INSTITUTO DE EDUCAÇÃO GENERAL FLÔRES DA CUNHA

CURSO DE DIDÁTICA DA MATEMÁTICA
MODERNA

Trabalho de Grupo

"OPERAÇÕES"

Foi a própria complexidade da vida matemática que obrigou o homem a abandonar a contagem " um a um " e a "contar em grupos". Foi por êste caminho que o homem chegou às operações matemáticas.

Certas atividades inspiram as operações matemáticas.*

Podemos dizer que: ao reunir dois conjuntos, o homem adiciona; quando, de um conjunto retira um sub-conjunto, êle subtrai; reunindo vários conjuntos equivalentes, estaria multiplicando e, finalmente, se decompusesse um conjunto em vários sub-conjuntos da mesma cardinalidade, estaria dividindo.

Vamos tratar nêste trabalho, das quatro operações matemáticas: adição, subtração, multiplicação e divisão.

Tentaremos chegar as idéias e razões que nos levam às operações e às técnicas de computar.

A D I Ç Ã O

Da operação elementar de contagem um a um, chegamos a adição. Isto é: deixamos de acrescentar um elemento sucessivamente a um conjunto básico e passamos a reunir conjuntos.

Assim, quando colocamos em um mesmo frasco as bolitas con* tidas em dois ou mais frascos estamos operando concretamente. Mas, é êste aspecto que dá o sentido à operação de adição.

Nessas atividades é que a adição, tal como o matemático a considera, foi buscar suas bases concretas.

....

....

CONCEITO

Dados 2 conjuntos A e B

A tem 3 elementos

B tem 6 elementos

$A \cap B = \emptyset$, i.é - A e B não têm elementos comuns.

Exemplo:

$$A = \{ \Delta \ \square \ O \}$$

$$B = \{ a, b, c, d, e, f \}$$

Efetuando a reunião A e B obtemos

$$A \cup B = \{ \Delta, a \ \square, b, c, O, d, e, f \}$$

Quantos elementos tem $A \cup B$?

$$A \cup B = \{ \Delta, a, \square, b, c, O, d, e, f \}$$

$$N = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \ldots \}$$

O número de elementos de $A \cup B$ é 9

O número 9 é chamado soma de 3 e 6 e indica-se :

$$\boxed{3 + 6 = 9}$$

Adotamos a seguinte lei como operação

Adição:

a que associa ao par (3,6) formado pelo número de elementos dos conjuntos dados, o número de elementos do conjunto reunião, isto é,

$$(3,6) \longrightarrow 9$$

$$(3,6) \in I \times I \longrightarrow 9 \in I$$

....

.....

Dado (a,b) um elemento qualquer de I xI, a êle associamos um elemento X S de I, obtido do seguinte modo:

Constroi-se um conjunto A com <u>a</u> elementos
Constroi-se um conjunto B com <u>b</u> elementos
e tais que $A \cap B = \emptyset$
calcula-se $A \cup B$

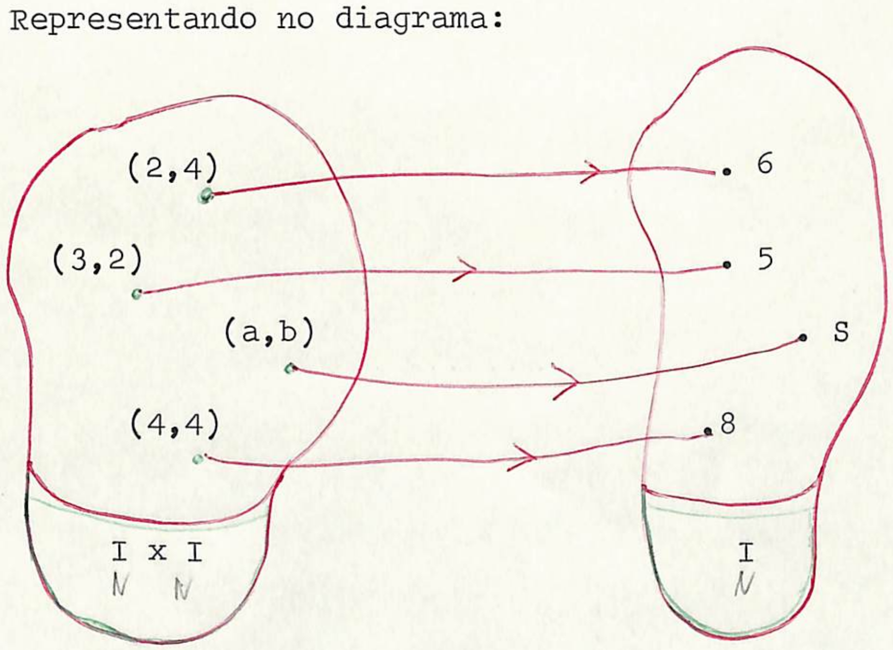
<u>S</u> é o número de elementos de $A \cup B$
<u>S</u> chama-se a soma de <u>a</u> e <u>b</u> e é indicada

$$a + b = S$$

Como:

$(2,4) \longrightarrow 6$
$(3,5) \longrightarrow 8$
$(4,0) \longrightarrow 4$

Representando no diagrama:



Conjunto I x I é infinito, e não é possível representar no diagrama todos os pares ordenados que pertencem a êle; mas, sabemos que, qualquer que seja o par $(a,b) \in$ I x I, existe sempre um único número $S \in$ I, tal que

$$a + b = S$$

....

Temos, portanto, uma aplicação de I x I em I. A esta aplicação damos o nome de operação de adição; a e b recebem o nome de parcelas

$+$ é o sinal da adição

$\underline{s}$ é o resultado da operação, denominada soma.

Chegamos a definição:

Operação de adição é a aplicação de I x I em I, que ao par ordenado (a,b) de I x I, associa $s \in I$ de tal maneira que a,b e s sejam respectivamente, os números de elementos de A,B e $A \cup B$, sendo A e B dois conjuntos disjuntos quaisquer

M U L T I P L I C A Ç Ã O

CONCEITO - Fundamentação no produto cartesiano.

Para podermos definir a operação de multiplicação, podemos partir do seguinte exemplo:

Consideremos 2 conjuntos A e B, respectivamente com 4 e 5 elementos:

$A = \{a, b, c, d\}$ $\qquad$ $B = \{x, y, z, v, m\}$

Efetuando o produto cartesiano de A x B teremos:

$$A \times B = \{(a,x)\ (a,y)\ (a,m)\ (b,x)\ (b,y)\ (b,z)\ (b,v)\ (b,m)\ (c,x)\ (c,y)\ (c,z)\ (c,v)\ (c,m)\ (d,x)\ (d,y)\ (d,z)\ (d,v)\ (d,m)\}$$

O número de elementos de A x B = 20
Ao par (4,5) de números inteiros, podemos associar o número inteiro 20.

Esquemáticamente:

$(4,5) \longrightarrow 20$

$(4,5) \in I \times I \longrightarrow 20 \quad I$

Da mesma maneira, a qualquer elemento (a,b) de I x I, associamos um elemento $p \in I$

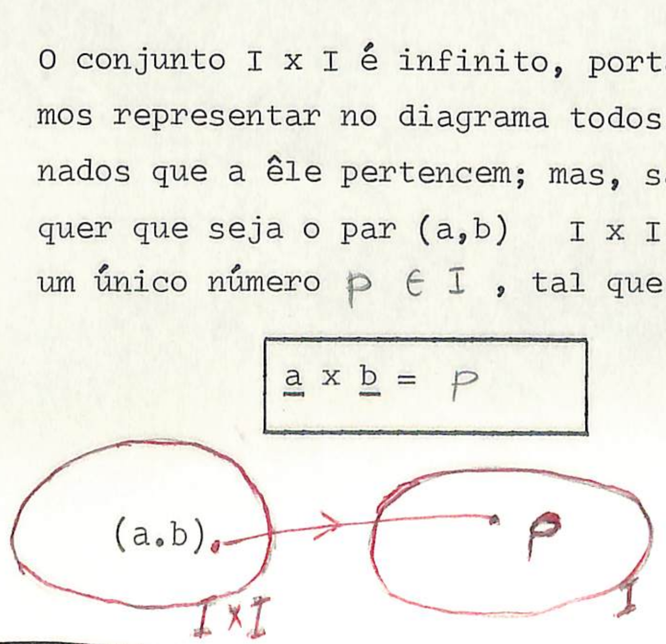
p é o produto de $\underline{a} \times \underline{b}$

Indica-se:

$\underline{a} \times \underline{b} =$ ou $\underline{a}\ \underline{b} =$

O conjunto I x I é infinito, portanto, não podemos representar no diagrama todos os pares ordenados que a êle pertencem; mas, sabemos que, qualquer que seja o par (a,b) I x I, existe sempre um único número $p \in I$, tal que

$$\boxed{\underline{a} \times \underline{b} = p}$$



.....

Temos portanto uma aplicação de $I \times I$ em I.

A esta aplicação damos o nome de operação de multiplicação.

Vamos agora, à definição da operação de multiplicação

Operação de Multiplicação é a aplicação de $I \times I$ em I, que ao par ordenado $(a,b) \in I \times I$, associa $p \in I$, de maneira que a,b, e sejam, respectivamente os números de elementos de A,B e A x B, sendo A e B conjuntos quaisquer.

<u>a</u> e <u>b</u> chamam-se fatores

p é o produto de <u>a</u> por <u>b</u>

PROPRIEDADES DA ADIÇÃO E DA MULTIPLICAÇÃO

Já definidas as operações, podemos ver agora as propriedades que elas possuem:

1 - Propriedade Comutativa

Adição

$3 + 4 = 7$

$4 + 3 = 7$

Multiplicação

$5 \times 4 = 4 \times 5$

$4 \times 5 = 5 \times 4$

Isto significa que a ordem dos fatôres não altera o produto.

De um modo geral

$a \times b = b \times a$	para qualquer	$a \in N$ e $b \in N$
$a + b = b + a$	para qualquer	$a \in N$ e $b \in N$

2 - Propriedade Associativa

Adição

A adição de três números naturais pode ser feita associando-se as duas primeiras ou as duas últimas parcelas

$(4 + 5) + 7 = 4 + (5+7)$

Multiplicação

A multiplicação de três números naturais pode ser feita associando-se os dois primeiros ou os dois últimos fatores.

$(5 \times 3) \times 8 = 5 \times (3 \times 8)$

De um modo geral

Quaisquer que sejam os números inteiros a, b e c, temos sempre

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

3 - Existência do Elemento Neutro

Adição

No conjunto N, existe 0 (zero) que, adicionado (a esquerda ou à direita) a qualquer número, reproduz êsse número.

Exemplo:

$5 + 0 = 5$ e $0 + 5 = 5$

Multiplicação

No conjunto N, existe 1(um)que multiplicado (à esquerda ou a direita) por qualquer número , reproduz êsse número.

Exemplo:

$5 \times 1 = 5$ e $1 \times 5 = 5$

> Qualquer que seja $a \in I$, existe $0 \in I$ e $1 \in I$ tais que:
>
> $a + 0 = 0 + a = a$
>
> $a \times 1 = 1 \times a = a$

N em vez de I

4 - Fechamento

Adição

A soma de dois números naturais é sempre um número natural

Exemplo: $5 + 3 = 15$

Multiplicação

O produto de dois números naturais é sempre um número natural.

Exemplo: $5 \times 3 = 15$

De um modo geral

> $(a + b) \in N$ para qualquer $a \in N$ e $b \in N$
>
> $(a \times b) \in N$ para qualquer $a \in N$ e $b \in N$

Propriedade distributiva da Multiplicação em relação ao Adição

Esta propriedade relaciona as duas operações (adição e multiplicação).

A multiplicação "se distribui" pelos têrmos de uma adição.

Exemplo:

$$4 \times (5 + 3) = (4 \times 5) + (4 \times 3)$$

Generalizando:

Quaisquer que sejam a, b e c inteiros temos:

$$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$$

Tábua da adição (base 10)

A tábua da adição é usada para obtenção da soma de dois números naturais quaisquer.

$N = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \ldots \}$

Procura-se o resultado (soma) no cruzamento das linhas horizontal e vertical que passam pelos números operados.

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Tábua da Multiplicação

	x	0	1	2	3	4	5	6	7
	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Elemento neutro	1	0	1	2	3	4	5	6	7
	2	0	2	4	6	8	10	12	14
	3	0	3	6	9	12	15	18	21
	4	0	4	8	12	16	20	24	28
	5	0	5	10	15	20	25	30	35
	6	0	6	12	18	24	30	36	42
	7	0	7	14	21	28	35	42	49

BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

Matemática para o Ginásio - Lydia Condé Lamparelli
Capítulo 4 A -O conjunto dos números inteiros - Operações

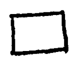
Matemática - Curso Moderno - Oswaldo Sangiorgi
Capítulo 2 - 1ª parte - Operações com números naturais-
propriedades estruturais.

Matemática - Curso Liceu - J. de Andrade Leite
Capítulo 6.

S U B T R A Ç Ã O

Símbolo $\Longleftrightarrow$

Êste é o símbolo de dupla implicação, isto é, surge quando a implicação existe nos dois sentidos.

Exemplo: 

Esta figura tem 4 lados $\Longleftrightarrow$ Esta figura é um quadrilátero.

Por ter 4 lados implica em ser quadrilátero e quadrilátero implica em ter 4 lados.

Lemos a dupla implicação com auxílio de se (s sòmente se) então ...

Se (e sòmente se)esta figura tem 4 lados, então esta figura é um quadrilátero. Logo a sentença antecedente equivale a consequente. Daí o fato do sinal $\Longleftrightarrow$ também ser chamado de sinal de equivalência.

FUNDAMENTAÇÃO

A operação subtração se fundamenta em uma operação com conjuntos chamada Complementação.

Em resumo a complementação consiste em retirar um subconjunto de um determinado conjunto. Convém também resaltar que a Complementação é a inversa da União, operação que embasa a adição.

Exemplo:

$$A = \{\text{lápis coloridos}\}$$
$$B = \{\text{lápis vermelhos}\}$$
$$C = \{\text{lápis não vermelhos}\}$$

Dado o conjunto A, retira-se o subconjunto B. Teremos ainda em A o subconjunto C, que vem a ser o conjunto complementar de B, pois C unido a B refaz o conjunto A.

PAPEL DOS TÊRMOS

A subtração é uma operação binária, pois atua com 2 têrmos de cada vez: minuendo e subtraendo.

O minuendo sofre a ação que existe em subtrair. O subtraendo age e o minuendo suporta a ação. Daí o fato de dizer-se que o minuendo tem papel passivo enquanto o subtraendo tem papel ativo.

CONCEITUAÇÃO

Vamos analisar o seguinte problema: dado (a,b) um par qualquer de números inteiros, existe sempre um número inteiro, x de tal modo que $x + b = a$?

Por exemplo, dado $(7,3) \in \overset{N}{I} \times \overset{N}{I}$, existe $\underline{x} \in \overset{N}{I}$ tal que $x + 3 = 7$? Nêste caso, é claro que $\underline{x}$ existe, e é igual a 4, pois $4+3= 7$. O número 4 chama-se diferença entre 7 e 3 e indica-se: $4 = 7 - 3$

Conclusão: A subtração faz corresponder a um par ordenado a diferença entre o 1º elemento e o 2º.

CARACTERIZAÇÃO DA OPERAÇÃO

Como vimos no ítem anterior a subtração é a inversa da adição.

A inversa consiste em desfazer o que foi feito pela adição. Logo, uma adição por exemplo $3 + 4 = 7$ dá origem a duas subtrações: $7 - 4 = 3$ e $7 - 3 = 4$, o minuendo 7 teria sido soma na adição em que as parcelas seriam o subtraendo (4 ou 3) e a diferença (3 ou 4).

Encarando a subtração dêste modo teremos:

$$18 - 5 = 13 \quad \Longleftrightarrow \quad 13 + 5 = 18$$

Assim sendo as tábuas de adição podem ser usadas na subtração, apenas manejadas em sentido inverso.

Tábua da Subtração

—	0	1	2	3	4	5	6	...
0	0	·	·	·	·	·	·	
1	1	0	·	·	·	·	·	
2	2	1	0	·	·	·	·	
3	3	2	1	0	·	·	·	
4	4	3	2	1	0	·	·	
5	5	4	3	2	1	0	·	
6	6	5	4	3	2	1	1	
⋮								

NOMENCLATURA

Os têrmos minuendo e subtraendo poderiam também chamar-se às vêzes aditivo (minuendo) e subtrativo (subtraendo). O resultado da operação é que recebe vários nomes, entretanto êle é sempre uma diferença.

A situação em que a operação aparece é que nos leva a batizar o resultado de resto, falta, excesso ou diferença.

POSSIBILIDADES E VARIAÇÕES

Sendo a subtração como inversa da adição ela é sempre possível.

Entretanto, se o par fôr (3,7), existe $x \in I$, para o qual $x = 3 - 7$, ou seja $x + 7 = 3$? É evidente que não, pois nenhum número natural inteiro somado a 7 resulte 3.

Logo, a subtração só será possível se consideremos, no produto cartesiano $I \times I$, sòmente os pares ordenados (a,b), para os quais $a \geqslant a$ b.

Ou ainda:

Considerando: $\square - \triangle$, onde $\square$ e $\triangle$ guardam o lugar de qualquer número natural, a operação só será possível se $\square \geqslant \triangle$

Suponhamos que $\square - \triangle = d$ e que a subtração seja possível.

Ao analisar os valores de d em $\square - \triangle = d$, teremos:

1º $d = 0$ quando $\square = \triangle$

2º O valor de d dependerá, evidentemente dos valores atribuidos a $\square$ e $\triangle$.

Assim se $\square = 20$ e $\triangle = 5$, teremos $\underline{d} = 15$. Conservando $\triangle = 5$ e fazendo $\square$ assumir os valores 23, 24, 25, 26 etc. ..., o valor de $\underline{d}$ vai aumentando, à medida que $\square$ vai diminuindo de valor, o valor de $\underline{d}$ (diferença) também diminui.

Conclusão: O valor da diferença ($\underline{d}$) varia diretamente com o valor do minuendo.

Conservamos agora o valor de $\square$ e aumentamos o valor de $\triangle$: 11, 12, 13, ... À medida que o valor de $\triangle$ aumenta, o valor de $\underline{d}$ (diferença) diminui.

Conclusão: O valor da diferença ($\underline{d}$) varia inversamente com o valor do subtraendo.

PROPRIEDADES

Comutativa e Associativa

A subtração não goza da propriedade comutativa, o que podemos provar facilmente:

$18 - 5 = 13$ mas $5 - 18$? (não existe resultado em Nn)

Logo, $18 - 5 \quad 5 - 18$

Também não goza da propriedade associativa e consequentemente não é dissociativa.

Exemplo:

$$45 - 20 = 15 \quad \text{permitiria:}$$

$$(45-20) - 15 \quad \text{ou} \quad 45 - (20-15)$$

$$25 - 15 \qquad 45 - 5$$

$$10 \neq 40$$

ELEMENTO NEUTRO E ANULAMENTO

Nesta subtração $25 - 0 = 25$ mostra que o subtraendo zero não altera o valor do minuendo. Entretanto, a subtração não sendo comutativa não poderemos ter $0 - 25 =$ e o elemento neutro por sua definição exigirá $20 - \square = 20$ e $\square - 20 = 20$. Não há valor em Nn para $\square$, logo não há elemento neutro na subtração.