Laboratório de Matemática

Grupo de Estudos sobre o Ensino da Matemática
Porto Alegre

Metodologia

para introdução

dos números inteiros

Z

Algumas sugestões de atividades inspiradas no livro "Mathématique 6ª" de E. Gallion

Traduções e adaptações de
Esther Pillar Grossi

Jogo verde-vermelho

1.- Procura mais quatro colegas e constitui um grupo de trabalho. Vais jogar com teus colegas de grupo. Vocês terão necessidade de pequenos cartões de duas cores (verde e vermelho). Sobre cada cartão [illegible] escreve um [illegible] 1,2,3,4,5,... Sobre cada cartão vermelho, outro vai escrever um natural: 0,1,2,3,4,5,6,.... Vocês ainda utilizarão piões ou feijões. Enfim, vocês vão preparar um quadriculado do tipo seguinte, com quinze linhas.

	6	5	4	3	2	1	Partida	1	2	3	4	5	6	Par tirado
linha														(5,3)

2.- Regra do jogo:
Aquele que joga coloca o pião na casa de partida de uma linha. Ele tira primeiro um cartão verde, logo um cartão vermelho. Suponhamos que o cartão verde tenha o número 5 e que o cartão vermelho o número 3. Desloca-se o pião 5 casas no sentido verde - sem contar a casa de partida - ele se encontrará na casa 5 (verde); após, a partir da casa 5 (verde) desloca-se o pião 3 casas no sentido vermelho. O pião se encontrará definitivamente na casa 2 (verde). Deixa-se o pião neste lugar e anota-se no fim da linha correspondente o par (5,3). Recoloca-se no jogo os cartões tirados.
O outro jogador recomeça na outra linha com um outro pião, e assim por diante, até que todos os componentes do grupo tenham jogado.
Será vencedor aquele que tiver seu pião mais à direita.
Atenção: Não confundir o par (5,3) que conduz à casa 2 (verde) e o par (3,5) que teria conduzido à casa 2 (vermelha).

3.- Fazer mais duas partidas no mínimo, deste jogo, no teu grupo, sempre registrando os resultados.

4.- Observa e analisa o que vocês fizeram, procurando anotar duas descobertas ou conclusões.

Hoje vamos estudar os resultados obtidos no jogo dos sentidos verde e vermelho.
Em primeiro lugar, vamos coletar todos os resultados obtidos pelos diversos grupos. Tomem a folha dos resultados do jogo. Vamos anotar sobre uma só folha todos os pares que conduziram os piões à casa verde-2. Esta folha será chamada 2-verde.
Os pares tais como (4,4) (6,6) ... vão se encontrar sobre uma nova folha. Como poderemos chamá-la ?
Façamos as folhas de todos os resultados de jogos obtidos nas partidas da aula anterior.

. . . . . .

Talvez todos os pares possíveis, com os cartões que vocês dispunham, não foram tirados na classe.
Completem as folhas, imaginando estes pares.
Se houvesse mais cartões, nós teríamos escrito outros pares sobre as folhas e teríamos obtido novas folhas.
Sobre qual folha escreveríamos o par (124,127) ? e o par(62,45) ?
Qual é o segundo termo do par (62,) sabendo que ele se encontra sobre a folha 13-vermelho ?
Procura para cada folha o par que conduz o pião à casa correspondente pelo "trajeto mais curto". Circunda este par. Para a folha 3-vermelha é o par (0,3) ?
Qual é este par para a folha 4-verde ? Para a folha 0?
Qual é o nome da folha cujo par circundado é (x,o) ?
Qual é o nome da folha para a qual o par circundado é (o,y) ?
Qual é o nome da folha cujo par circundado é (o,o) ?
Quem teria ganho a partida se os 5 pares tirados num grupo fossem: (13,5) (4,8) (18,9) (5,14) (0,10) sabendo que o primeiro cartão do par é sempre verde ?

Jogo das casas

Material: cartolina, tesoura, envelopes, cartões ou folhas de papel.

Recorta em cartolina pequenos quadrados e triângulos. Coloca quadrados em alguns envelopes, em outros, triângulos. Enche envelopes com 1,2,3,4,5,... quadrados. Faze o mesmo com triângulos. Põe os envelopes com quadrados de um lado e os com triângulos, do outro. Deixa alguns envelopes vazios em ambos os lados. Toma um envelope do lado dos quadrados e um envelope do lados dos triângulos. Com um quadrado e um triângulo, tu podes formar uma casa.
Por exemplo, se pegaste 3 quadrados e 4 triângulos, formas 3 casas; sobra um triângulo. Toma uma folha e escreve em cima:

$1^{\triangle}$
(3, 4)

Inscreve nesta folha o par (3,4).
Os pares (7,8) e (12,13) também podem ser inscritos nesta folha ?
Se tu tomares 11 quadrados e 5 triângulos, tu formas ..... casas.
Sobrarão ....
Qual será a folha do par (11,5) ?
Inscreve outros pares na folha do par (11,5).
Toma novas folhas que se chamarão

$1^{\square}$, $2^{\square}$, $3^{\square}$,..... $2^{\triangle}$, $3^{\triangle}$,.....

Inscreve nestas folhas ao menos cinco pares de números que lhes correspondam. Por exemplo:

$1^{\square}$
(4, 3)
(12, 11)
(2, 1)
(1, 0)
(7, 6)

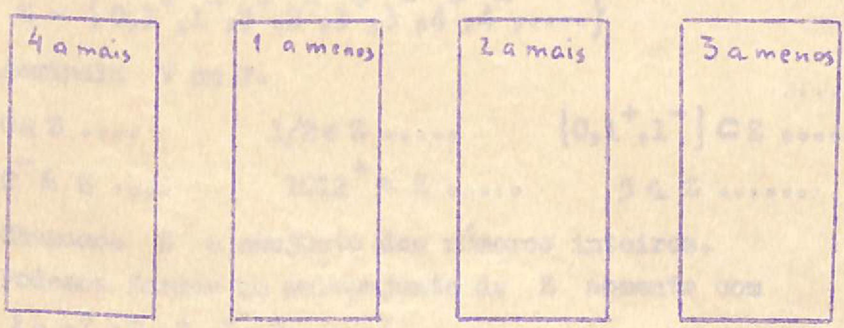
O trajeto de um ônibus

O cobrador de um ônibus de linha em nossa cidade, conta os pa
sageiros, logo após a partida do seu ponto inicial. Depois da
primeira parada, ele conta novamente os passageiros.
Ele anota "3 a mais" numa folha de seu caderninho. Pode ser
que 5 passageiros tenham subido no ônibus e 2 tenham descido.
Anota esta possibilidade pelo par $(5,2)$.
Há outras possibilidades que resultariam em "3 a mais"?
Quais ? Anota-as sobre uma folha.

Se tivesse acontecido o seguinte: 2 passageiros subiram no ôn
bus, 5 passageiros desceram, o que o cobrador anotaria em seu
caderninho ? Que outros pares levariam à mesma conclusão ?
Forma uma folha para este caso.
Forma folhinhas para "4 a mais" - "1 a menos" - "2 a mais".
Inscreve nelas vários pares.

Porque após algumas paradas, não houve modificação no número
de passageiros, mesmo que alguns tenham descido e outros te-
nham subido ?

Modelos de folhas:



Circunda para a folha "3 a mais" o par que faria a movimenta-
ção do menor nº de pessoas. Faze o mesmo para as outras folhas.

Comparação dos jogos

Toma agora as folhas dos 3 jogos (verde-vermelho, das casas e do cobrador). Observa-as atentamente.
Compara a folha 3-verde do jogo verde-vermelho, a folha $3^{\square}$ do jogo das casas e a folha "3 a mais" do cobrador. O que podes constatar comparando-as ? Elas contêm pares diferentes ou os mesmos pares ? O par circundado em 3-verde coincide com o p circundado na folha "3 a mais" ?
Uma só folha pode substituir todas as três; ela se chamará 3^{+}.
Passa também nesta folha uma linha em volta do par que estava circundado em 3-verde e "3 a mais".
Do mesmo modo, as folhas 3-vermelho, $3^{\triangle}$ e "3 de menos" serão substituidas por uma só folha chamada 3^{-}.
Faze a nova folha para 5-vermelho, $5^{\triangle}$, "5 de menos".
Realiza todas as substituições para as outras folhas que possues.
Cada nova folha representa uma família de pares ordenados.
Observa se aconteceu, ao menos uma vez, de um mesmo par ordenado ter sido escrito em 2 folhas distantas. Sim... Não...
Façamos um conjunto, cujos elementos sejam estas famílias de pares. Isto é possível, porque os elementos são bem determinados. Representemos os seus elementos pelo nome de cada uma das folhas e o simbolizemos por Z.

$$Z = \{0, 1^{+}, 1^{-}, 2^{+}, 2^{-}, 3^{+}, 3^{-}, 4^{+}, 4^{-}, \ldots\}$$

Assinala V ou F.

$0 \in Z$ .... $1/2 \in Z$ ..... $\{0, 1^{+}, 1^{-}\} \subset Z$ .....

$2^{-} \in Z$ .... $1012^{+} \in Z$ ..... $5 \in Z$ ......

Chamamos Z o conjunto dos números inteiros.
Podemos formar um subconjunto de Z somente com
$\{0, 1^{+}, 2^{+}, 3^{+}, 4^{+}, 5^{+}, \ldots\}$ que chamaremos de inteiros positivos e o representaremos por Z^{+}.

Procura nas folhas $1^+, 2^+, 3^+$, qual foi o par circundado.

O que êles têm em comum ?

Podemos formar também o subconjunto

$\{0, 1^-, 2^-, 3^-, 4^-, 5^-, 6^-, 7^-, \ldots\ldots \}$ que simbolizaremos por Z^-.

O que constatas analisando as folhas que lhe correspondem ?

Assinala as frases verdadeiras após tua análise:

..... Nos pares ordenados, o primeiro número é sempre menor que o segundo.

..... Nos pares ordenados só aparecem números acima de 5.

..... Os pares circundados possuem sempre um zero à esquerda.

Completa:

$Z^+ \cap Z^- = \ldots\ldots\ldots$

$Z^+ \cup Z^- = \ldots\ldots\ldots$

Z, conjunto dos inteiros

N é um conjunto de números, chamado conjunto dos números naturais. Tu já o conheces e muito trabalhaste com êle.

$N = \{0,1,2,3,4,5,6,7,\ldots\}$

Cada elemento de N é a propriedade numérica (a quantidade de elementos) de um conjunto discreto.
Em N nós sabemos fazer adições e multiplicações, assim como subtrações e divisões que são operações inversas das duas primeiras.
Porém, enfrentamos com relação às duas últimas, alguns problemas. Vamos ver um problema que encontramos com a subtração.
Se queremos fazer a diferença 5-3, temos facilmente uma resposta. O número que adicionado a 3 der 5 é a diferença 5-3.
Porém, se quisermos fazer 4-7, teremos que encontrar um número natural que adicionado a 7 dê 4. Isto é possível ?
Sim..... Não......
Dá outros 5 exemplos de diferenças para os quais não encontramos solução, no conjunto dos números naturais.

Isto é um defeito dos conjunto dos naturais que limita a sua utilidade. Porque, embora a pergunta 4-7 ? não tenha significado em N, há problemas práticos que conduzem precisamente a esta pergunta. Por exemplo: se a temperatura é de 3 graus, qual será ela depois de a coluna de mercúrio descer 5 graus ?
Seria útil ter um conjunto numérico que pudesse servir de resposta a esta pergunta.
Tu achas que Z resolve êste problema ?

$Z = \{0,1^+,1^-,2^+,2^-,3^+,3^-,4^+,4^-,\ldots\}$

Quando jogamos baralho (buraco, canastra, etc) em cada partida, ou somos felizes e conseguimos pontos favoráveis ou temos que descontá-los, e estamos em presença de números positivos e negativos.
Se tu conheces outros jogos onde também aparecem pontos positivos e negativos, escreve-os aqui.

Assinala outras situações práticas que nos conduzem à necessidade de considerar pontos positivos e negativos.

1.- Débitos e créditos
2.-
3.-

Os números inteiros (que comportam os positivos e negativos) serão úteis cada vez que estamos diante de situações antagônicas, que são frequentes em nossa vida.

Adição dos inteiros

1) Vamos fazer novamente o jogo verde-vermelho, porém dentro de uma nova modalidade. Cada jogador vai jogar 2 vêzes, antes do seguinte entrar em ação, isto é, vai retirar 2 pares de cartões (verde x vermelho). Com o mesmo pião, cada elemento do grupo vai percorrer os trajetos determinados pelos 2 pares de cartõ[es] tirados.

a) Por exemplo: Se alguém retira primeiro (4,6) e depois (5,2), êle deslocará seu pião 4 casas no sentido verde, 6 casas no sentido vermelho, 5 no sentido verde e 2 no sentido vermelho. Êle se encontrará no fim do trajetos na casa ...... Deixa [se]u pião nesta casa e escreve os 2 pares tirados na coluna mais d[a] direita.

Todos os componentes do grupo fazem suas jogadas.

Terá ganho quem estiver mais à direita.

Questão: Se alguém, após ter tirado 2 pares de cartões, quise[r] fazer sucessivamente os trajetos de ambos os cartões verdes [e] depois os trajetos dos cartões vermelhos, terá direito, ou is[to] alterará a posição final do pião ? Façam a experiência.

b) Por exemplo: Pares (4,6) e (5,2). Primeiro se deslocam 4+5 casas no sentido verde, depois 6+2 no sentido vermelho, dará [o] mesmo resultado que o obtido em a) ?

O pião vem a se encontrar na mesma casa ? Sim.... Não.....

V ou F ?

Se alguém tivesse tirado o par (9,7) teria feito trajeto eq[ui]valente a quem tivesse tirado os pares (4,6) e (5,2).

Tirando-se os pares (3,2) e (5,4) após os devidos trajetos, o pião se encontrará na mesma casa que tirando o par (8,7).

O par (6,10) corresponde aos pares (2,5) e (4,5) no jogo de hoje.

Portanto:
(4,6) depois (5,2) podem ser substituidos por (9,8)

Completa
(4,6) pertence à folha .....
(5,2) pertence à folha .....
(9,8) pertence à folha .....

Escolhe na folha de (4,6) um outro par. Escolhe na folha de (5,2) um outro par. Joga como em 1).
Recomeça 3 ou 4 vêzes, sempre escolhendo um par da folha de (4,6) e um par da folha de (5,2). Joga como em 1) e preenche o quadro:

substitui-se	por	que pertence à folha
(4,6) depois (5,2)	(9,8)	1^+
(,) depois (,)	(,)	...
(,) depois (,)	(,)	...
(,) depois (,)	(,)	...

Todos os primeiros pares pertencem à folha 2^- ? Sim... Não...
Todos os segundos pares pertencem à folha 3^+ ? Sim... Não...
*Resumindo os resultados do quadro, tu podes escrever:
$2^- \oplus 3^+ = 1^+$
Dizemos que a "soma" dos inteiros 2^- e 3^+ é igual a 1^+.
Completa o quadro seguinte:

1º par	2º par	substitui-se pelo par	folha do 1º par	folha do 2º par	folha do par que os substitui
(3,5)	(2,6)	(,)			
(0,2)	(0,)	(0,6)			
(2,4)	(,)	(4,10)			
(7,4)	(10,8)	(,)			
(6,3)	(,0)	(8,3)			
(,)	(7,5)	(11,6)			
(3,0)	(4,)	(,2)			

Resume estes resultados como acima (*).

PROPRIEDADES DA ADIÇÃO EM Z

Elemento neutro

No jogo verde-vermelho, se tu tirares (2,3) e (5,1), teu pião se encontrará após os trajetos, na casa.........

Isto significa que $1^- \oplus 4^+ =$

Se tivesses tirado (3,3) e (4,1) teu pião ficaria ao final na casa....

Tirar (3,3) e (4,1) no jogo verde-vermelho significa:

$\ldots\ldots \oplus \ldots\ldots = \ldots\ldots$

Se tirares (6,2) e (4,4) onde se encontrará o pião, ao final ? Casa ....

Tirar (6,2) e (4,4) no jogo verde-vermelho, significa:

$\ldots\ldots\ldots \oplus \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots$

Há outros pares que atuarão no jogo como (3,3) e (4,4).
Dá mais 7 destes pares.

Estes pares encontram-se todos na folha ....
Sendo x,y,z números inteiros, distintos 2 a 2, estes pares, genericamente podem ser representados por ....

...... (x,y) .... (y,z) .... (x,x)

Retirar (x,x) e (y,z) corresponde levar o pião à casa(,)
Os pares (x,x) estão todos na folha 0.

Procura, agora em Z os y tais que:

$y \oplus 0 = y$. $0 \oplus y = y$

O que tu canstatas ?

Dizemos que 0 é elemento neutro para a adição dos inteiros.

Elemento simétrico

Tu já encontraste adições como $3^+ \oplus 3^- = 0$

Completa:

$2^- \oplus \ldots = 0$ $\qquad 63^+ \oplus \ldots\ldots = 0$ $\qquad 0 \oplus \ldots\ldots = 0$

$5^+ \oplus \ldots = 0$ $\qquad 1^- \oplus \ldots\ldots = 0$ $\qquad \ldots\ldots \oplus 15^- = 0$

Dizemos que o inteiro 3^+ tem por simétrico 3^- e que o inteiro 3^- tem por simétrico o inteiro 3^+.

Completa:

2^- tem por simétrico ..... $\qquad$ 0 tem por simétrico ......

63^+ tem por simétrico ..... $\qquad$ 1^- tem por simétrico ......

5^+ tem por simétrico ..... $\qquad$ 15^- tem por simétrico......

Quando adicionamos dois inteiros simétricos um do outro o resultado é ....

..... positivo $\qquad$ .....0 $\qquad$ ...... igual a um deles

---

Tábuas

Observa o desenho abaixo. Acima e à esquerda do trçado está um pedaço da tábua da adição em Z^-; em baixo e à direita, um pedaço da tábua da adição em Z^+.

Anotamos já alguns resultados:

$3^- + 2^- = 5^-$ $\qquad 2^- + 1^- = 3^-$ $\qquad 2^+ + 1^+ = 3^+$

Preenche as demais casas vazias.

		5^-				2^-					
			3^-			1^-					
						0					
5^-	4^-	3^-	2^-	1^-	0	$\oplus$	0	1^+	2^+	3^+	4^+
						0					
						1^+			3^+		
						2^+					

Atividades com os inteiros

Eis um pedaço da tábua da adição em Z. Preenche-a.

												6^-											
												5^-											
												4^-											
												3^-											
												2^-											
												1^-											
												0											
11^-	10^-	9^-	8^-	7^-	6^-	5^-	4^-	3^-	2^-	1^-	0	$\oplus$	0	1^+	2^+	3^+	4^+	5^+	6^+	7^+	8^+	9^+	10^+
												0											
												1^+											
												2^+											
												3^+											
												4^+											
												5^+											

Utilizando esta tábua, encontra os inteiros x, y, z e t, tais que:

$x \oplus 5^- = 3^+$ $\quad 4^+ \oplus y = 9^+$ $\quad z \oplus 2^- = 7^-$ $\quad 8^+ \oplus t = 3^-$

Completa as igualdades seguintes; para isto, se ainda tiver necessidade, tu poderás representar cada inteiro por um pa sua folha e utilizar, por exemplo, o jogo verde-vermelho.

$8^+ \oplus 8^- =$ ...... $\quad 16^+ \oplus 4^+ =$ ...... $\quad 2^- \oplus 33^- =$ ....

$17^- \oplus 17^+ =$ ..... $\quad 1^+ \oplus 7^+ =$ .... $\quad 11^- \oplus 8^- =$ ....

$7^- \oplus 14^- =$ ...... $\quad 0 \oplus 0 =$ .... $\quad 8^+ \oplus 23^+ =$ ....

:

Adição de diversos inteiros

Se tu tens $3^+ \oplus 7^- = 4^-$ e 4^- tu adicionas a 6^+ tu obterás

$4^- \oplus 6^+ = \ldots\ldots\ldots$

Tu podes escrever: $(3^+ \oplus 7^-) \oplus 6^+ = 2^+$

Completa: $7^- \oplus 6^+ = \ldots\ldots\ldots$

A 3^+ adicionas 1^-, tu obtens $3^+ \oplus 1^- = 2^+$

Tu podes então escrever:

$(3^+ \oplus 7^-) \oplus 4^- = 3^+ \oplus (7^- \oplus 6^+)$

O lugar dos parênteses não intervém aqui; pode-se portanto [illegible] primi-los.

$3^+ \oplus 7^- \oplus 6^+ = 2^+$

Efetua $18^+ \oplus 7^- + 14^+$

(Tu podes efetuar primeiro $18^+ \oplus 7^-$ e adicionar 14^+ ao res[illegible] do, ou efetuar primeiro $7^- \oplus 14^+$ e adiconar 18^+ ao result[illegible]

Efetua:

$27^+ \oplus 14^+ \oplus 75^-$

$32^+ \oplus 15^+ \oplus 15^-$

$67^- \oplus 17^- \oplus 42^+$

$38^- \oplus 38^+ \oplus 17^-$

SUBTRAÇÃO EM Z

Se o inteiro d é tal que $d \oplus 7^- = 1^-$

verifica-se também que $d + 7^- + 7^+ = 1^- + 7^+$

$7^- + 7^+ = 0$ o que nos permite escrever $d = 1^- + 7^+$

$d = 6^+$

Verifica-se igualmente que verdadeiramente a soma dos inteir
6^+ e 7^- é igual a 1^-.
A partir destes fatos, definiremos algo novo no conjunto dos
teiros - a diferença.
Escrevemos $d = 1^- \ominus 7^-$ e chamamos d a diferença dos inteiros
1^- e 7^-.
Qual a diferença entre os inteiros 7^- e 1^- ?
De acôrdo com o que veio antes, a diferença será o inteiro q
adicionado a 1^- dê 7^-, isto é, $x \oplus 1^- = 7^-$.
Para encontrar x como se deve proceder ? Olha novamente o
se fez para encontrar d. Tenta encontrar x.

. . . .

Se não conseguiste fazê-lo só, lê as orientações que seguem:
Tu deves fazer uso do simétrico de um dos inteiros que apare
em: $x \oplus 1^- = 7^-$.
É o simétrico de 1^- ou de 7^- ?
Adiciona-o a ambos os lados da igualdade e encontrarás x.

Completa: $7^- \ominus 1^- = \ldots\ldots\ldots$
Qual é a diferença entre os inteiros 5^+ e 3^+, isto é, qu
o inteiro z tal que $z \oplus 3^+ = 5^+$?

Completa: $5^+ \ominus 3^+ = \ldots\ldots\ldots$

Efetua: $67^+ \ominus 17^+$; $52^- \ominus 15^+$; $39^+ \ominus 127^-$; $18^+ \ominus 18^-$

Usando máquinas, encontra as saidas:

$5^+ \xrightarrow{+2^+} \ldots\ldots$ $6^- \xrightarrow{+5^-} \ldots\ldots$

Faze a táboa de Pitágoras da subtração dos inteiros: como pa
a adição nas folhas precedentes tu te limitarás a um "pedaço
desta tábua.

Todas as casas podem ser preenchidas ? Compara com a subtraç
nos naturais.

Completa:

$13^+ \ominus 4^+ = \ldots\ldots\ldots$ $\qquad$ $4^+ \ominus 13^+ = \ldots\ldots\ldots$

$13 - 4 = \ldots\ldots\ldots$ $\qquad$ $4 - 13 = \ldots\ldots\ldots$

$7^+ \oplus 3^+ = \ldots\ldots\ldots$ $\qquad$ $7^+ \ominus 3^+ = \ldots\ldots\ldots$

$7 + 3 = \ldots\ldots\ldots$ $\qquad$ $7 - 3 = \ldots\ldots\ldots$

Encontra as soluções das equações (x é um inteiro, y é um n
tural)

$11^+ \oplus x = 5^+$ $\qquad$ $43^+ \oplus x = 17^+$

$11 + y = 5$ $\qquad$ $43 + y = 17$

Tu viste há pouco

$1^- \ominus 7^- = 1^- \oplus 7^+$

$7^- \ominus 1^- = 7^- \oplus 1^+$

$5^+ \ominus 3^+ = 5^+ \oplus 3^-$

$\boxed{\text{Subtrair um inteiro é adicionar seu simétrico.}}$