NOME:________________________ Nº____ TURMA:_____ DATA:__/10/04

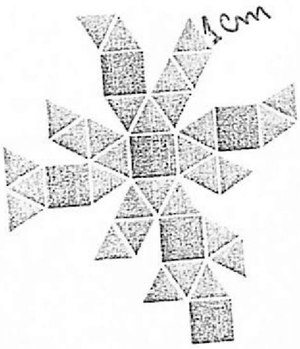
GEOMETRIA ESPACIAL

Dados os sólidos geométricos planificados abaixo, determine o que se pede:

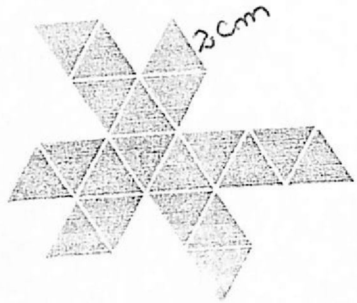
a) Número de faces, arestas e vértices de cada sólido ($V+F=A+2$)

b) Área total do sólido planificado, de acordo com as medidas dos lados.

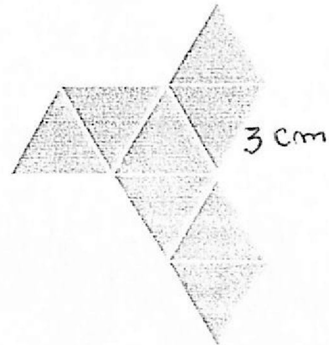
a)



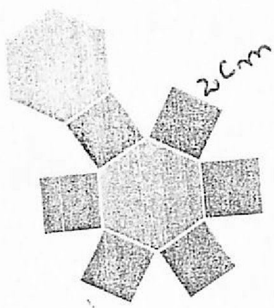
b)



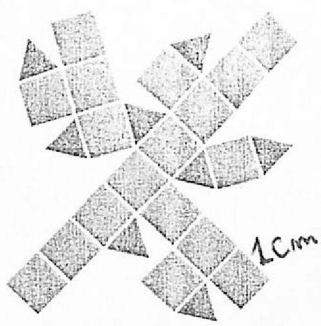
c)



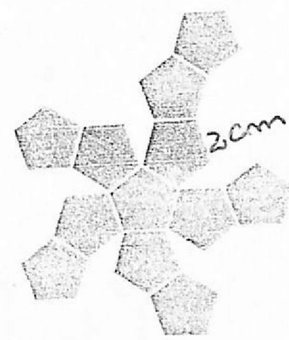
d)



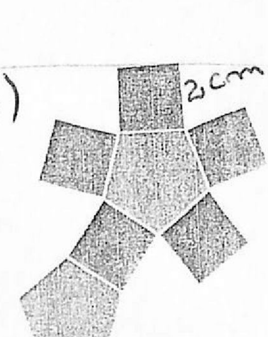
e)



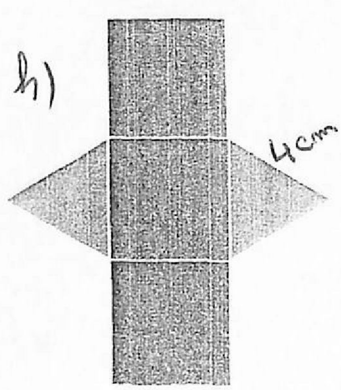
f)



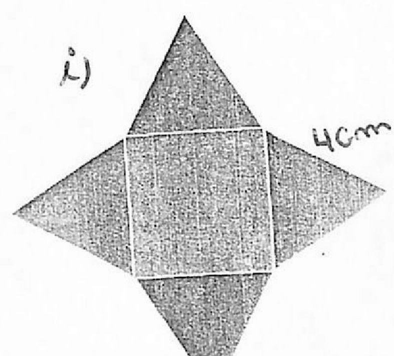
g)



h)



i)



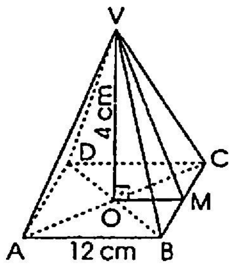
INSTITUTO DE EDUCAÇÃO – MATEMÁTICA –

Exercícios propostos

1 Considere uma pirâmide regular de base quadrada. Sabendo que o lado da base mede 12 cm e a altura da pirâmide mede 8 cm, calcule:

a) a área da base.($144\ cm^2$) b) a área lateral.($240\ cm^2$) c) a área total($384\ cm^2$)

2 Considere a pirâmide quadrangular regular indicada na figura ao lado:



Calcule:

a) a medida do apótema da base($6\ cm$)

b) a medida do apótema da pirâmide($2\sqrt{13}\ cm$)

c) a medida da aresta lateral.($2\sqrt{22}\ cm$)

d) a área total da pirâmide($48(3+\sqrt{13})\ cm^2$)

3 Numa pirâmide regular de base triangular, a aresta da base mede $2\sqrt{3}$ cm e a altura mede 4 cm. Calcule:

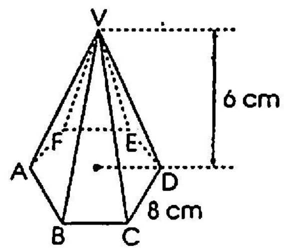
a) o apótema da base($1\ cm$) b) o apótema da pirâmide($\sqrt{17}\ cm$)

c) a aresta lateral($2\sqrt{5}\ cm$) d) a área lateral ($3\sqrt{51}\ cm^2$)

e) a área total da pirâmide. ($(3\sqrt{51}+\sqrt{3})\ cm^2$)

4 Numa pirâmide regular de base quadrangular, a medida do perímetro da base é 40 cm. Sabendo que a altura da pirâmide é 12 cm, calcule a área lateral dessa pirâmide($260\ cm^2$)

5 Considere a pirâmide hexagonal regular indicada na figura ao lado.



Calcule:

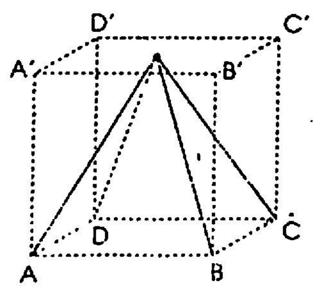
a) o apótema da base($4\sqrt{3}\ cm$)

b) o apótema da pirâmide($2\sqrt{21}\ cm$)

c) a aresta lateral.($10\ cm$)

d) a área total da pirâmide($48(2\sqrt{3}+\sqrt{21})\ cm^2$)

6 A figura ao lado nos mostra um cubo de aresta igual a 2 cm. Tomando-se como base o quadrado ABCD e como vértice o ponto V (centro da face A'B'C'D' do cubo), obtém-se uma pirâmide. Qual é a área total dessa pirâmide?($4(1+\sqrt{5})\ cm^2$)



7. A base de uma pirâmide de 5 cm de altura é um quadrado de $\sqrt{3}$ cm de lado. Calcule o volume da pirâmide($5\ cm^3$)

8. Numa pirâmide de base quadrada, a altura mede 8 cm e o volume é 200 cm³. Calcule a medida ℓ' da aresta da base($5\sqrt{3}\ cm$)

9. A área lateral de uma pirâmide regular hexagonal é 72 cm². Sabendo que a aresta da base mede ℓ' = 4 cm, calcule o volume da pirâmide.($48\sqrt{2}\ cm^3$)

10. Ache o volume de uma pirâmide hexagonal regular, sabendo que o perímetro da base mede $24\sqrt{3}$ cm e o apótema da pirâmide mede 10 cm.($192\sqrt{3}\ cm^3$)

11. Calcule a altura de uma pirâmide regular cuja medida do apótema da base é 3 cm e a medida do apótema da pirâmide 5 cm. $4\ cm^2$

12. Numa pirâmide quadrangular regular a altura mede 12 cm e o apótema da pirâmide 13 cm. Calcule a sua área total. $360\ cm^2$

13. Sendo o perímetro da base de uma pirâmide pentagonal regular igual a 30 m e o apótema da pirâmide 4 m, calcule sua área lateral. $60\ m^2$

14. Sendo a aresta lateral de uma pirâmide regular medindo 15 cm e a aresta da base 18 cm, o apótema da pirâmide mede: $12\ cm$

15. O apótema de uma pirâmide triangular regular e a aresta da base medem 6 m. Calcule sua área total. $9(\sqrt{3}+6)\ m$

16. Em uma pirâmide quadrangular regular o apótema é 5 cm e a aresta da base, 6 cm. Qual a área total da pirâmide? $96\ cm^2$

17. Calcule o volume de uma pirâmide cuja base tem por área 20 m² e a altura é igual a 6 m. $40\ m^3$

18. Calcule o volume de uma pirâmide triangular regular cuja aresta da base mede 3 m e a altura da pirâmide $4\sqrt{3}$ m. $9\ m^3$

19. Qual é a medida da altura de uma pirâmide hexagonal regular de aresta de base igual a 2 cm e de volume igual a $10\sqrt{3}$ cm³? $5\ cm$

20. Calcule a área total de uma pirâmide quadrangular regular de base igual a 36 m² e de volume igual a 48 m³. $96\ m^2$

NOME:________________________ Nº____ TURMA:_____ DATA:__/10/04

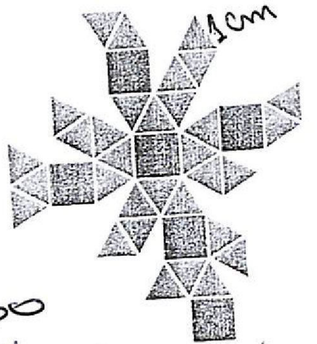
GEOMETRIA ESPACIAL

Dados os sólidos geométricos planificados abaixo, determine o que se pede:

a) Número de faces, arestas e vértices de cada sólido ($V+F=A+2$)

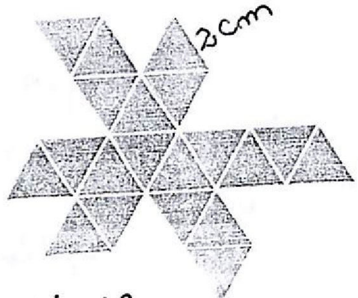
b) Área total do sólido planificado, de acordo com as medidas dos lados.

a)



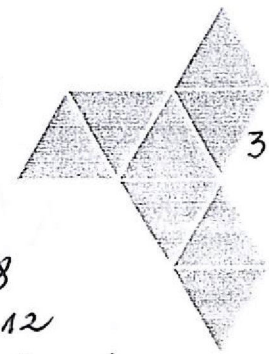
A = 60
V = 24
F = 38
$A_T = 19,84 cm^2$

b)



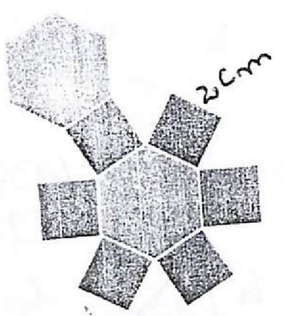
V = 12
F = 20
A = 30
$A_T = 20\sqrt{3} cm^2$ ou
$A_T = 34,6 cm^2$

c)



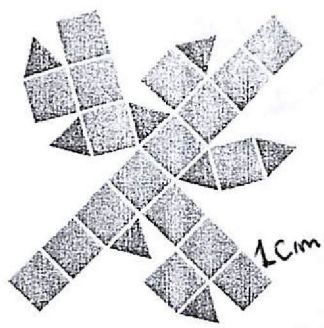
F = 8
A = 12
V = 6
$A = 18\sqrt{3} cm^2$ ou
$A_T = 31,14 cm^2$

d)



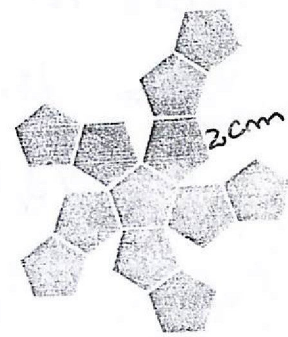
V = 12
A = 18
F = 8
$A_T = 44,4 cm^2$

e)



V = 24 $A_T = 21,46 cm^2$
F = 26
A = 48

f)



verso →

$A_\Delta = 0,72$

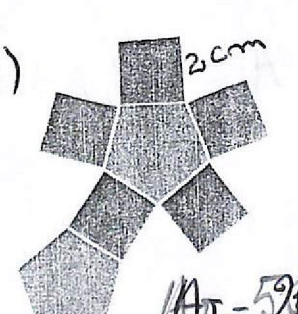
V = 20
F = 12
A = 30
$A_T = 43,56 cm^2$

A = ~~1,54~~ 3,63 cm

A_T = ~~18,88~~ cm

43,56

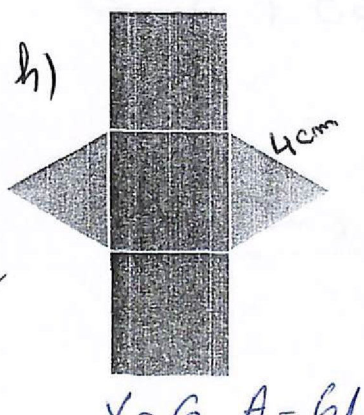
g)



$A_T = 27,26 cm^2$
V = 10
F = 7
A = 15

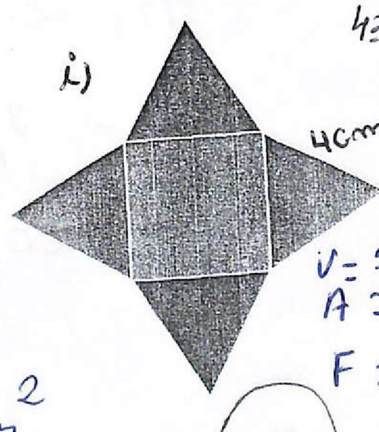
verso ↓

h)



V = 6 $A = 61,85 cm^2$
F = 5
A = 9

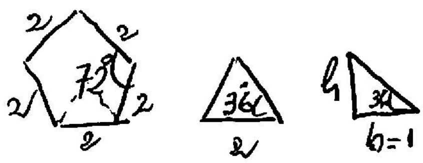
i)



V = 5
A = 8
F = 5

$A_T = 43,71 cm^2$

1)



$tg\,36° = 0{,}726$

$tg\,36° = \frac{h}{1}$

$0{,}726 = \frac{h}{1}$

$1 \cdot 0{,}726 = h$

$h = 0{,}726$

$A_T = 12 \cdot \underbrace{\text{área } ⬠}$

$A_T = 12 \cdot 5 \cdot \underbrace{A \cdot \triangle}$

$A_T = 12 \cdot 5 \cdot \frac{b \cdot h}{2}$

$A_T = 12 \cdot 5 \cdot \frac{\cancel{2} \cdot 0{,}726}{\cancel{2}}$

$A_T = 43{,}56\,cm$

$tg\,36° = \frac{h}{1}$

$0{,}726 = \frac{h}{1}$

$h = 0{,}726$

2) $A_T = 2 \cdot \underbrace{A\,⬠} + 5 \cdot \underbrace{A\,\square}$

$A_T = 2 \cdot 3{,}63 + 5 \cdot 2^2$

$A_T = 7{,}26 + 20$

$\boxed{A_T = 20{,}26\,cm^2}$

$A\,⬠ = 5 \cdot \frac{b \cdot h}{2}$

$A = 5 \cdot \frac{\cancel{2} \cdot 0{,}726}{\cancel{2}}$

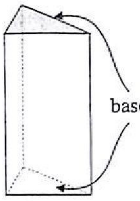
$A = 3{,}63\,cm$.

PRISMAS

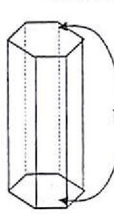
Definição: prismas são poliedros convexos que têm duas faces paralelas e congruentes (chamadas bases) e as demais em forma de paralelogramos (chamadas faces laterais).

Exemplos:

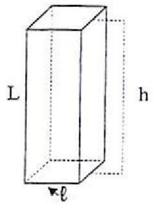
Prisma triangular



Prisma hexagonal

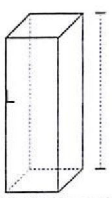


- ***Elementos***



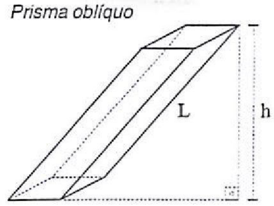
ℓ: aresta da base (lados do polígono da base)
h: altura (distância entre os planos que contêm as bases)
L: aresta lateral (segmento de reta que une os vértices correspondentes das bases)

Prisma reto



Arestas laterais perpendiculares aos planos das bases.

Prisma oblíquo



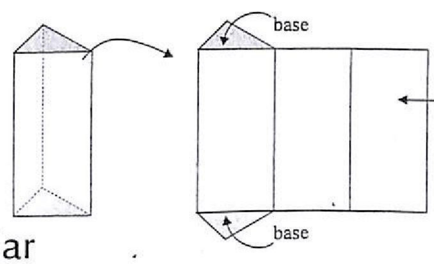
Arestas laterais oblíquas aos planos das bases.

- ***Superfícies***

Superfície lateral: é a reunião das faces laterais.
Notação: S_ℓ ou A_ℓ

Superfície total: é a reunião das faces laterais com as duas bases.
Notação: S_T ou A_T

Planificação:

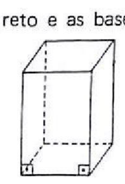


Prisma regular

Um prisma é regular quando é prisma reto e as bases são polígonos regulares.

1) A altura e as arestas laterais são congruentes.

2) As faces laterais são retângulos.



Paralelepípedos

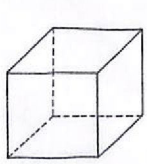
Paralelepípedo é um prisma cujas bases são paralelogramos. Note que as faces também são paralelogramos.

a) Paralelepípedo retângulo ou ortoedro

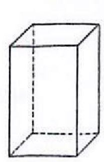
É um prisma reto cujas bases são retângulos.

É um paralelepípedo retângulo de arestas congruentes. Suas 6 faces são quadrados congruentes. Observe que o cubo é o hexaedro regular.

Cubo



Ortoedro

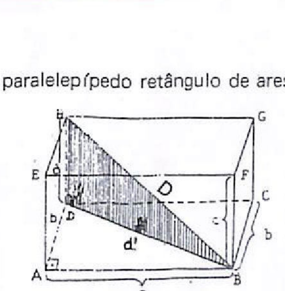


b) Diagonal

Veja a medida da diagonal de um paralelepípedo retângulo de arestas que medem **a, b e c.**

$$\boxed{D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

, $d^2 = a^2 + b^2$,



$$\boxed{A_t = 2(ab + ac + bc)}$$

Cubo ou Hexaedro Regular:

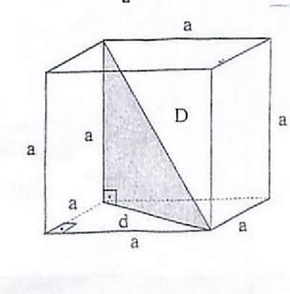
No caso particular do cubo, temos:

$a = b = c \Rightarrow \boxed{D = a\sqrt{3}}$

área total.

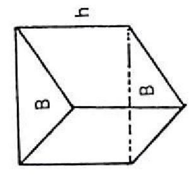
$d = a\sqrt{2}$,

$$\boxed{A_t = 6a^2}$$



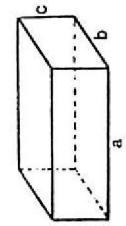
VOLUME

A medida do volume de um prisma é o produto da medida da área da base pela medida da altura.



$$\boxed{V = B \cdot h}$$

No paralelepípedo retângulo, temos:



$V = B \cdot h$

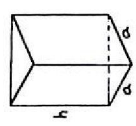
$$\boxed{V = a \cdot b \cdot c}$$

No cubo, temos:

$$\boxed{V = a^3}$$

prisma

área total do prisma reto de altura **h** e cuja base é um triângulo eqüilátero de aresta de base igual a a.



a) Área lateral

São 3 retângulos de base a e altura h:

$A_\ell = 3ah$

b) Área das bases

A área de um triângulo eqüilátero de lado a é:

$$A_\Delta = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

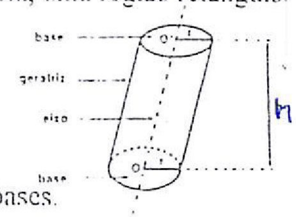
c) Área total

$A_t = A_\ell + 2A_b$

Cilindros

1)Definição:É o sólido obtido quando giramos, em torno de uma reta, uma região retangular

2)Elementos:



a) BASES: Os círculos de centros O e O' e de raio r.

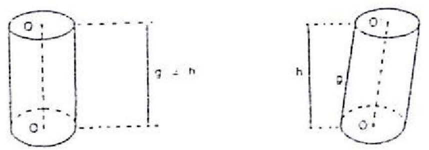
b) EIXO: A reta OO', que contém os centros das bases.

c) GERATRIZ: Os segmentos com as extremidades nos pontos das circunferências das bases e que são paralelos a OO'.

d) ALTURA : A distância entre os planos onde estão situadas as bases.

3)Classificação:A)Cilindro OBLÍQUO: É aquele cujas geratrizes são oblíquas às bases.

B)Cilindro RETO :É aquele cujas geratrizes são perpendiculares às bases.



Cilindro circular reto:

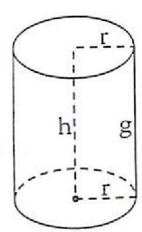
$Ab = \pi r^2$

$A_L = 2\pi rh$

$A_T = 2\pi r (r + h)$

$V = \pi r^2 h$

h = g



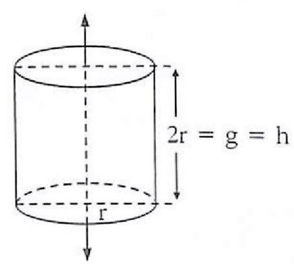
Cilindro eqüilátero:

Um cilindro é equilátero quando a altura é igual ao dobro do raio das bases. $Ab = \pi r^2$

$A_L = 4\pi r^2$

$A_T = 6\pi r^2$

$V = 2\pi r^3$



Exercícios Propostos

1)Dado um cilindro reto de altura igual a 10 cm e raio da base 4 cm,calcule:

a) a área da base b)a área lateral c) a área total

2)Determine área total e o volume de um cilindro reto de altura 3 m e diâmetro da base 2 m

3)Calcule a área da base, a área lateral ,a área total e o volume de um cilindro equilátero (h=2r) cujo raio da base é igual a 5 dm.

4)Se a área da base de um cilindro reto é 36Π cm², calcule o raio da base desse cilindro.

5)Um cilindro equilátero tem área da base 25Π cm². Calcule o seu volume.

6). Calcule a área da base, a área lateral, a área total e o volume de um cilindro eqüilátero (h = 2r) cujo raio da base é igual a 6 cm

7) Determine a área total e o volume de um cilindro reto de altura 6 m e diâmetro da base 4 m

8) Dado um cilindro reto de altura 8 cm e raio da base 4 cm, calcule a área da base, a área lateral, a área total e o volume desse cilindro.

9) Calcule o volume de um cilindro de altura 8 cm e cuja área lateral é igual a 48π cm².

10) Calcule o volume de um cilindro eqüilátero cuja área da base é 36π cm².

6) $Ab = 36\pi\ cm^2$
$Al = 144\pi\ cm^2$
$At = 216\pi\ cm^2$
$V = 432\pi\ cm^3$

7) $At = 32\pi\ cm^2$
$V = 24\pi\ cm^2$

11) Se um cilindro eqüilátero tem volume $V = 54\pi\ dm^3$, dê o valor de:
a) medida do raio da base $r = 3\ dm$
b) altura $h = 6\ dm$
c) área total $A_T = 54\pi\ dm^2$

12) O raio da base de um cilindro eqüilátero mede 6 cm. Determine:
a) altura $h = 12\ cm$
b) área total $A_T = 216\pi\ cm^2$
c) volume $V = 432\ cm^3$

13) A altura *h* de um cilindro reto é 6 m e o raio *r* da base mede 2 m. Determine:
a) área da base $Ab = 4\pi\ m^2$
b) área lateral $Al = 24\pi\ m^2$
c) área total $A_T = 32\pi\ m^2$
d) volume $V = 24\pi\ m^3$

14) O raio da base de um cilindro reto mede 3 cm e a altura, 9 cm. Determine:
a) área total $A_T = 72\pi\ cm^2$ b) volume $V = 81\pi\ cm^3$

Respostas

1) a) $16\pi\ cm^2$
b) $80\pi\ cm^2$
c) $112\pi\ cm^2$

2) $A_T = 8\pi\ m^2$
$V = 3\pi\ m^3$

3) $Ab = 25\pi\ dm^2$
$Al = 100\pi\ dm^2$
$AT = 150\pi\ dm^2$
$V = 250\pi\ dm^3$

4) $r = 6\ cm$

5) $250\pi\ cm^3$

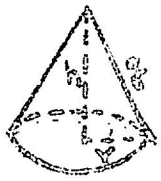
8) $Ab = 16\pi\ cm^2$
$Al = 64\pi\ cm^2$
$At = 96\pi\ cm^2$
$V = 128\pi\ cm^3$

9) $V = 72\pi\ cm^3$

10) $V = 432\ cm^3$

CONE

Cone circular reto ou de revolução é um cone cuja base é um círculo e o pé da altura está no centro da base.



Elementos:

g - geratriz

h - altura

r - raio

Área lateral:

$A_L = p \cdot g = \pi r g$

Área Total:

$A_T = A_L + A_b = \pi r g + \pi r^2$

Volume:

$V = \frac{A_b h}{3} = \frac{\pi r^2 h}{3}$

Observações:

* A geratriz (g), a altura (h) e o raio (r) de um cone formam um triângulo retângulo, logo, $g^2 = h^2 + r^2$
* A secção meridiana de um cone é um triângulo.
* No cone equilátero $g = 2r$
* A secção meridiana de um cone equilátero é um triângulo equilátero.

Exercícios

1. Calcular A_L, A_T e V de um cone de revolução onde a geratriz mede 6 cm e o raio da base, 4 cm.

2. Calcula a A_L, A_T e o V de um cone circular reto, que tem:

a) $r = 3$ cm e $h = 5$ cm.

b) $h = 5$ cm e $r = 6$ cm

c) $r = 2x$ e $g = 3x$

3. Qual a área da secção meridiana de um cone de revolução cuja altura é 12 cm e o raio da base 5 cm?

4. A altura de um cone de revolução é 8 cm. A área da sua base é $36\pi cm^2$. Qual sua área total.

5. Um cone equilátero tem raio igual a 2 m. Calcula A_L, A_T, V e a área da sua secção meridiana

Respostas:

1. $A_L = 24\pi cm^2$
$A_T = 40\pi cm^2$
$V = \frac{32\sqrt{5}}{3}\pi cm^3$

2. a) $A_L = 3\sqrt{34}\pi cm^2$; $A_T = (3\pi\sqrt{34} + 9\pi) cm^2$
$V = 15\pi cm^3$
b) $A_L = 6\pi\sqrt{61} cm^2$; $V = 60\pi cm^3$
c) $A_L = 6\pi x^2$; $A_T = 10\pi x^2$; $V = \frac{4\pi\sqrt{5}}{3}x^3$

3. $A = 60 cm^2$

4. $A_T = 96\pi$

5. $A_L = 8\pi m^2$
$A_T = 12\pi m^2$
$V = \frac{8\pi\sqrt{3}}{3}$
$A = 4\sqrt{3}$

Cone [illegible]

É um [illegible]
[illegible]

[illegible]

Superfície lateral

$\boxed{A_L = \pi r g}$

Superfície Total

$A_T = A_L + A_b$

$\boxed{A_T = \pi r g + \pi r^2}$

Volume $V = \frac{A_b \cdot h}{3} \Rightarrow \boxed{V = \frac{\pi r^2 h}{3}}$

Obs: • o perímetro da base de um cone é igual a $2\pi r$

• a superfície da base de um cone é igual a πr^2

• a geratriz (g), a altura (h) e o raio (r) de um cone formam um triângulo retângulo, onde $g^2 = h^2 + r^2$

• a secção meridiana de um cone é um triângulo

$A_{sm} = r h$

• No cone equilátero $g = 2r$

• a secção meridiana de um cone equilátero é um triângulo equilátero.

$h = r\sqrt{3}$ $A_{sm} = r^2\sqrt{3}$

Exercícios.

1. Calcula a área lateral de um cone de revolução onde a geratriz mede 6 cm e o raio da base 4 cm. ([illegible])

2. Qual o volume de um cone onde o raio é 3 cm e a altura [illegible] cm? ([illegible])

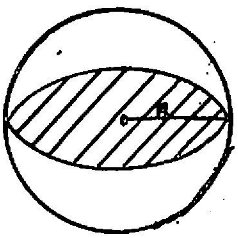
3. Calcula a área lateral e total de um cone [illegible] geratriz mede 8 cm e o raio da base [illegible] cm. ([illegible])

4. [illegible]

E S F E R A

SUPERFÍCIE ESFÉRICA: É uma superfície gerada pela rotação completa de uma semi-circunferência em torno de seu diâmetro.

ESFERA: É um sólido limitado por uma superfície esférica.



ELEMENTO:

R - raio

SUPERFÍCIE ESFÉRICA

$$S = 4\pi R^2$$

VOLUME

$$V = \frac{4\pi R^3}{3}$$

CÍRCULO MÁXIMO: É o círculo cujo raio é igual ao raio da esfera.

EXERCÍCIOS:

1) Calcular a área e o volume de uma esfera de raio igual a:

(a) 2m
(b) 3m
(c) 6m

2) A área de uma esfera é 64π. Qual o valor do seu raio?

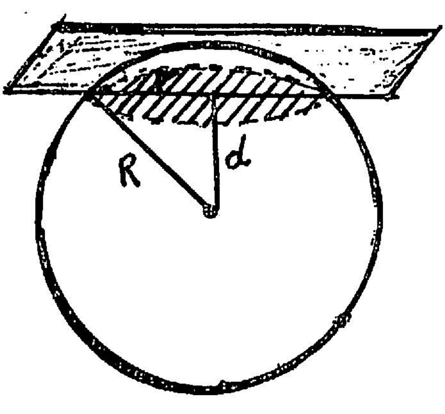
3) A área de uma esfera é πm^2 Qual o valor do seu raio e do seu volume?

4) O volume de uma esfera é 36π. Qual sua área?

5) Qual a superfície de uma esfera cujo raio é $2r$?

6) A área do círculo máximo de uma esfera é 4π. Qual seu volume?

7) Dobrando-se o raio de uma esfera seu volume ficará quantas vezes maior?

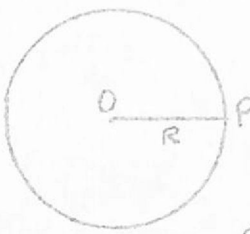


$$\boxed{R^2 = d^2 + r^2}$$

ESFERA

1. Conceito: Consideremos um ponto O [illegible] de medida R. O sólido formado pe[illegible] tos P do espaço cuja distância OP [illegible] a R, chama-se esfera.

Na figura temos:



ponto O → centro da esfera

R → raio da esfera

O conjunto dos pontos P do espaço tais que a distância OP é igual a R chama-se superfície da esfera de centro O e raio R.

2. Área da superfície esférica → $\boxed{A = 4\pi R^2}$

3. Volume da esfera → $\boxed{V = \frac{4}{3}\pi R^3}$

EXERCÍCIOS

1. Calcula a área da superfície esférica e o volume da esfera de raio 3 cm.
2. A área de uma superfície esférica é 8π cm². Calcula o seu R.
3. Qual é a razão entre a área total de um cubo e a área de uma superfície esférica, sabendo que a aresta do cubo e o raio da esfera tem a mesma medida a?
4. O volume de uma esfera é $\frac{500\pi}{3}$ cm³. Calcula o raio da esfera.
5. Uma esfera está inscrita num cubo de aresta 4 cm. Calcula a área da superfície esférica.
6. O raio de uma esfera é $\sqrt[3]{\pi}$ cm. Calcula o volume da esfera.
7. A área de uma superfície esférica é 8π cm². Calcula o volume.

Respostas:

1) 36π cm²
2) $\sqrt{2}$ cm
3) $\frac{3}{2\pi}$
4) 5 cm
5) 16π cm²
6) $\frac{4\pi^2}{3}$ cm³
7) $\frac{8\pi\sqrt{2}}{3}$