 \\ i^2 - j \text{ se } i = 3 \end{cases}$

24. (UA – AM) Sendo as matrizes $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -4 \\ 3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} -8 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 10 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 6 & -8 & 7 \\ -4 & -2 & 6 \end{pmatrix}$,

a matriz $-2A + \frac{1}{2}B - \frac{3}{2}C$ é igual a:

a) $\begin{pmatrix} -11 & 13 & -3 \\ 0 & 17 & -6 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -17 & 18 & 19 \\ 0 & 17 & -12 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -11 & 13 & 19 \\ -12 & 11 & -6 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -17 & 18 & -3 \\ -12 & 11 & -6 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 7 & -11 & 6 \\ 18 & 0 & -12 \end{pmatrix}$

25. (UA – AM) Se $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, então o valor de 2x é:

a) 1 b) $\frac{1}{2}$ c) 2 d) 4 e) 0

26. (UCSAL – BA) A igualdade matricial $2 . \begin{bmatrix} x & x^2 - 1 \\ -1 & -x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 + 6x & 30 \\ -2 & -2x \end{bmatrix}$ em que $x \in IR$, é verdadeira se, e somente se, x^3 é igual a:

a) – 64 b) 64 c) 0

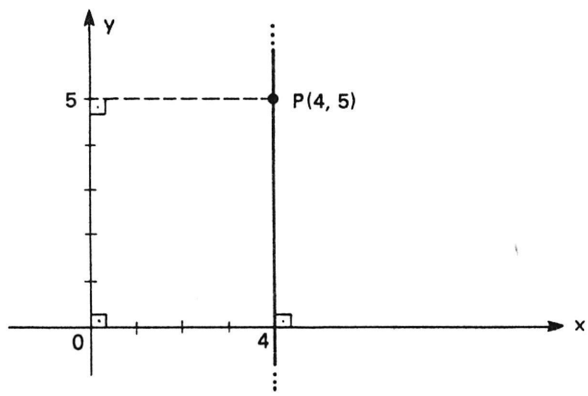
d) – 64 ou 64 e) – 64, 0 ou 64

27. (UF – MG) Em três tipos de alimentos verificou-se que, para cada grama:

a) o alimento I tem 2 unidades de vitamina A, 2 unidades de vitamina B e 8 unidades de vitamina C;
b) o alimento II tem 2 unidades de vitamina A, 1 unidade de vitamina B e 5 unidades de vitamina C;
c) o alimento III tem 3 unidades de vitamina A, não contém vitamina B e tem 3 unidades de vitamina C.

Exemplo:

Se **r** é vertical e P(4, 5) está em **r**, a sua equação será:



$$\boxed{x = 4}$$

Exercícios

1. Escreva, na forma $ax + by + c = 0$, a equação da reta r que passa pelos pontos **A** e **B**:

a. $A(-3, 5)$ e $B(1, 1)$

Resolução:

Para todo ponto $P(x, y)$ alinhado com **A** e **B**, temos:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -3 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff 5x + y - 3 - 5 + 3y - x = 0 \iff$$

$$\iff \boxed{4x + 4y - 8 = 0}$$

b. $A(0, 3)$ e $B(-2, 1)$
c. $A(-4, 0)$ e $B(0, -3)$
d. $A(5, 1)$ e $B(-1, -4)$
e. $A(-2, 2)$ e $B(-1, -5)$
f. $A(3, 2)$ e $B(6, 2)$
g. $A(5, 0)$ e $B(-5, 0)$
h. $A(-3, -4)$ e $B(4, -4)$
i. $A(5, 1)$ e $B(5, 10)$
j. $A(-4, -2)$ e $B(-4, 5)$
l. $A(0, 3)$ e $B(0, -2)$

Nos exercícios de 2 a 7, escreva as equações na forma $ax + by + c = 0$.

2. Escreva a equação da reta que passa pelo ponto **Q**, cujo coeficiente angular é **m**:

a. $Q(4, -3)$ e $m = 2$

Resolução:

Utilizando a expressão $y - y_0 = m(x - x_0)$, temos:

$y - (-3) = 2(x - 4)$
$y + 3 = 2x - 8$

$\boxed{2x - y - 11 = 0}$

b. $Q(1, -1)$ e $m = 1$
c. $Q(-2, 3)$ e $m = 3$
d. $Q(4, 0)$ e $m = -2$
e. $Q(5, 0)$ e $m = \frac{1}{5}$
f. $Q(-2, -3)$ e $m = -3$
g. $Q(0, 0)$ e $m = \frac{1}{2}$
h. $Q(3, 2)$ e $m = 0$
i. $Q(-2, -3)$ e $m = 0$
j. $Q(5, 4)$ e $m = -1$
l. $Q(\sqrt{2}, 1)$ e $m = \sqrt{2}$

3. Escreva a equação da reta que passa pelo ponto $Q(7, -2)$ e tem inclinação de 45°.

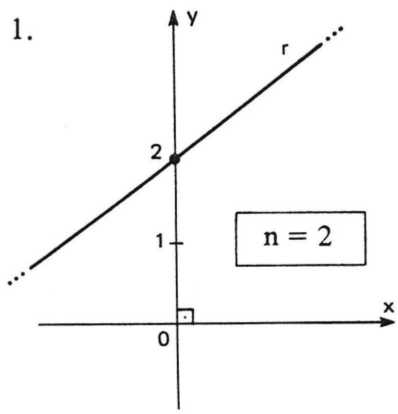
4. Escreva a equação da reta que passa pelo ponto $Q(-5, 3)$ e é perpendicular ao eixo **x**.

5. Dados $A(-1, 1)$, $B(2, 5)$ e $C(3, 7)$, determine as equações das retas que contêm os lados do triângulo ABC.

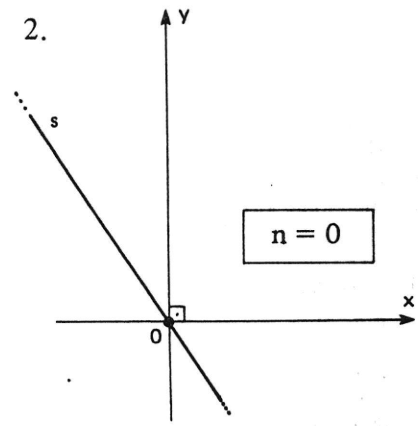
6. Dados $A(-3, 2)$, $B(1, -6)$ e $C(5, 4)$, determine as equações das retas que contêm as medianas do triângulo ABC.

Exemplos:

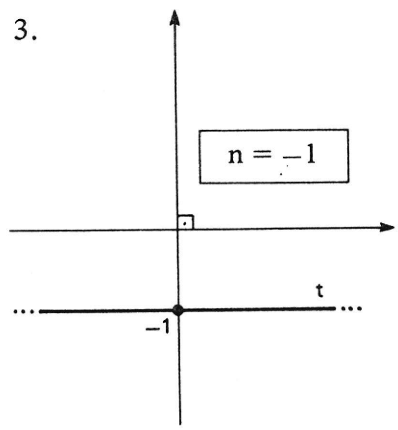
1.



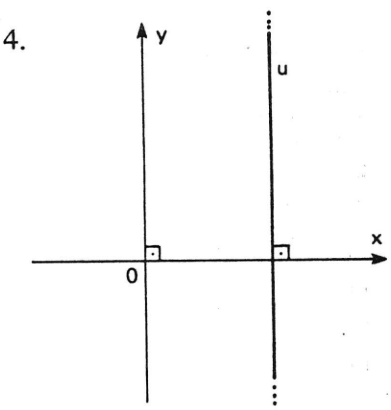
2.



3.



4.



Uma reta perpendicular ao eixo x não tem coeficiente linear.

Exercícios

1. Determine o coeficiente linear das retas dadas:

a. $x - 3y + 6 = 0$

Resolução:
Para obter o coeficiente linear da reta, basta obter o ponto em que a reta encontra o eixo y. Para isto, substituímos x por 0 na equação:

$x = 0 \rightarrow 0 - 3y + 6 = 0 \rightarrow y = 2$

O ponto procurado é (0, 2). Logo, o coeficiente linear é $\boxed{n = 2}$.

b. $x + y - 1 = 0$

c. $4x + 3y - 12 = 0$

d. $2x - y - 5 = 0$

e. $4x - 3y = 0$

f. $y - 5 = 0$

g. $x + 5 = 0$

2. Para que valor de k o coeficiente linear da reta $3x + y + 2k = 0$ é igual a 5?

3. Qual o coeficiente linear da reta que passa pelos pontos A(7, 2) e B(1, −10)?

12. Determine o ponto de encontro das retas dadas:

a. $x + 3y - 1 = 0$ e $3x - 3y + 5 = 0$

b. $-x + y - 10 = 0$ e $x + 4y - 15 = 0$

c. $3x + 5y + 6 = 0$ e $x - y + 2 = 0$

13. Dados $A(-3, 1)$, $B(3, 9)$, $C(7, 6)$ e $D(-2, -6)$, determine o ponto de encontro das diagonais do quadrilátero ABCD.

14. Verifique se o ponto **P** pertence à reta dada:

a. $P(1, 3)$ e $x - y + 2 = 0$

Resolução:
Substituindo as coordenadas de **P** na equação, obtemos uma sentença verdadeira:

$1 - 3 + 2 = 0 \rightarrow 0 = 0$

Isto significa que o ponto pertence à reta.

b. $P(2, 7)\ \epsilon\ x + y - 1 = 0$

Resolução:
Substituindo as coordenadas de **P** na equação, obtemos uma sentença falsa:

$2 + 7 - 1 = 0 \rightarrow 8 = 0$

Isto significa que o ponto **não** pertence à reta.

c) $P(-2, 2)$ e $x + 3y - 4 = 0$

d. $P(3, 11)$ e $4x - y - 1 = 0$

e. $P(-3, 2)$ e $x + y + 4 = 0$

f. $P(-3, -1)$ e $-x - y - 4 = 0$

15. Determine o valor de k, de tal forma que o ponto $P(2, 1)$ pertença à reta $x + y + k = 0$.

16. Verifique se a reta $3x + y = 0$ passa pela origem do sistema de eixos cartesianos.

17. Verifique se a origem do sistema de eixos cartesianos pertence à reta $x + 3y - 1 = 0$.

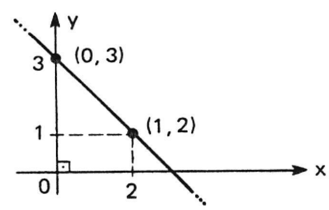
18. Desenhe no plano cartesiano a reta cuja equação é $x + y - 3 = 0$.

Resolução:
Para desenharmos a reta no plano cartesiano, basta encontrarmos dois de seus pontos:

$x = 2 \rightarrow y = 1 \rightarrow (2, 1)$ pertence à reta

$x = 0 \rightarrow y = 3 \rightarrow (0, 3)$ pertence à reta

Localizando estes pontos no plano, temos a reta:



19. Desenhe no plano cartesiano as retas dadas:

a. $2x - y + 1 = 0$

b. $x - y - 3 = 0$

c. $3x + y - 1 = 0$

d. $x + y + 3 = 0$

e. $2x - y = 0$

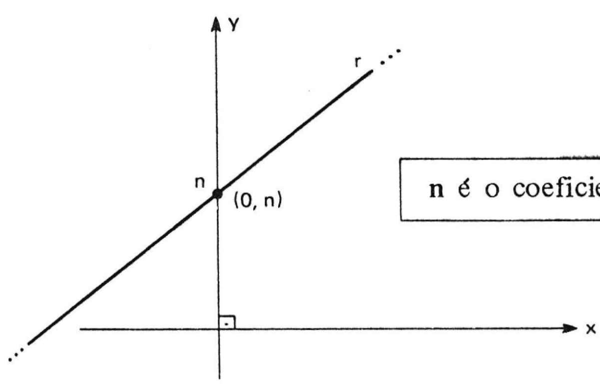
f. $x - 3 = 0$

g. $x + 8 = 0$

h. $y - 1 = 0$

11 Coeficiente linear de uma reta

O coeficiente linear de uma reta **r**, não perpendicular ao eixo **x**, é a ordenada **n** do ponto em que esta reta corta o eixo y.



n é o coeficiente linear de r.

Exemplos:

1. $2x - 2y + 6 = 0$ é a equação da reta que tem coeficiente angular $m = 1$ e coeficiente linear $n = 3$. De fato, podemos escrever:

$$2x - 2y + 6 = 0 \rightarrow 2y = 2x + 6 \rightarrow \boxed{y = x + 3}$$

2. $4y - 8 = 0$ é a equação da reta que tem coeficiente angular $m = 0$ e coeficiente linear $n = 2$. De fato, temos:

$$4y - 8 = 0 \rightarrow 4y = 8 \rightarrow \boxed{y = 2}$$

Esta reta é paralela ao eixo x.

3. $2x - 6 = 0$ é a equação da reta que é perpendicular ao eixo **x** e passa pelo ponto (3, 0). De fato, podemos escrever:

$$2x - 6 = 0 \rightarrow 2x = 6 \rightarrow \boxed{x = 3}$$

Exercícios

7. Obtenha o coeficiente angular **m** e o coeficiente linear **n** das retas dadas:

a. $5x + y + 10 = 0$

Resolução:
Basta colocar a equação na forma reduzida:
$5x + y + 10 = 0 \rightarrow y = -5x - 10$
Temos, então: $m = -5$ e $n = -10$

b. $4x - 2y + 9 = 0$

Resolução:
$4x - 2y + 9 = 0 \rightarrow -2y = -4x - 9 \rightarrow$
$\rightarrow y = \dfrac{-4x - 9}{-2} \rightarrow y = 2x + \dfrac{9}{2}$

Logo: $m = 2$ e $n = \dfrac{9}{2}$

c. $3x + y - 8 = 0$
d. $-x + 2y + 6 = 0$
e. $4x - 2y + 16 = 0$
f. $4x - 2y = 0$
g. $3y - 9 = 0$
h. $6x + 12 = 0$

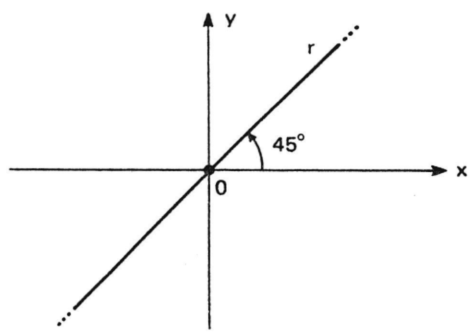
8. Escreva a equação geral da reta cujo coeficiente angular é $m = -7$ e que passa pelo ponto $P(2, -3)$.

9. Escreva a equação geral da reta que passa pelos pontos $A(-1, 1)$ e $B\left(1, -\dfrac{1}{3}\right)$.

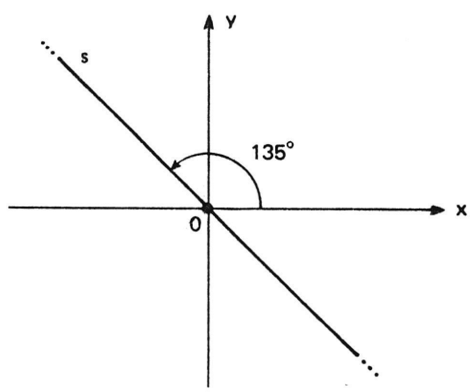
10. Escreva a equação geral da reta que passa pelos pontos A e B:

a. $A(1, 7)$ e $B(-5, 7)$
b. $A(3, 1)$ e $B(3, 8)$
c. $A(0, 0)$ e $B(1, 5)$

11. Escreva a equação geral e reduzida das bissetrizes dos quadrantes pares e dos quadrantes ímpares.



A reta r é a bissetriz dos quadrantes ímpares.



A reta s é a bissetriz dos quadrantes pares.

12. Dados os vértices adjacentes A(−3, −1) e B(2, 2) de um paralelogramo ABCD e o ponto M(3, 0) de intersecção das diagonais, escreva as equações dos lados na forma geral.

13. Encontre um ponto da bissetriz dos quadrantes ímpares, cuja distância à origem do sistema cartesiano é $2\sqrt{2}$.

Resolução:
O ponto procurado é da forma (x, x). Seja d a distância de (x, x) até (0, 0):

$$d = \sqrt{(x-0)^2 + (x-0)^2} = \sqrt{2x^2}$$

Mas $d = 2\sqrt{2}$

Logo: $\sqrt{2x^2} = 2\sqrt{2}$

Elevando ambos os membros ao quadrado, temos:

$$2x^2 = 8$$

$$x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$$

Existem, portanto, dois pontos que satisfazem às condições do problema: (2, 2) e (−2, −2).

14. Encontre um ponto da bissetriz dos quadrantes ímpares, cuja distância ao ponto P(8, 0) é $2\sqrt{10}$.

15. Encontre um ponto da bissetriz dos quadrantes pares, cuja distância ao ponto P(2, 0) é 2.

16. Encontre um ponto da reta $y = x + 1$, cuja distância à origem é 5.

17. Os pontos A(−7, 3) e B(11, −15) estão igualmente distantes da reta r que passa pelo ponto P(3, 6). Sabendo que r não é paralela à reta $\overleftrightarrow{AB}$:

a. escreva a equação geral de r.
b. escreva a equação reduzida de r.
c. qual o coeficiente angular de r?
d. qual o coeficiente linear de r?

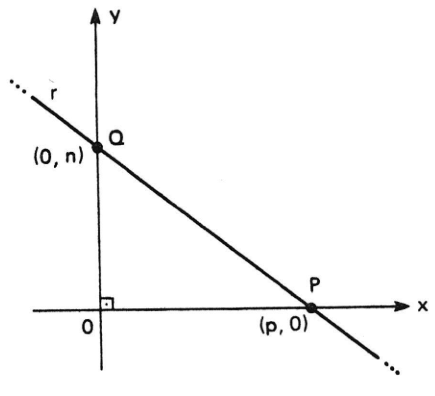
Equação segmentária da reta

Toda reta que encontra os dois eixos em pontos diferentes da origem pode ter a sua equação escrita na forma:

$$\boxed{\frac{x}{p} + \frac{y}{n} = 1}$$

Esta equação é conhecida como **equação segmentária da reta.**

Considere P(p, 0) e Q(0, n) (P ≠ Q) os pontos em que uma reta r encontra os eixos.



A equação da reta r é:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0 & n & 1 \\ p & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow nx + py - np = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow nx + py = np \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{x}{p} + \frac{y}{n} = 1}$$

Observe que os denominadores **p** e **n** indicam os pontos em que a reta encontra os eixos **x** e **y**, respectivamente.

c. (r) $2x + y - 3 = 0$ e (s) $x + 4y - 5 = 0$

d. (r) $y - 4 = 0$ e (s) $2y - 10 = 0$

e. (r) $x - 4y + 1 = 0$ e (s) $-3x + 12y - 3 = 0$

f. (r) $x - 8 = 0$ e (s) $-3x + 18 = 0$

g. (r) $-x + 5 = 0$ e (s) $y = 2x - 3$

2. Escreva a equação da reta que passa pelo ponto $P(1, 3)$ e é paralela à reta $4x - 2y + 5 = 0$.

Resolução:
A reta procurada tem coeficiente angular igual ao da reta $4x - 2y + 5 = 0$. Passando para a forma reduzida, temos: $y = 2x + \frac{5}{2}$. Concluímos daí que o coeficiente angular da reta procurada é $m = 2$. Assim sendo, a equação é:

$$y - 3 = 2(x - 1) \rightarrow \boxed{2x - y + 1 = 0}$$

3. Escreva a equação da reta que passa pelo ponto $P(-3, 5)$ e é paralela à reta $3x + y - 1 = 0$.

4. Escreva a equação da reta que passa pelo ponto $P(0, 0)$ e é paralela à reta $y = \frac{1}{3}x + 2$.

5. Escreva a equação da reta que passa pelo ponto $(-2, 2)$ e é paralela à reta que passa pelos pontos $A(2, 1)$ e $B(-3, -9)$.

6. Escreva a equação da reta que passa pelo ponto $P(3, 3)$ e é paralela à reta $\frac{x}{(-2)} + \frac{y}{(-3)} = 1$.

7. Para que valor de **a** a reta $y = \frac{a}{2}x + 5$ é paralela à reta $12x - 6y + 8 = 0$?

8. Demonstre que o quadrilátero, cujos vértices são os pontos $A(-3, -2)$, $B(-2, 3)$, $C(1, 6)$ e $D(2, 3)$, é um trapézio.

9. Sejam M e N pontos médios dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ mencionados no exercício anterior. Demonstre que o segmento $\overline{MN}$ é paralelo aos segmentos $\overline{BC}$ e $\overline{AD}$ e que $MN = \frac{BC + AD}{2}$.

10. Sejam M e N os pontos médios dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ do triângulo ABC, cujos vértices são os pontos $A(2, 6)$, $B(-4, -2)$ e $C(8, 2)$. Demonstre que:

a. o segmento $\overline{MN}$ é paralelo ao lado $\overline{BC}$;

b. $MN = \frac{BC}{2}$.

11. Determine para que valor de **p** a reta $(p + 2)x + (p^2 - 9)y + 3a^2 - 8a + 5 = 0$:

a. é paralela ao eixo das abscissas;

b. é paralela ao eixo das ordenadas;

c. passa pela origem.

12. Demonstre que as duas retas dadas são concorrentes:

a. $x + 5y - 35 = 0$, $3x + 2y - 27 = 0$

b. $14x - 9y - 24 = 0$, $7x - 2y - 17 = 0$

c. $8x - 33y - 19 = 0$, $12x + 55y - 19 = 0$

d. $3x + 5 = 0$, $y - 2 = 0$

14 Retas perpendiculares

Duas retas r e s não verticais são perpendiculares se, e somente se, o produto dos coeficientes angulares for -1.

Indicamos por: $\boxed{r \perp s \Longleftrightarrow m_r \cdot m_s = -1}$

Este resultado é conhecido como condição de perpendicularidade entre duas retas.

Vamos provar que se $r \perp s$, então $m_r \cdot m_s = -1$.

E6. Determine a matriz $A = (a_{ij})_{2 \times 3}$ tal que:

a) $a_{ij} = i + 2j$ c) $a_{ij} = 2i - j$

b) $a_{ij} = i^2 + j$ d) $a_{ij} = j - 2i$

E7. Escreva a matriz $B = (b_{ij})_{3 \times 2}$ tal que:

a) $b_{ij} = i \cdot j$ b) $b_{ij} = (i + j)^2$

E8. Determine a matriz $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$ tal que:

a) $a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se } i = j \\ 0, \text{ se } i \neq j \end{cases}$ c) $a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se } i = j \\ -1, \text{ se } i \neq j \end{cases}$

b) $a_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ se } i = j \\ 1, \text{ se } i \neq j \end{cases}$ d) $a_{ij} = \begin{cases} i + j, \text{ se } i = j \\ -i - j, \text{ se } i \neq j \end{cases}$

E9. Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, determine a soma dos elementos a_{ij} tais que:

a) $i + j = 4$ c) $i - j = 1$

b) $i + j = 3$ d) $i = j$

Resolução de E6-b

A matriz A do tipo 2×3 é:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Pela lei $a_{ij} = i^2 + j$, temos:

$a_{11} = 1^2 + 1 = 2$ $a_{21} = 2^2 + 1 = 5$

$a_{12} = 1^2 + 2 = 3$ $a_{22} = 2^2 + 2 = 6$

$a_{13} = 1^2 + 3 = 4$ $a_{23} = 2^2 + 3 = 7$

Logo: $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$

Resolução de E8-a

A matriz A do tipo 2×2 é: $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

Pela lei $a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se } i = j \\ 0, \text{ se } i \neq j \end{cases}$, temos:

$a_{11} = 1$, pois $i = j$

$a_{12} = 0$, pois $i \neq j$

$a_{21} = 0$, pois $i \neq j$

$a_{22} = 1$, pois $i = j$

Logo: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Matriz quadrada

Uma matriz é quadrada se o número de linhas é igual ao número de colunas. Assim, chamamos **matriz quadrada de ordem n** toda matriz do tipo $n \times n$.

Exemplos:

1. A matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ é quadrada de ordem 2, pois:

número de linhas = número de colunas = 2

2. A matriz $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ é quadrada de ordem 3, pois:

número de linhas = número de colunas = 3

Uma matriz quadrada de ordem **n** possui duas diagonais: a **principal**, composta pelos elementos a_{ij} tal que $i = j$, isto é, a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}, ..., a_{nn}, e a **secundária**, composta pelos elementos a_{ij} tal que $i + j = n + 1$, ou a_{1n}, $a_{2,n-1}$, $a_{3,n-2}$, ..., a_{n1}.

Exemplo:

Na matriz quadrada $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & -1 \\ 5 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, a diagonal principal é formada pelos elementos 2, 7 e 4 e a diagonal secundária, por 0, 7 e 5.

Matriz-linha

Matriz do tipo $1 \times n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$:

$$[a_{11} \quad a_{12} \quad \dots \quad a_{1n}]$$

Matriz-coluna

Matriz do tipo $n \times 1$ $(n \in \mathbb{N}^*)$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}$$

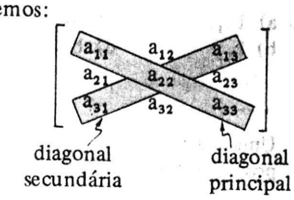
Matriz nula (O)

Matriz do tipo $m \times n$ cujos elementos são nulos:

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{m \times n}$$

Diagonais

Numa matriz quadrada de ordem 3, temos:



19. (FCC) As retas $2x - y + 3 = 0$ e $x - 2y + 6 = 0$ interceptam-se:

a) sobre o eixo das ordenadas.

b) no ponto $(-6, 0)$.

c) sobre o eixo das abscissas.

d) na origem dos eixos coordenados.

e) no ponto $(1, 5)$.

20. (UC-PR) Os valores de a e b nas equações $ax + (2 - b)y - 23 = 0$ e $(a - 1)x + by + 15 = 0$, para que elas representem retas que passam pelo ponto $(2, -3)$ são:

a) $a = 7$ e $b = 4$

b) $a = -7$ e $b = 4$

c) $a = 4$ e $b = 7$

d) $a = -4$ e $b = 7$

e) $a = -4$ e $b = -7$

21. (MACK-SP) A distância do ponto de intersecção das retas $2x - 3y + 26 = 0$ e $5x + 2y - 49 = 0$ à origem é:

a) 13

b) 23

c) 15

d) 18

e) 17

22. (Acafe-SC) Os pontos $A(1, 1)$, $B(-2, 4)$ e $C(7, 2)$ são vértices do triângulo cuja área é:

a) 11,5 u.a.

b) 12,5 u.a.

c) 10,5 u.a.

d) 13,5 u.a.

e) 9,5 u.a.

23. (MACK-SP) Conhecidos os vértices $A(0, 0)$, $B(3, 0)$ e $C(4, 2)$, podemos afirmar que a área do paralelogramo ABCD vale:

a) 3

b) 6

c) 8

d) 9

e) 12

24. (MACK-SP) A área de um triângulo é $\frac{25}{2}$ e os seus vértices são $(0, 1)$, $(2, 4)$ e $(-7, k)$. O valor de k pode ser:

a) 3

b) 2,5

c) 2

d) 4

e) 5

25. (Fatec-SP) A área do triângulo ABC, determinado pelas retas de equações

$$r_1: \ 2x + 6y = 6$$
$$r_2: \ x + 5y = 9$$

e pelo eixo dos x, é:

a) 6

b) 9

c) 10

d) 12

e) 14

26. (PUC-SP) Qual é a distância da origem à reta de equação $3x - 4y = 10$?

a) $\sqrt{2}$

b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\sqrt{10}$

d) 1

e) 2

27. (FGV) As retas (r) $x + 2y = 5$ e (s) $4x + ky = 5$ são paralelas se:

a) $k = 8$

b) $k = 7$

c) $k = 6$

d) $k = 5$

e) $k = 4$

28. (Unifor) São dados os pontos $A(-1; 3)$, $B(0; 2)$ e $C(1; 2)$. A equação da reta paralela à reta $\overleftrightarrow{AB}$, passando pelo ponto C, é:

a) $x - 3y + 5 = 0$

b) $2x - y = 0$

c) $x + 2y - 5 = 0$

d) $x - y + 1 = 0$

e) $x + y - 3 = 0$

29. (UFPA) Qual a equação da reta que passa pelo ponto $A(1, 1)$ e é paralela à reta $y = -2x + 1$?

a) $y = -2x + 3$

b) $y = -\frac{1}{2}x + 3$

c) $y = \frac{1}{2}x + 3$

d) $y = 2x + 1$

e) $y = 2x + 3$

30. (UFPA) A reta $y = mx - 5$ é paralela à reta $2y = -3x + 1$. Então, o valor de m é:

a) -3

b) $-\frac{1}{3}$

c) $\frac{3}{2}$

d) $-\frac{3}{2}$

e) $\frac{1}{2}$

31. (Copeve-PI) Calculando a equação da reta que passa pelo ponto $A = (2, 1)$ e é paralela à reta r dada por $y = 2x - 1$, encontra-se:

a) $y = 2x - 3$

b) $y = 2x + 3$

c) $y = -\frac{1}{2}x + 2$

d) $y = \frac{1}{2}x + 3$

32. (FCC) As retas de equações $ax + y = a + 2$ e $4x + ay = 4 - a^2$ são:

a) concorrentes, qualquer que seja o valor de $a \neq 0$.

b) paralelas, qualquer que seja o valor de a.

c) paralelas, se $a = 2$.

d) concorrentes, para todo $a \neq 2$.

e) concorrentes, para todo $a \neq 4$.

35. (FGV) A equação da reta s, que passa pelo ponto P, na figura abaixo, é:

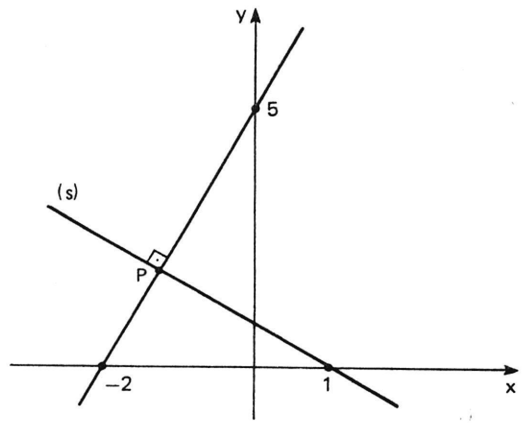
a) $2x + 5y = 2$

b) $2x - 5y = 2$

c) $-2x + 5y = 2$

d) $5x + 2y = 5$

e) $5x - 2y = 5$



36. (Fatec-SP) A reta do plano cartesiano, perpendicular ao eixo dos x, que passa pelo ponto $A = (-2, 4)$, é dada pela equação:

a) $2x + y = 0$

b) $x + y = 2$

c) $x - y = 6$

d) $y - 4 = 0$

e) $x + 2 = 0$