SELEÇÃO, RESUMO E TRADUÇÃO DE TRECHOS DO LIVRO "BUILDING MATHEMATICAL CONCEPTS IN THE ELEMENTARY SCHOOL", DE PETER LINCOLN SPENCER E MARGUERITE BRYDEGAARD

Trabalho de:
Izabella Kertész, T 531

Instituto de Educação, novembro de 1961

ENSINAR

Kahlil Gibran

(Citado no livro em estudo à página 26)

Ninguém pode revelar-te mais do que aquilo que jaz semi-adormecido no crepúsculo do teu conhecimento.

~~O mestre que caminha na sombra do templo, entre seus discípulos, não dá de seu saber, mas de sua fé e de seu amor.~~

Se é realmente sábio, êle não te convida a entrar na casa do seu saber, mas te conduz ao tesouro de tua ~~a~~ própria mente.

O astrônomo pode falar-te de sua compreensão do espaço, mas não pode dar-te o seu saber.

O músico pode cantar para ti o ritmo que existe em todo o espaço, mas não pode dar-te o ouvido que apreende o ritmo nem a voz que o reproduz.

E o que é versado na ciência dos números pode falar das regiões do pêso e da medida, mas não pode conduzir-te até lá.

Porque a visão de um homem não empresta asas a um outro homem.

P R E F Á C I O

(Resumo)

Os autores visam auxiliar professôres e futuros professôres a compreender melhor as idéias, as técnicas e os materiais usados em suas experiências matemáticas. Em resumo, tentam revelar algumas das idéias que tornam funcional a atividade matemática. Acreditam que o campo da matemática da escola elementar foi definido com pouca amplitude. Os livros para professôres e alunos atêm-se às técnicas de cálculo, o que levou à caraterização da matemática como "treino" ou"habilidade". Pouca importância é dada à significação das idéias e técnicas matemáticas no desenvolvimento pessoal.

No título "Construindo conceitos matemáticos na Escola Elementar" é usado o têrmo "matemáticos" em vez de"aritméticos" porque a aritmética implica no mero cálculo. O livro trata de técnicas de cálculo necessárias ao trabalho com números, mas dá ênfase à compreensão da experiência matemática. Ênfase é dada à identificação e compreensão de idéias que são fundamentais à conduta matemática, que inclui tôdas as respostas em face de quantidades e relações entre quantidades.

Os autores consideram que os nomes das matérias designam áreas especiais do conhecimento e modos especiais de expressão, mas que todos os aspectos do comportamento humano são encontrados em tôda experimentação. Isto considerando:

1) Conduta matemática é conduta científica (experimentação, levantamento de hipóteses, validação);
2) Conduta matemática é conduta social (a sociedade tem interêsse em quantidades);
3) Conduta matemática é atividade de linguagem (nossa linguagem tem estrutura matemática);
4) Conduta matemática inclui arte e artesanato (o artista torna compreensíveis relacões de espaço, tempo e quantidade e constrói instrumentos de medir que também são usados pelo artesão).

I N T R O D U Ç Ã O (Página 1)

"Perfume de sândalo" (Tradução)

A necessidade de contínuo exame dos processos de ensino tem sido sentida há milhares de anos. Já no último século A.C. foi expressada por um autor, que escreveu:

"Eu vi um asno que levava uma carga de sândalo pela estrada. E quase sucumbiu ao pêso, mas nunca adivinhou o perfume do sândalo.

Assim, os pedantes suportam uma considerável massa de livros que não compreendem - como o asno."

Modernos conceitos de aprendizagem indicam que um sôpro, pelo menos, do "perfume de sândalo" é essencial para melhorar a conduta do educando através da aprendizagem. Demasiado freqüentemente esperou-se que o estudante avançasse oprimido por uma "considerável massa" de "sândalo" educacional, que para êle tem pouca significação. Os galhos foram colhidos por outros e reunidos em feixes que êle deve apanhar e carregar consigo.

Se o ensino de uma "considerável massa" de fatos numéricos e processos de cálculo tem sido realmente eficiente será debatido por aquêles que investigam a competência funcional dos alunos. Ao escrever êste livro, "Construindo conceitos matemáticos na Escola Elementar", os autores procuraram destacar e dar ênfase aos significados e funções, isto é, ao "perfume de sândalo" da nossa herança matemática, ao invés de meramente sobrecarregar os leitores com uma "considerável massa" de fatos e processos que têm pouca significação evidente. A experimentação matemática pode ser interêssante e frutífera no desenvolvimento das habilidades de alguém para entender instituições sociais e ao prepará-lo para enfrentar mais eficientemente os problemas que ocorrem em sua vida. Para que a experimentação matemática na escola elementar possa servir a êstes fins, deveriam prevalecer as seguintes condições:

1) O aprendiz deve estar ciente dos aspectos quantitativos do problema que enfrenta.
2) O aprendiz necessita ser levado a descobrir e a compreender os conceitos que fundamentam os materiais e técnicas usados na atividade matemática.
3) O aprendiz necessita descobrir e dominar o uso de materiais e técnicas que a sociedade considerou eficientes para facilitar a conduta matemática.
4) O professor necessita valorizar a conduta matemática.
5) O professor necessita um domínio eficiente dos materiais e técnicas através dos quais os alunos podem ser levados a descobrir, formular e dominar as idéias e instrumentos necessários para servir às necessidades próprias e da sociedade.

Exposto de modo tão breve, o propósito de desenvolver um programa funcional para a aprendizagem matemática não parece tão difícil. E, realmente, não é muito difícil se alguém conservar a atenção nos aspectos agradáveis do "perfume de sândalo" do significado e função, e não permitir ser oprimido por uma "considerável massa" de coisas que "não compreende".

Experiência matemática (Resumo)

Experiência matemática consiste em tôda ação em face de quantidades ou relações quantitativas.

O fato de que a sociedade é provida de materiais, instrumentos e práticas relacionados com a experiência matemática constitui um problema para as crianças que nela vivem. Muitas vêzes, a tarefa destas é conformar-se : elas aprendem a usar instrumentos e a seguir práticas que muitas vêzes não entendem.

A emoção de descobrir como e porque as pessoas desenvolveram os sistemas de conceitos, os materiais e as práticas que a sociedade usa é parte importante das experiências matemáticas. Sentir, experimentar, inventar, descobrir, testar e verificar são tão importantes nas experiências do indivíduo em desenvolvimento quanto eram no desenvolvimento de nosso patrimônio social comum.

A sala de aula - um laboratório de aprendizagem (Resumo)

Uma sala de aula é um laboratório de aprendizagem quando incentiva atividade mental e física que resulte em experimentação; esta, por sua vez, deveria conduzir à formulação de técnicas e a generalizações, baseadas em informação fidedigna e suficiente. Os materiais do laboratório consistem de coisas que o professor e os alunos colecionam ou constroem e que são mais valiosos que os materiais comprados.

A alma dêste laboratório é o professor, que orienta e estimula as experiências dos alunos.

Propósito das lições ilustrativas (Nota explicativa)

As lições ilustrativas visam estimular o professor a formular e desenvolver suas próprias lições, semelhantes em conteúdo, ou a adaptar aquelas à sua classe.

Obs.! Há lições de nível pré-primário a de 6º ano, sôbre vários assuntos.

DIRETRIZES PARA UM EFICIENTE PROGRAMA DE INSTRUÇÃO (Pág. 28)
(Resumo)

1. Educar é um processo de edução. A aprendizagem não é implantada por um que sabe em outro que não sabe. O que é aprendido é criado pelo aprendiz através de suas experiências e com suas próprias habilidades. Portanto, experiência não é a "melhor professôra" - é a "única professôra".

2. O comportamento matemático é aprendido. A trilogia: 1) consciência de quantidade, 2) desenvolvimento de idéias relacionadas à quantidade e 3) desenvolvimento de respostas eficientes com relação à quantidade, constitui a base para o currículo em matemática.

3. O comportamento matemático tem implicações pessoais e sociais. A aprendizagem é uma conquista pessoal. O moderno conceito de "aprender fazendo" reconhece que o progresso na aprendizagem é conquistado quando o aprendiz tem um comportamento mais de acôrdo com as situações às quais responde. Uma vez que os padrões sociais de comportamento constituem parte importante da maioria das situações, o aprendiz deve ser competente nos mesmos.

4. A comunicação envolve idéias e símbolos. Palavras não são idéias, apenas as representam. São símbolos convencionais. Por outro lado, idéias e conceitos são conquistas pessoais. Quando os símbolos convencionais e os conceitos ou práticas pessoais são associados agradável e funcionalmente, a comunicação pelo seu uso é prática. Mas, quando os símbolos não são eficientemente associados com as idéias e práticas que supostamente representam, êles tornam-se falsos e impotentes como meios de comunicação. É o que acontece quando as crianças são solicitadas a memorizar têrmos , fatos e técnicas que não compreendem. Por isso, a ênfase da instrução deve ser guiada pela compreensão do aluno.

5. Motivação através de interêsse pessoal contribui para efetiva aprendizagem. Desde que a aprendizagem é pessoal e individual, a instrução deve fazer com que cada aluno participe voluntária e entusiàsticamente das atividades através das quais se espera que êle aprenda. Conseqüentemente, motivação ou interêsse por parte do aluno é assunto de preocupação básica.

6. A experiência matemática é multisensorial. Fenômenos quantitativos ocorrem com todos os tipos de estímulos sensoriais, tanto auditivos, visuais, tácteis, térmicos, olfativos, gustativos, cinestéticos, ou outros. Conseqüentemente, as técnicas de instrução devem utilizar auxílios sensoriais múltiplos, sem concentrar-se em um ou poucos tipos.

7. Abstrair e generalizar são aspectos importantes do desenvolvimento em matemática. Significados são desenvolvidos mais prontamente em experiências com materiais concretos. No entanto, o valor de

qualquer auxílio para aprendizagem é medido pelo modo e pelo gráu em que estimula o aprendiz a abstrair suas idéias e técnicas, isto é, libertá-las das situações particulares em que são concebidas. Modalidades gerais de ação devem ser aprendidas pelo estudo de algumas situações e serão usadas como diretrizes em outras.

8. Projeção e aplicação são essenciais à conduta matemática eficiente. O conhecimento matemático consiste de sistemas de conceitos. Quando o aprendiz descobriu e dominou algumas idéias, fatos e técnicas, êle pode, e certamente o fará, projetar e aplicar o que aprendeu em outras situações. Esta prática poderá facilitar a aprendizagem, mas pode ser responsável por êrros típicos.

9. Invenção e descoberta contribuem para a ação eficiente. Levar o aluno a sentir situações problemáticas que êle não pode solucionar prontamente mas que intrigam seu interêsse e intelecto é um meio excelente para desenvolver sua iniciativa e compreensão. Nestas condições, e sob a hábil orientação do professor, os alunos podem ser levados a re-inventar e re-descobrir pessoalmente as idéias, os materiais e as técnicas que constituem seu patrimônio social matemático.

10. Evocação e aplicação são características essenciais à efetiva aprendizagem matemática. A aprendizagem ocorre quando há conduta adaptativa. Uma vez realizada a aprendizagem, o aprendido é evocado e aplicado em situações subseqüentes. Êste é um aspecto importante do desenvolvimento educacional.

11. Compreensão pessoal, isto é, significação, é fundamental ao domínio da atividade matemática. Pouca competência funcional é adquirida através de instrução que depende de memorizar técnicas e habituar-se a habilidades, sem uma comparável dependência da compreensão dos processos envolvidos. Modernos programas de instrução procurarão desenvolver nos alunos discernimentos e compreensões relativos a: a) conceitos que são básicos à conduta matemática; b) a natureza das operações com números; c) conceitos e princípios que concernem às relações entre quantidades; d) os sistemas de notação numérica.

12. Maturação e prontidão são fatores importantes à aprendizagem matemática. Estudos revelaram que há diferenças significativas quanto ao desenvolvimento fisiológico das crianças, o que veio influir sôbre os programas de instrução. Até o presente, não há clareza quanto à maneira de ajustar instrução e desenvolvimento físico. A prontidão parece não ser uma condição apenas do reagente. Parece ser afetada dinâmicamente pelas circunstâncias sob as quais o reagente é estimulado. Portanto, a aplicação do conceito de prontidão no programa de instrução matemática envolve, pelo menos, as seguintes considerações: a) determinar que o aprendiz é física e mentalmente educável ao tempo e sob as condições propostas para a sua aprendizagem; b) selecionar tarefas apropriadas quanto à seqüência, considerando as experiências anteriores do aprendiz; c) interessar o aluno em realizar essas tarefas; d) prover materiais e experiências altamente favoráveis ao sucesso na a-

prendizagem; e) auxiliar o aprendiz a avaliar seu sucesso. Essas condições existem em cada nível de desenvolvimento educacional.

13. Expeiriências repetitivas, às vêzes chamadas "drill", são necessárias. Servem, pelo menos, a duas importantes funções na aprendizagem: a) oferecem oportunidade para esclarecer e melhor identificar o que é aprendido; b) oferecem oportunidade para fixação e facilitam a evocação do que foi aprendido. Os períodos de "drill" devem ser bem planejados para que alcancem estas finalidades; se não o forem, seu valor é duvidoso.

14. As salas de aula deveriam ser laboratórios de aprendizagem. As técnicas de classe devem ser mudadas de "recitar e ouvir" para "laboratórios de aprendizagem". Dependência de memorização e subseqüente "recitação" não dá ao aprendiz domínio pessoal e intelectual sôbre as coisas assim conquistadas. Experiência é o recurso da aprendizagem; o que se experiencia e como é experienciado influem poderosamente sôbre o que é aprendido e como é aplicado em atividades subseqüentes.

A MATEMÁTICA COMO SISTEMAS DE CONCEITOS COM RELAÇÃO À QUANTIDADE (Página 57)

(Resumo)

Matemática: conduta em relação a quantidade

"Tudo que existe, existe em alguma quantidade."

O número é a principal preocupação dos programas tradicionais para instrução em atritmética. Ninguém nega que um conhecimento de números e habilidade em usá-los são importantes. No entanto, muita, se não a maioria, da nossa preocupação com quantidade não envolve número. E o número, sendo um instrumento altamente especializado, depende de experiências primárias para ser significativo. Portanto, os currículos da escola primária que restringem a instrução em matemática mèramente a fatos e técnicas de cálculos são inadequados e errôneos.

Tamanho, ordem e número são características sempre em observação: - Que tamanho tem? Aonde está? Quando aconteceu? Quantos são? - são exemplos de perguntas que contìnuamente afetam nossas vidas. Cada indivíduo amplia seu conhecimento do mundo em que vive formulando questões como estas e procurando respostas para as mesmas. Isto constitui a base da conduta matemática.

Variabilidade e similaridade: características da experiência

Duas características das situações-estímulo são essenciais à experiência matemática: diferenças e semelhanças. Se não há características diferenciais, há pouca orientação para a reação. Do mesmo modo, há tendência a "agrupar" as coisas que se apresentam semelhanças.

Identificação e comparação: processos básicos da conduta matemática

Na experimentação, as coisas (objetos, relações, características ou processos) são identificadas, isto é, separadas das situações em que ocorrem. Uma vez identificadas, e mesmo no processo de identificação, realiza-se a comparação. Esta é uma forma básica da conduta. É uma técnica aplicada constantemente na experimentação matemática. Através de sua aplicação adquire-se conhecimento. O uso sistemático do processo comparativo é essencial à instrução e à aprendizagem eficientes.

Constância e variabilidade: julgamentos básicos da comparação

Os julgamentos de que as coisas comparadas são semelhantes, similares, equivalentes, iguais ou constantes, ou de que são dissemelhantes, dissimilares, desiguais ou variáveis, são os produtos primários da comparação. Tais julgamentos são as bases das atividades e práticas analíticas ulteriores, que são características da conduta matemá tica. Julgamentos de semelhança levam a agrupamentos e classificações de objetos e processos. Na ação numérica, são representados pela equação, um instrumento poderoso de cálculo. Julgamentos de diferença levam a análises da natureza das diferenças.

Referência: um instrumento de comparação

A comparação envolve alguma coisa ou coisas a serem comparadas e uma referência ou "standard" ao qual compará-las. Coisas simples são usadas como referência para a interpretação de outras.

Para comparações mais exatas é necessário estabelecer referências que possam ser usadas por um grupo social. Centenas de tais "standards" ou referências já foram estabelecidos e novos estão constantemente sendo desenvolvidos e usados.

As referências mais difíceis de serem estabelecidas são as que se referem a coisas inestruturadas, como, por exemplo, o espaço, o tempo e a fôrça da gravidade. A engenhosidade com que se estabeleceram "standards" para êstes elementos é motivo de orgulho para a raça humana. Entre êles, pode se destacar: a seleção do equador para ~~comparar~~ comparar latitudes, do primeiro meridiano para comparar longitudes, o zenith do sol para determinar o início de um novo dia, o nascimento de Cristo como referência de medidas de tempo em anos, o ponto de congelamento da água para medida de temperatura.

Direção: um aspecto de variação

Relacionada com a idéia de "standards" ou pontos de referência na comparação está a idéia de variação direcional. Em têrmos de quantidade, a direção tem apenas duas dimensões: aumento e diminuição. No entanto, em têrmos de posição ou espaço, outras características são envolvidas. Por exemplo, as dimensões de comprimento, largura e espessura são observadas juntamente com as variações quantitativas. Desde que muitas vêzes nos preocupamos com as variações direcionais de uma superfície inteira, é necessário usar designações de vários tipos: acima, abaixo; antes, depois; à direita, à esquerda; a leste, a oeste; etc.

Medida: um instrumento de comparação

A observação de que as coisas comparadas normalmente diferem incentiva o observador a descobrir em que aspectos diferem e a quantidade da diferença. Comparação e medida são bàsicamente similares, mas a medida pode envolver comparações repetidas, juntamente com uma técnica de escala.

Número: um instrumento para expressar quantidade

A observação das diferenças dos objetos sugere sua individualidade. O aparecimento de diferenças em grupo contrastando com casos singulares, estimula a necessidade de expressar mais que unidades. Daí surgiram a marcação (tallying) e, depois, os símbolos numéricos, que expressam a unidade e grupos de unidades.

Usos do número: cardinal e ordinal

micamente usando-se a divisão, que é um caso especial de subtração e não um processo a parte. É usada quando os subtraendos são iguais.

Costumava-se conceituar a adição, a subtração, a multiplicação e a divisão como processos distintos e, conseqüentemente, ensiná-las separadamente, ao invés de relacioná-las. Quando são ensinadas como um processo fundamental único, cada técnica reforça e amplia as demais.

PRINCIPAIS CONCEITOS QUE FUNDAMENTAM A ADIÇÃO E A MULTIPLICAÇÃO

Nota: Através de exemplos muito claros e explícitos, os autores demonstram as seguintes generalizações:

- O valor de uma soma é determinado pelo número e valor numérico das parcelas que a produzem.

$$\begin{array}{r}3\\ \underline{3}\\ 6\end{array}\qquad \begin{array}{r}3\\ 3\\ 3\\ \underline{3}\\ 12\end{array}\qquad \begin{array}{r}1\\ \underline{1}\\ 2\end{array}\qquad \begin{array}{r}4\\ \underline{4}\\ 8\end{array}$$

- O valor de um produto é determinado pelos valores do multiplicando e do multiplicador

$$\begin{array}{r}3\\ \underline{\times 1}\\ 3\end{array}\qquad \begin{array}{r}3\\ \underline{\times 2}\\ 6\end{array}\qquad \begin{array}{r}1\\ \underline{\times 2}\\ 2\end{array}\qquad \begin{array}{r}4\\ \underline{\times 2}\\ 8\end{array}$$

- A ordem das parcelas pode ser mudada sem alterar o valor da soma.

$$\begin{array}{r}7\\ \underline{5}\\ 12\end{array}\qquad \begin{array}{r}5\\ \underline{7}\\ 12\end{array}$$

- O número de parcelas iguais e o valor numérico das parcelas podem ser permutados sem alterar a soma.

$$\begin{array}{r}3\\ 3\\ 3\\ \underline{3}\\ 12\end{array}\qquad \begin{array}{r}4\\ 4\\ \underline{4}\\ 12\end{array}$$

- A ordem do multiplicando e do multiplicador podem ser mudada sem alterar o valor do produto.

$$\begin{array}{r}4\\ \underline{\times 6}\\ 24\end{array}\qquad \begin{array}{r}6\\ \underline{\times 4}\\ 24\end{array}$$

- Se um determinado valor é subtraído de uma parcela e o mesmo valor é adicionado a outra parcela, o valor da soma não se altera.

A medida de quantidades é o uso "cardinal" da série numérica. Esta, porque simboliza uma seqüência ordenada, tem outro uso: representar ordem ou classe - primeiro, segundo, terceiro, etc.. É o uso "ordinal" da série numérica.

Frações: um tipo de número

Desde que a série numérica é destinada a medir a acumulação de unidades ou coisas unitárias, não serve fàcilmente para representar outras quantidades. Muitas das coisas unitárias que nos cercam podem ser fàcilmente separadas em partes menores, cada uma das quais tem características de unidade. Houve necessidade de imaginar um sistema para representar e tratar com tais fenômenos. Isto foi alcançado pelo sistema fracionário de notação.

A série numérica: uma escala para cálculo

Cálculo numérico é essencialmente um conjunto de técnicas para determinar em que ponto da escala numérica esta localizado o resultado de uma operação. Por exemplo, "4 mais 5" pode ser representada do seguinte modo na escala numérica:

```
0  1  2  3  4  5  6  7  8  9  10  11  12
            ↓  1  2  3  4  5↑
```

Começando no 4, contam-se 5 intervalos, em ordem crescente. O resultado é 9 na escala básica. Do mesmo modo, "9 menos 6" pode ser representado assim:

```
0  1  2  3  4  5  6  7  8  9  10  11  12
         6↑ 5  4  3  2  1  ↓
```

Começando-se no 9, contam-se 6 intervalos em ordem decrescente. O resultado é 3 na escala básica.

Dependência: idéias não-numéricas de relàcionamento

Preocupamo-nos, até aqui, em apontar idéias e práticas que se relaciona, com a identificação e medida de quantidades. Há outras idéias importantes para a ação matemática. Como foi definida, a matemática também estuda as relações entre quantidades. Algumas dessas idéias podem ser classificadas como de dependência ou função. Muitas vêzes, a maneira pela qual um fenômeno é avaliado não depende de fatôres que lhe são inerentes. Por exemplo, uma maçã é considerada grande se comparada com uma ervilha. Mas a mesma maçã será considerada pequena se comparada a uma abóbora. "Grande" e "pequeno" são medidas relativas. Diferem materialmente de idéias como "cinco" e "nenhuma coisa".

NOTAÇÃO DECIMAL (Página 85)

(Tradução)

O sistema decimal é baseado na multiplicação quando aplicado a decimais inteiros(números inteiros) e na divisão quando aplicado a frações decimais (valores numéricos menores que um). Como o sistema de notação romano, o sistema decimal usa um valor básico e convenções posicionais em seus símbolos.

O valor constante dos números

Há dez dígitos primários no sistema decimal de notação.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Cada dígito yem um valor constante ou inerente baseado sôbre a sua ordem na série de dez dígitos. Nove, por exemplo, é sempre um mais do que oito, um menos do que dez, três 3, quatro e cinco,seis e três. A ordem da série numérica é constituida por múltiplos de um ("oneness"), isto é, O representa "nenhuma coisa", 1 é um mais do que 0, 2 é um mais do que 1, 3 é um mais do que 2, e assim por diante. Isto, como é fácil observar, é essencialmente um artifício para marcação (tallying) - para coleção de uns para representar unidades de coisas contadas.

Quando os dígitos primários são escritos em ordem, o 0 deveria sempre preceder o 1. Êle nunca deveria suceder o 9. Na série dos dígitos fundamentais,o zero indica "nenhuma coisa". "Nenhuma coisa" racional e pròpriamente precede e compara com "algum" ou "vários" na série de valores quantitativos.

O valor posicional dos números

A genialidade do sistema decimal repousa no uso dos dígitos primários para expressar todos os valores numéricos maiores que 9.Neste sentido, êle é comparável ao alfabeto da língua inglêsa. Por meio de vinte e seis letras imaginamos milhares de símbolos de palavras . Similarmente, com dez dígitos primários do sistema de notação decimal, expressamos tôda a sucessão de valores de números inteiros.

Foi genial imaginar um sistema de símbolos que expressem prontamente a idéia de agrupamento por dezenas. O sistema decimal se desenvolve como múltiplos da unidade em agrupamentos de dez.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9	simbolizam os dez valores primários
10 11 12 13 14 15 16 17 18 19	simbolizam os dez valores seguintes
20 21 22 23 24 25 26 27 28 29	similarmente simbolizam a década seguinte

Os símbolos numéricos são símples e, quando o conceito de"valor posicional" é compreendido, êles são fàcilmente interpretados.

<u>A operação com o valor constante e o posicional dos números estabelece um sistema fácil para comparar valores numéricos</u>

abc
555

Aqui vês três 5. Os três dígitos parecem semelhantes, e êles o são em têrmos da quantidade de espaço usada para escrevê-los. Entretanto, cada 5 representa um valor diferente dos demais. Se tivesses oportunidade de ganhar o dinheiro representado por <u>um</u> dos 5, darias importância a qual dos 5 escolher. Lê a expressão da esquerda para a direita. Quinhentos - cinquenta - cinco. Os símbolos numéricos são semelhantes, contudo damos nome diferente a cada um. Por exemplo, compara os valores dos 5. As letras acima de cada 5 facilitarão nossa comparação.

a b c
5 5 5

<u>Comparando maior com menor</u>

5a é dez vêzes maior em valor numérico que 5b. (500 é 10 x 50)
5b é dez vêzes maior em valor numérico que 5c. (50 é 10 x 5)
5a é cem vêzes maior em valor numérico que 5c. (500 é 100 x 5)

<u>Comparando menor com maior</u>

5c é dez vêzes menor em valor numárico que 5b.
5b é dez vêzes menor em valor numérico que 5a.
5c é cem vêzes menor em valor numérico que 5a.

Através dessas comparações torna-se claro, fàcilmente, que um dígito qualquer no lugar das dezenas tem um valor numérico <u>dez vêzes maior</u> do que se estivesse na posição das unidades. Similarmente, um dígito qualquer colocado na posição das centenas tem um valor numérico <u>cem vêzes maior</u> do que se fôsse colocado na posição das unidades, e <u>dez vêzes maior</u> do que se fôsse colocado na posição das dezenas. Invertindo, um dígito qualquer colocado na posição das unidades é <u>dez vêzes menor</u> em valor numérico do que se fôsse colocado na posição das dezenas, e <u>cem vêzes menor</u> em valor numárico do que se fôsse colocado na posição das centenas.

As comparações dos valores numéricos são facilitadas pelos valores posicionais, isto é, pelo assim chamado "arranjo em colunas" das expressões numéricas. <u>A posição das unidades é a base para o arranjo numérico. O valor de qualquer posição é determinado por sua relação à posição das unidades</u>. O valor posicional é também a base do princípio fundamental do cálculo numérico de que <u>sòmente têrmos que tenham o mesmo valor posicional podem ser somados e subtraidos</u>. Unidades são combinadas com unidades, dezenas com dezenas, centenas com centenas.

A função do zero no sistema decimal

Os conceitos fundamentais do zero são freqüentemente anulados como "o pequeno e travêsso número zero" ou " o zero significa nenhuma coisa" quando tratados em livros de texto para crianças. Contudo, os conceitos que fundamentam o zero são de grande significância para a interpretação de todo o trabalho com o sistema decimal de notação. Zero expressa valor quantitativo tão verdadeiramente como qualquer outro numeral.

1. Zero, como cada um dos outros numerais primários, serve à função de um "placeholder" nas expressões numéricas. Por exemplo:

10 403 0,04 10,02

O sistema decimal de notação utiliza o zero como um "placeholder"(guarda-lugar). Não há conhecimento definitivo sôbre quem inventou a função de "placeholder" para o zero, mas há concordância em que esta invenção é uma das maiores conquistas do homem. A função do zero, como a de qualquer outro numeral, é designar o valor numérico fixado para determinada posição em uma expressão numérica. Zero,neste uso, representa "nenhuma coisa" (not any) do valor posicional em que é usado.

2. Zero também é usado para designar um ponto de origem -um ponto de partida do qual pode haver movimento em qualquer direção. Por exemplo:

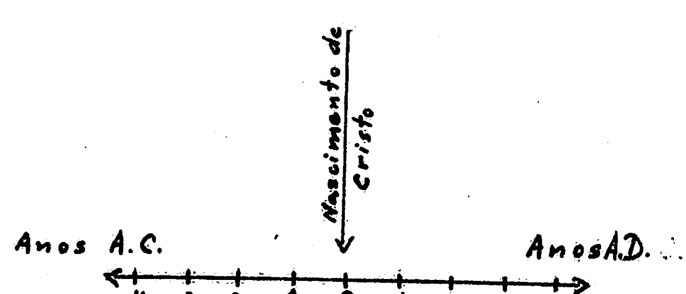
-9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 +1 +2 +3 +4 +5 +6 +7 +8 +9

"Um ponto de origem do qual pode haver movimento em qualquer direção" é significação muito importante do zero. A idéia está presente até mesmo no espírito da criança. Ela não a expressa num vocabulário de alto poder, mas as idéias podem ser identificadas se analisarmos o que a criança faz com as idéias e o que diz sôbre elas.

O aprendiz deveria ter o previlégio de descobrir idéias de zero como ponto de origem de modo que desenvolva a compreensão de sua função em medidas.

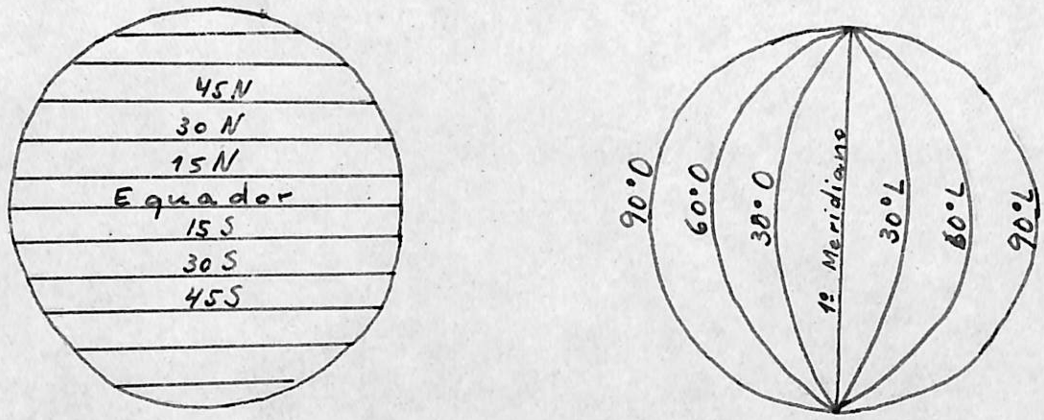
Deveria, também, desenvolver uma apreciação da engenhosa aplicação de pontos de origem na medida de coisas que de outro modo seriam sem limites.

ESCALA PARA MEDIDA DE TEMPO



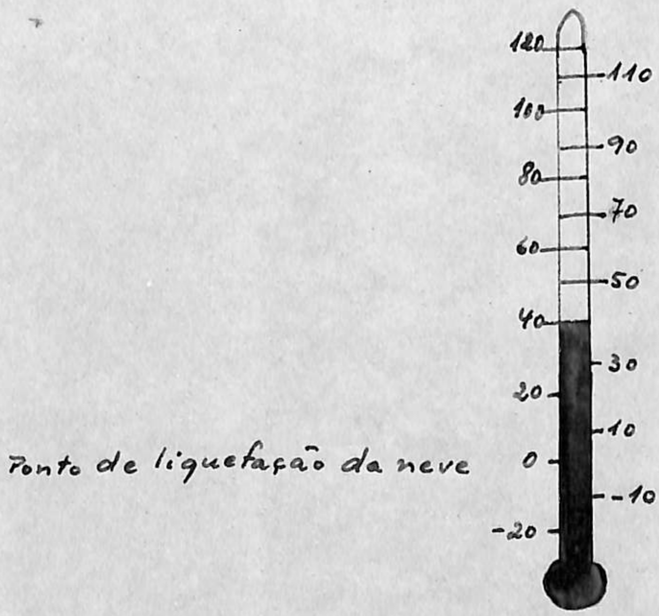
O nascimento de Cristo é o ponto de origem para medir tempo em anos.

ESCALA PARA MEDIR A TERRA



O equador é o ponto de origem para medir latitude; o primeiro meridiano para medir longitude.

ESCALA PARA MEDIR CALOR



O ponto de liquefação da neve é o ponto de origem para a escala de graus centígrados para medir temperatura.

3. <u>Zero significa " nenhuma coisa"</u>. O conceito de zero com significação de "nenhuma coisa" desenvolve cêdo no espírito da criança. Quando ela vê que há dois triciclos, mas que cada um dêles é ocupado por outra criança, ela não tem dificuldade em sentir que "nenhuma coisa" está livre para ela. **Seu problema consiste em mudar a situação!**

O desenvolvimento do conceito de zero é importante no trabalho de cálculo. A criança deveria formular generalizações referentes ao zero. Por exemplo; um número menos zero é êsse número; um número menos êle próprio é zero; um número multiplicado por zero é zero. Frequentemente um professor substitui à construção de conceitos por longas horas de treino. O resultado é que muitas vêzes há pouca mudança na eficiência da criança para cálculos. O tempo e o esfôrço envolvidos para dominar fatos e habilidades numéricas podem ser reduzidos a um mínimo se a criança é dirigida à formulação de generalizações que são fundamentadas em idéias de relacionamento. Estas generalizações resultam em compreensão, com idéias fora de seus padrões numéricos bem como eficiência em cálculo.

CONCEITOS FUNDAMENTAIS ÀS TÉCNICAS DE CÁLCULO COM INTEIROS DECIMAIS (Página 113)

(Resumo)

O único processo fundamental - Contagem

O uso básico do sistema decimal de notação é de escala para marcar (tallying) ou contar quantidade. Utilizando um ponto de origem, a escala de notação se estende em uma direção para indicar os números positivos e na direção oposta para a indicação de números negativos. Contagem é a operação com números básica e fundamental. O processo básico é o de mudança ou variação. A mudança ocorre ~~como ou~~ como adição ou como subtração de quantidade. As duas direções são opostas em função, mas semelhantes em características. Elas constituem alternativas, e um conhecimento de ambas é necessário para a compreensão inteligente de qualquer delas. Elas operam como um processo fundamental de idéias relacionadas.

Contagem direcional

Adição e subtração são meramente técnicas para contagem direcional. A adição expressa aumento de quantidade. A subtração exprime diminuição de quantidade. Os tipos especiais, multiplicação e divisão se igualam com o respectivo processo "progenitor"(parent).

Direção crescente (adição de quantidade)

Adição		Multiplicação	
2	parcela	2	multiplicando (parcela)
2	parcela	3	multiplicador(número de vêzes a parcela é usada)
2	parcela		
6	soma	6	produto

2+2+2 = 6 $\qquad$ 3 x 2 = 6

Em certos casos, as adições ocorrem sucessivamente com o mesmo número usado como parcela. Tais adições podem ser expressadas alterando a técnica para multiplicação. Em sentido exato, a multiplicação não é um processo a parte: é um caso especial de adição. A multiplicação é usada quando as parcelas são iguais.

Direção decrescente (subtração de quantidade)

Subtração

12	minuendo	12
- 4	subtraendo	- 4
8	diferença ou resto	8
		-4
		4
		-4

Divisão

dividendo 12 | 4 divisor
3 quociente

As subtrações podem ocorrer sucessivamente e com valores iguais como subtraendos. Estas mudanças podem ser tratadas mais econô

$$\frac{6 - 3 = 3}{\frac{6}{12} + 3 = \frac{9}{12}}$$

- Se um dos fatôres de um produto é dividido por um determinado número e o outro fator do produto é multiplicado por êste mesmo número, o valor do produto não se altera.

$$\begin{array}{ccc} 6 & \div\ 2 & 3 \\ \underline{4} & \times\ 2 & \underline{8} \\ 24 & & 24 \end{array}$$

PRINCIPAIS CONCEITOS QUE FUNDAMENTAM A SUBTRAÇÃO E A DIVISÃO

Nota: Também aqui os autores demonstram as generalizações abaixo através de bons exemplos e explicações.

- Se o valor do minuendo é constante, o número de vêzes que o subtraendo pode ser subtraido varia inversamente ao valor numérico do subtraendo.

$$\begin{array}{ccc} 16 & 16 & 16 \\ \underline{-\ 4} & \underline{-\ 8} & \underline{-16} \\ 12 & 8 & \\ \underline{-\ 4} & \underline{-\ 8} & \\ 8 & & \\ \underline{-\ 4} & & \\ 4 & & \\ \underline{-\ 4} & & \end{array}$$

- Quando o dividendo é constante, o valor do quociente varia inversamente ao valor do divisor.

$$16 \,|\underline{\ 16\ } \quad 1 \qquad 16 \,|\underline{\ 8\ } \quad 2 \qquad 16 \,|\underline{\ 4\ } \quad 4$$

- Se o valor do subtraendo é constante, o número de vêzes que pode ser subtraido do minuendo é diretamente proporcional ao valor dêste.

$$\begin{array}{cc} 6 & 24 \\ \underline{-\ 6} & \underline{-\ 6} \\ & 18 \\ & \underline{-\ 6} \\ & 12 \\ & \underline{-\ 6} \\ & 6 \\ & \underline{-\ 6} \end{array}$$

- Quando o divisor é constante, o quociente é diretamente proporcional ao valor do dividendo.

6 | 6   24 | 6
1   4

– Quando o número de subtrações é constante, o valor do minuendo e o valor do subtraendo estão em relação direta.

2	8
- 1	- 4
1	4
- 1	- 4

– Quando o valor do quociente é constante, o divisor e o dividendo podem variar em proporção direta.

2 | 1   8 | 4
2   2

– O subtraendo somado ao resto equivale ao minuendo.

14	7 + 7 = 14
- 7	
7	

– O divisor multiplicado pelo quociente équivale ao dividendo.

14 | 7   7 x 2 = 14
2

– O subtraendo e o resto estão relacionados do mesmo modo ' que as parcelas estão relacionadas à soma na adição.

9	9
- 3	- 6
6	3

O divisor e o quociente estão relacionados do mesmo modo ' que o multiplicador e o multiplicando estão relacionados ao produto ' na multiplicação.

16 | 8   16 | 2
2   8

O ENSINO DE FAMÍLIAS DE FATOS RELACIONADOS (Tradução)

A adição e a multiplicação são opostas, em função, à subtração e à divisão, mas consistem em um único processo fundamental. Êste processo fundamental é baseado em mudança de quantidade. A mudança pode ocorrer como um aumento de quantidade ou uma diminuição de quantidade.

As relações matemáticas básicas que sustentam êsse processo' fundamental são de maior significância na ação do que os exercícios ' de cálculo memorizados e isolados que freqüentemente compreendem a matemática da escola primária. Eficiência em cálculo é essencial para a instrução e a conduta matemática desejável na sociedade atual. Não ' pretendemos insinuar que seu ensino deva ser negligenciado. No entanto, o árduo processo de memorizar fatos e habilidades numéricas como necessidades isoladas envolve uma tremenda quantidade de tempo e esfôrço. Para diminuir êste fardo - fardo para o aluno e fardo para o professor - sugerimos que êles sejam ensinados através de um único processo fundamental. Estimular o aluno a sentir, descobrir e interpretar os conceitos que baseiam as idéias interrelàcionadas da natureza da mudança, e então implementar estas idéias com os fatos numéricos e habilidades numéricas relacionadas. Por exemplo, há 390 fatos separados quando as combinações primárias de adição, subtração, multiplicação e divisão são considerados fatos separados.

100 combinações primárias de adição
100 combinações primárias de subtração
100 combinações primárias de multiplicação
90 combinações primárias de divisão

Quando essas combinações são agrupadas em famílias de fatos relacionados, há 100 famílias. A família de fatos relacionados -

$8 + 8 = 16$	$2 \times 8 = 16$	dois em 16 = 8
$16 - 8 = 8$	$8 \times 2 = 16$	oitos em 16 = 2

explica uma família de idéias relacionadas. As seis combinações primárias desenvolvidas ao mesmo tempo, cada uma facilitando a outra, são um resultado lógico até mesmo das fases mais iniciais de crescimento em qualquer um dos fatos citados. Isto não implica que as palavras "multiplicação","vêzes", "divisão", "dividido por", etc., necessitem ser reveladas nas fases iniciais do ensino de combinações primárias. No entanto, os padrões de linguagem da multiplicação e da divisão deveriam emergir, em suas formas mais simples, durante as fases iniciais do ensino de combinações. Expressões como "dois oitos" e "quantos oitos são necessários para perfazer 16?" ilustram êste ponto. Elas simbolizam o conceito de multiplicação e divisão mais claramente do que muitas das mais freqüentemente usadas, como "contém", "vêzes" e "multiplicado por".

Também, há muitas generalizações que deveriam ser reveladas para facilitar a aprendizagem de fatos e habilidades numéricas que são essenciais para a eficiência em matemática na escola elementar. Por exemplo:

Qualquer número multiplicado por um é êste número. $(n \times 1 = n)$
Qualquer número menos o mesmo número iguala zero. $(n - n = 0)$
Qualquer número dividido por um é êste número. $(n \div 1 = n)$
Qualquer número dividido por sí mesmo iguala um. $(n \div n = 1)$

Quando tais generalizações são desenvolvidas, muito tempo e esfôrço para a aprendizagem de combinações podem ser economizados.

CONCEITOS RELACIONADOS AOS "DENOMINATE NUMBERS" (Pág. 258)

(Resumo)

O têrmo "denominate numbers" se refere aos números com nome, isto é, números que designam quantidades específicas de coisas definidas. "Denominate numbers" consistem da aplicação dos números decimais juntamente com várias unidades de medida para desegnar quantidades do que foi medido. Numa interpretação real, todos os números são "denominate numbers". Expressões como 325, 3,25 , $\frac{5}{8}$ ou $2\frac{3}{4}$, comumente chamados "abstratos", realmente expressam nomes de agrupamentos específicos de números.

O agrupamento de valores numéricos em categorias denominadas é idêntico, em princípio, à designação de séries de medidas nos chamados "denominate numbers". Há um reconhecimento dêste fato na terminologia das frações ordinárias. Os divisores nos símbolos fracionários são geralmente chamados "denominadores". Os denominadores são definidos como designadores dos tamanhos das partes em que foi dividido o todo.

Valor posicional na notação decimal, categorias de tamanho na notação de frações ordinárias e categorias de medida nos "denominate numbers" são todos expressões de uma idéia comum. Conseqüentemente, as técnicas usadas para agrupamento e reagrupamento em categorias de valores relacionados são iguais para todos êsses números.

Técnicas de cálculo com "denominate numbers"

Dificuldades com os "denominate numbers" podem surgir das relações arbitrárias e irregulares entre os grupos nas várias tabelas e escalas. Aprender as escalas e lembrá-las quando necessário é uma tarefa difícil. No entanto, o uso de "denominate numbers" não apresenta nada essencialmente novo no processo de cálculo. O agrupamento de valores em categorias mais altas nas escalas é feita do mesmo modo como é realizada com números decimais e frações ordinárias. Semelhantemente, o reagrupamento, a mudança de um valor de uma categoria mais alta para uma inferior é realizada do mesmo modo que com os outros números. Os mesmos princípios regem as técnicas. Sòmente têrmos dentro dos mesmos agrupamentos ou categorias são adicionados ou subtraidos.

SOLUÇÃO DE PROBLEMAS: TÉCNICA BÁSICA PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA NA ESCOLA PRIMÁRIA (Página 297)

(Resumo)

Introdução

Conta-se a história de um professor que se perdeu numa região montanhosa. Tentou encontrar alguma habitação, sem resultados. Finalmente encontrou um nativo da região, que não parecia muito inteligente, mas que pelo menos aparentava saber para onde se dirigia. Quando o professor lhe pediu ajuda, desenvolveu-se entre êles a seguinte conversação:

- Desculpe-me, amigo, mas parece que me perdi. Podes me dizer como ir a J...?
- Não, senhor. Nunca estive em J...
- Bem, onde vai dar o atalho que estou seguindo?
- Não sei dizer. Nunca o segui.
- Bem, que caminho devo seguir para chegar à fazenda S...?
- Não conheço nenhuma fazenda S...

Nesta altura, o professor estava aborrecido, e exasperado exclamou:

- Diga, você não sabe muito, não é?
- Não. Reconheço que não, mas eu não estou perdido.

O professor enfrentava um dilema e o montanhês não. Um problema para uma pessoa não é necessàriamente um problema para outra. A menos que se sinta que um problema e sua solução tem pertinência, não se expenderá muito esfôrço em conexão com êle.

Problemas versus exemplos

Problemas, nas discussões comuns sôbre matemática da escola elementar, são geralmente distinguidos dos exemplos. Exemplos são situações de cálculo apresentadas sòmente em linguagem numérica. Problemas, por outro lado, são definidos como situações apresentadas em linguagem verbal. Tais problemas podem ou não envolver números. Esta diferenciação perde muito de sua propriedade quando o aprendiz é levado a desenvolver uma compreensão significativa dos conceitos de números e práticas de cálculo. <u>Sentir situações que requerem soluções numéricas e descobrir ou imaginar instrumentos ou técnicas adequadas à solução de tais situações envolve conduta favorável à solução de problemas.</u>

(Nota: A expressão " problem-solving behavior" foi traduzida para "conduta favorável à solução de problemas".)

Problemas são a base da aprendizagem

A idéia de que a aprendizagem é um processo de modificação ou adaptação do comportamento para servir melhor às nossas necessidades, reconhece os problemas ou situações problemáticas como a base de tôda a aprendizagem. Quando um ajustamento necessita ser realizado, o aprendiz deve estar consciente da necessidade. Deve formar uma idéia sôbre a natureza do problema e do que parece ser uma conduta adequada em relação ao mesmo. "Tentativas provisórias" terão que ser feitas se a solução não for imediata, e avaliações e reajustamentos feitos na base de tais experiências. A solução de problemas é o centro de um desenvolvimento educacional que dá ênfase à compreensão pessoal e ao auto-domínio.

Tipos de situações que envolvem solução de problemas com matemática de escola elementar

1. Desenvolveimento de idéias concernentes às relações matemáticas.

O processo de sentir, descobrir, experimentar, determinar, aplicar e testar relações matemáticas básicas é um tipo de solução de problemas muito significativo. Para levar os alunos a desenvolverem relações matemáticas através da solução de problemas, o professor deveria analisar, antecipadamente, os conceitos e métodos que fundamentam a metemática da escola elementar. Deveria, depois, determinar as relações específicas que planeja desenvolver. Baseado nessa análise, e através da aplicação dos princípios básicos da aprendizagem implícitos no têrmo "um laboratório de aprendizagem", um professor pode realizar excelente trabalho para incentivar o aluno a usar suas melhores habilidades na aquisição de competência com idéias e instrumentos matemáticos.

2. Domínio de fatos e habilidades numéricas através da solução de problemas

Os vários tipos de números usados em nossa sociedade foram desenvolvidos para auxiliar a solução de problemas sociais. Eficiência no uso de tais instrumentos inclui não só o conhecimento dos ditos instrumentos como o dos tipos de situações em que seu uso é benéfico.

3- Interpretação de material pictórico, como gráficos, mapas, tabelas, diagramas e pictógrafos

O desenvolvimento e o uso funcional de muitos tipos de materiais pictóricos, como gráficos, escalas, tabelas, diagramas e pictógrafos representam um tipo de solução de problemas que podem emergir de muitas atividades do dia escolar. Experiências das crianças que as levem a fazer gráficos e mapas podem ser usadas com grande vantagem.

4. Problemas surgidos das atividades das crianças

As atividades das crianças oferecem excelente oportunidade para a solução significativa de problemas. No entanto, se deixarmos a criança resolver seus problemas através de iniciativa e recursos próprios, ela não progredirá na sua conquista de um bom cabedal de conhe cimentos necessários para solucionar problemas. O professor deveria facilitar o crescimento da criança na habilidade de solucionar problemas auxiliando-a a sentir os problemas e a achar maneiras fáceis de encontrar suas soluções.

5. Estimativa e julgamento da racionalidade das respostas

Em tôda experiência matemática, há oportunidade para desenvolvimento de conceitos de estimativa e julgamento da racionalidade das respostas. Tais idéias e habilidades são o produto do desenvolvimento de técnicas razoáveis de julgamento, de conceitos básicos relativos a unidades de medida, do estabelecimento de pontos de referência para julgar tamanho e quantidade, e de experiências sôbre as quais os julgamentos são feitos e testados.

6. Solução de problemas verbais

Os problemas orais ocorrem mais freqüentemente nas experiências da criança e do adulto que os escritos e, provàvelmente, são mais significativos em têrmos de conduta matemática.

Técnicas para ensinar a solucionar problemas

A solução de problemas pode se desenvolver através da discussão de grupo ou entrevista individual, da experimentação de grupo ou individual e através de trabalho escrito. Uma ou duas perguntas estimulantes muitas vêzes produzem o deseafio que conduz à solução de problemas.

O aluno deveria ser incentivado a realizar descobertas básicas, que o levem a interpretar, a levantar hipóteses, a generalizar e a testar seus conhecimentos.

ALGUNS ASSUNTOS DAS LIÇÕES ILUSTRATIVAS E CLASSES A QUE SE DESTINAM

Conceitos relativos a pêso (1º ano)
Maneiras de medir (1º ano)
Uso de medidas conhecidas como padrões de referência (2º, 3º e 4º anos)
Técnicas de medida (4º ano)
Ponto inicial de um círculo (2º ano)
Maneiras de ensinar conceitos relativos a tamanho, forma, pêso, posição, tempo, temperatura, espaço (Geral)
Conceitos que fundamentam o sistema decimal de notação (2º ano)
Conceitos relativos ao valor constante e ao posicional dos números (2º a 6º anos)
Relações entre parcelas e soma (3º ano)
Relações entre multiplicando, multiplicador e produto (3º ano)
A divisão é um caso especial de subtração (3º ano)
Relações entre divisor, dividendo e quociente (5º ano)
Notação de frações decimais (3º ano)
Multiplicação de frações decimais (6º ano)
Divisão de frações decimais (5º ano)
Introdução ao cálculo de percentagem (6º ano)

Arquivado em 28/08/81
[illegible]

24/06/81
[illegible]