

imagem no conjunto de chegada.

Partida	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Chegada +5
------------	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

O conjunto de definição desta nova função se identifica ao conjunto de partidas: diz-se que esta função é uma aplicação.

É bem evidente que esta linguagem especializada (conjunto de partida, conjunto de chegada, imagem, função, aplicação) não tem seu lugar na escola primária, mas se nós queremos que estas palavras tenham uma significação quando forem introduzidas no secundário é necessário que atividades tenham sido feitas previamente a fim de que estas palavras designem efetivamente, conceitos adquiridos.

2ª - Um dos ramos importantes da matemática se relaciona com a composição de funções (aqui no nível que nos interessa será apresentada como a de cadeias de máquinas).

Retomemos os exemplos precedentes e coloquemos em cadeia as duas máquinas $\xrightarrow{-3}$, $\xrightarrow{+5}$

Partida	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

-3
+5
Chegada
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

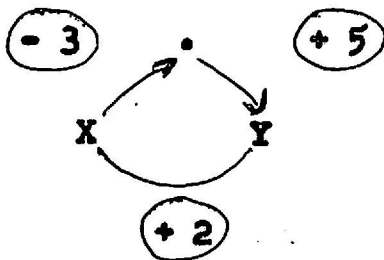
Todo elemento de N que tem uma imagem em N a um tempo por $\xrightarrow{-3}$ e $\xrightarrow{+5}$, tem uma imagem em N pela cadeia $\xrightarrow{-3}$, $\xrightarrow{+5}$. No esquema precedente a relação do conjunto de partida para o conjunto de chegada, é indicada por flechas pontilhadas.

Se tomamos como conjunto de partida o conjunto de definição da função $\xrightarrow{-3}$, a relação representada pelas flechas em pontilhado.

Para todo elemento de N $-(0,1,2)$ existe exatamente 1 imagem em N para a cadeia $\xrightarrow{-3}$, $\xrightarrow{+5}$.

Esta cadeia é equivalente à máquina $\xrightarrow{+2}$.

Isto significa que qualquer que seja o elemento X de $N = (0, 1, 2)$, nos temos o esquema seguinte:



É este tipo de esquema que se vai encontrar no nível do C.E.2. Ele não está no nível das possibilidades de uma criança de 8 anos explícitas como vimos de fazer o conjunto de definição sobre o qual os equivalentes têm um sentido; isto poderá entretanto, se traduzir em uma linguagem muito mais pragmática por alguma coisa como "se as cadeias não se quebram, se ponho o mesmo número na entrada, encontro o mesmo número na saída".

Sobre os conjuntos numéricos não se poderá ir mais longe na explicitação.

Entretanto as crianças descobrem rápido "truques" para encontros como alimentar uma cadeia dada para que ela não se bloqueie. Ao contrário se trabalhamos com conjuntos finitos, podemos enumerando todos os casos possíveis, demonstrar que duas cadeias são equivalentes; se tomamos o exemplo das máquinas F, C, C, F, R , agindo sobre quadrados vermelhos ou azuis, redondos vermelhos ou azuis, podemos (as crianças) demonstrar que qualquer que seja o objeto colocado na entrada $CF, F \cong C$ (Reencontrar-se-a este tipo de pesquisa nas fichas do capítulo "Esquemas" por exemplo S1S2).

Além disso, procurando convenientemente os conjuntos de objetos sobre os quais operam nossos conjuntos de máquinas, teremos, qualquer que seja o objeto colocado à entrada, cadeias que funcionam (que não se bloqueiam).

Vê-se aqui prolongamentos possíveis para o trabalho nos conjuntos numéricos: "procurar um conjunto de partida tal que, qualquer que seja a cadeia escolhida de máquinas de adicionar ou de subtrair e qualquer que seja o número colocado a entrada a cadeia funciona." (é o conjunto Z dos inteiros "relativos"), ou bem procurar um conjunto de partida tal que, qualquer que
cont.....

seja a cadeia escolhida de máquinas a multiplicar ou a dividir e qualquer que seja o número colocado na entrada a cadeia funciona (é o conjunto F das frações). Esta pesquisa poderá ser efetuada no secundário sobre bases sólidas.

Retornemos às cadeias de máquinas "numéricas" para as quais a entrada é "bem escolhida".

Se utilizamos máquinas de adicionar ou subtrair toda cadeia de duas máquinas pode ser substituída por uma cadeia de uma só máquina. Exemplos:

Não é o mesmo para as máquinas de multiplicar ou de dividir. Exemplos :

Nos dois últimos exemplos, não existe máquinas de multiplicar ou dividir por um número inteiro que possa substituir as cadeias propostas.

No nível do C.M. é a partir desta descoberta que introduziremos as "máquinas fracionárias".

Por definição a máquina $\times \frac{13}{2}$ é aquela que é equivalente a cadeia $\xrightarrow{13} \xrightarrow{2}$

Isto introduzirá um novo conjunto de máquinas, as máquinas do tipo $\times \frac{a}{b}$ onde a e b são números inteiros naturais. Toda a cadeia de duas destas máquinas pode ser substituída por uma só destas máquinas. Dir-se-á em linguagem matemática que a compo

.....

sição das máquinas é uma operação interna no conjunto das "máquinas fracionárias". O Cálculo desta máquina equivalente será descoberto então, pelas crianças sem necessitar de conhecimentos novos. É suficiente para isto ter descoberto as propriedades que permitem reduzir as cadeias de máquinas :

1. propriedade : em uma cadeia pode-se permutar duas máquinas sem que isso modifique a saída.

2. propriedade : em uma cadeia pode-se substituir toda / sequência de duas máquinas pela máquina equivalente em que isso modifique a saída. Esta linguagem pragmática que será utilizada pelas crianças corresponde a uma linguagem matemática (que eles utilizarão no secundário):

1. A colocação em cadeia de máquinas é comutativa.

2. A colocação em cadeia de máquinas é associativa.

Exemplo : encontrar a máquina fracionária equivalente

a $\times \frac{3}{2} \rightarrow \times \frac{7}{5} \rightarrow$

Compreende-se qual é a importância de todo o trabalho / preparatório que vai se estalar sobre tres anos (C.E.2.C.M.1C.M.2) trabalho que vai permitir compreender a significação das máquinas de adicionar ou subtrair, das máquinas de multiplicar, logo a partir daí, de descobrir as propriedades sobre as quais se apoiará o cálculo. E, além disso, evidente que, graças ao trabalho sobre as cadeias de máquinas numéricas as crianças vão ser levadas a desenvolver uma aptidão (capacidade) para um cálculo mental. Ora, é absolutamente indispensável que as crianças saibam bem calcular e como calcular. Ouve-se, por vezes dizer que " se as crianças fazem matemáticas desde o primário, não saberás mais calcular". Reconheço não compreender muito bem aquilo que os que tem uma tal / crença entendem por matemática. Se a matemática fosse fazer bata

.....

.....

tas, "fazer conjuntos" creio bem que eu estaria pronta a aprová-los mas a matemática é toda outra coisa. Ela é antes de tudo o / estudo de estruturas e se calcula tanto melhor quanto se tome / consciência da estrutura dos conjuntos nos quais se calcula. No / caso particular dos conjuntos numéricos, as propriedades das relações entre os números, descoberta a partir de numerosas experi-ências devem conduzir a um maior domínio do cálculo sobre os nú-meros. Além disso é importante que as crianças descubram desde o início de suas atividades calculadoras que se pode calcular so- bre outras coisas além de números. Constatei ou, tenho constata- do em meu trabalho com adultos não tendo tido formação superior / em matemática que o desconhecimento desse fato é um grave "handi- cap". É por isso que tenho introduzido situações (máquinas de mu- dar a forma ou a cor dos objetos, por exemplo - ver também o ca- pítulo "Esquemas" onde se encontram muitos exercícios desse tipo) situações que permitirão no C.M. praticar o cálculo em conjuntos não numéricos e de descobrir assim regras gerais de dedução uti- lizadas no cálculo.

3. propriedades: encontramos desde o início a noção de "má- quina inversa" (isto é, que faz retornar ao ponto de partida, / que desfaz o que a primeira fez).

Assim a máquina inversa da máquina - 3 é a máquina / + 3 a máquina inversa da máquina + 5 é a máquina - 5.

Uma cadeia de duas máquinas inversas " não faz nada", " é equivalente a uma máquina que não faz nada", " as máquinas se / neutralizam " dizem as crianças em uma linguagem pragmática.

Estas duas noções: máquina neutra, máquina inversa de uma outra máquina são noções extremamente importantes. Ora a experi- ência me preveniu que elas estão entre aquelas que as crianças / dominam melhor. Isto tem do ponto de vista prático consequências importantes. É assim que as crianças do C.E. 2 transformaram es- pontaneamente problemas que lhes foram propostos para utilizar a noção de máquinas inversas e eis aqui um exemplo que me servir / de ponto de partida para fichas de trabalho (ficha S. 26 e seguin- tes; encontrar o tal que $v : 13 = 19$

Aqui está um esquema proposto pelas crianças

a igualdade $19 \times 13 = v$ é obtida pela simples leitura do esquema.

4a propriedade: vimos o esquema definido uma máquina co- mo sendo a seguinte

.....

que tres tipos de problemas podem se colocar :

dá-se	é preciso encontrar
entrada e máquina	saída
máquina e saída	entrada
entrada e saída	máquina

O terceiro problema tem sempre uma solução para as máquinas de adicionar ou de subtrair; para as máquinas de multiplicar ou dividir é preciso que um dos números seja múltiplo do outro. A existência de uma solução para as duas primeiras está ligada a escolha dos números colocados na entrada (ou na saída).

$$4 \xrightarrow{-2} \boxed{} : \boxed{} \xrightarrow{+8} 6$$

$$4 \xrightarrow{:5} \boxed{} : \boxed{} \xrightarrow{\times 3} 8$$

não tem
solução

De fato os problemas do ensino elementar se a resolver sistemas de equações do tipo precedente.

Em particular todos os problemas de "regra de tres" são relacionados com tais esquemas. (cf fichas de trabalho Journal de Mathematique II e comentários).

II. O ponto de vista psicológico

Ela é, ao menos, tão importante como o precedente. Se quisermos que as crianças dominem as noções que desejamos lhes fazer adquirir, é necessário que os processos que permitam adquirir essas noções respeitem o melhor possível os modos de constituição de conceitos novos pelas crianças de um nível dado. É evidente que uma pesquisa é necessária para explicar ou melhor explicitar os melhor os processos que se poderá qualificar de espontâneos. Ora após as experiências que fiz no ensino elementar e pré-escolar, a colocação em relação é um dos modos preferenciais utilizados pelas crianças. Além disso em um nível muito elementar, os objetos são confrontados quanto as suas diferenças. Vai ser portanto particularmente interessante de seguir demarques; partir das diferenças entre objetos, refinar a noção para chegar a de máquina, logo deixar de lado os objetos para trabalhar sobre as máquinas. Encontrar-se-á estas demarques sucessivas no decorrer do ensino elementar e, particularmente no nível C.E. 2 que constitui certamente uma "dobradilha" cede a passagem ao trabalho sobre as máquinas parece particularmente favorável. Entretanto, não é preciso tornar as coisas bruscas, é preciso que a passagem ao trabalho sobre cadeias de máquinas se faça por si. É além disso extremamente importante utilizar um modo de investigação / que parece essencial: a colocação em esquema. Chegou um ano em que ao nível / C.M. 1 três das classes experimentais das quais me ocupo tiveram dificuldades relacionadas com o trabalho sobre cadeias; "Entretanto, eles sabiam muito bem calcular no ano anterior no C.E. 2" diziam os professores deste nível. Feita uma enquete percebeu-se que com efeito havia se feito muito cálculo mas mas que se havia pensado que não era necessário "passar tempo sobre os esquemas". Ora apareceu que desde que os alunos do C.M. tem a sua disposição esquemas e que havia sido aprendido mas não compreendido realmente se põe no lugar muito rapidamente.

Não se dirá jamais demasiadamente que é necessário que as bases sejam solidamente construídas senão todo o trabalho em um nível superior não poderia ser feito senão por aprendizagem de técnicas não permitindo em geral / ir mais alto salvo novamente por aprendizagem de técnicas mas se compreendo / bem que cedo ou tarde o sistema se bloqueia; se se quer sair-se bem no double-quantar isto não poderá ser senão ao preço de uma retomada na base de quanto mais difícil que as crianças terão acreditado, de bons fatos, que o único modo de aprender é retê-lo por si.

É por isso que nós sugerimos algumas modificações das fichas das primeiras edições: algumas entre elas que se referiam a cálculos foram substituídas por esquemas.

Denota assinalaremos que é impossível considerar o trabalho sobre uma noção feita a um nível dado sem se referir ao que foi feito antes e será feito após sobre esta noção. É por isso que é indispensável consultar as fichas de trabalho e os comentários para o C.E. 1 (A conquista do número) e para o C.M. (Journal de matemática II, fascículos 1 e 2).

COMENTÁRIO DAS FICHAS

Ficha M.1

Esta ficha de trabalho tem como idéia subjacente a de produto cartesiano (cf. C.P. e C.E.1).

Trata-se de fabricar um material cujos objetos são caracterizados por duas propriedades: a forma que pode tomar quatro valores, a cor que pode tomar dois valores; ter-se-á, portanto, oito objetos que são aqueles que se poderia colocar em cada caso do quadro seguinte:

azul				
verm.				

Ficha M.2

Aqui a forma pode tomar três valores, assim como a cor. O processo sugerido para construir os nove objetos é uma árvore. Poder-se-á, além disso, pedir-se também para fazer um quadro.

Ficha M.3

No quadro do alto desta página, as formas (as letras) não foram indicadas; é preciso reconstituí-las com o auxílio das sugestões feitas para preencher o quadro.

2º exercício: três formas, três cores; encontrar os nove objetos.

Ficha M.4

Retoma-se aqui um exercício feito no C.P. (cf. Dos conjuntos à descoberta do número): o jogo das diferenças imaginado por P. Dienes. Mas aqui as diferenças são representadas por flechas.

Os professores que o desejarem poderão explorar este exercício. Assinala-se por exemplo, que a cadeia a 1 diferença com a 2 diferenças com a 3 diferenças com não pode ser sempre substituída pela relação