OPERAÇÕES COM MATRIZES

1. Adição

Dadas as matrizes A e B, de mesma ordem, a matriz C é dita matriz soma de A e B se, e somente se $a_{ij} + b_{ij} = c_{ij}, \forall i, \forall j$.

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad A + B =$$

2. Subtração

Dadas as matrizes A e B, de mesma ordem, a matriz D é dita madriz diferença entre A e B se, e somente se $a_{ij} - b_{ij} = c_{ij}, \forall i, \forall j$

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad A - B =$$

Exercícios

1. Considera as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 7 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ 10 & -5 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$

calcula:

a) $A + B$ $\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ -1 & 11 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}$ b) $A + C$ $\begin{pmatrix} -1 & 10 \\ 10 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ c) $A + B + C$ $\begin{pmatrix} -3 & 16 \\ 9 & 6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ d) $A - C$ $\begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -10 & 9 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$

2. Calcula os valores de x, y e z nas matrizes:

$A = \begin{pmatrix} x & -\frac{1}{2} \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -5 & y \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ z & 3 \end{pmatrix}$ de modo que

$B + C = A$. $x = -3$ $y = -\frac{9}{2}$ $z = 7$

3. Considera as matrizes $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 3 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$

calcula:

a) $A - B$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$ b) $A - C$ $\begin{pmatrix} -8 & 2 \\ 1 & 2 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$ c) $(A - B) - C$ $\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -1 \\ -13 & 5 \end{pmatrix}$

4. Calcula o valor de x nas matrizes:

$A = \begin{pmatrix} -9 \\ 2x^2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ x^2 - 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} -12 \\ 4x \\ 2 \end{pmatrix}$ de modo que $A - B = C$

$\begin{pmatrix} -12 \\ x^2 + 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 4x \\ 2 \end{pmatrix}$ $x = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$

5. Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{2\times3}$, sendo $a_{ij} = 2i - j$

$B = (b_{ij})_{2\times3}$, sendo $b_{ij} = i - j$

calcula $A - B$.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $A - B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$BA = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}$

$AB = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

$= B \cdot A . x = 0$

$= 3i + 4j$ e $b_{ij} = -4i - 3j$.

utem. $a = 2$ e $b = 0$

2ª) Se existir a inversa, dizemos que a matriz A é **inversível** e, em caso contrário, **não inversível** ou **singular**.

3ª) Se a matriz quadrada A é inversível, a sua inversa é única.

Exemplo: Determinar a inversa da matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.

Resolução: Fazemos $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Sabemos que $A \cdot A^{-1} = I_2$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a+4c & 2b+4d \\ a+5c & b+5d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pela igualdade de matrizes, temos os sistemas:

$$(1)\begin{cases} 2a + 4c = 1 \\ a + 5c = 0 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{5}{6} \text{ e } c = -\frac{1}{6}$$

$$(2)\begin{cases} 2b + 4d = 0 \\ b + 5d = 1 \end{cases} \Rightarrow b = -\frac{2}{3} \text{ e } d = \frac{1}{3}$$

Resposta: $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

Exercícios propostos

1 Determine a inversa das matrizes:

a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$

2 Mostre que a inversa da matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ é $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3 Mostre que a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ não é inversível.

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO GEN FLORES DA CUNHA
MATEMÁTICA - 3ª SÉRIE

NOME : .... Nº : .... TURMA : ....

1. Se $a = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}$ e $b = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, calcula $2a^2 - b^2$. $2.(-4)^2 - (-7)^2 = 32 - 49 = -17$

1,0

$a = -4$ $b = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -1 - 8 - (-2) = -9 + 2 = -7$

2. Determina o valor de x $\begin{vmatrix} 2x & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & x-1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & x+1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{matrix}$

2,0

$6x - 3 = 3(x+1) + 2(x-1) - (1 + 4(x+1))$

$6x - 3 = 3x + 3 + 2x - 2 - 1 - 4x - 4$

$6x - 3 = x - 4 \Rightarrow 5x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{5}$

3. Resolve a inequação $\begin{vmatrix} 2 & x & 0 \\ 0 & x & x \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix} < 0$

2,0

$\begin{vmatrix} 2 & x & 0 & 2 & x \\ 0 & x & x & 0 & x \\ 0 & 1 & x & 0 & 1 \end{vmatrix} < 0$ $2x^2 - 2x = 0$ $x = 0$

$x^2 - x = 0$ $x = 1$ $f(x) < 0 \Rightarrow 0 < x < 1$

$x(x-1) = 0$

4. Se A é uma matriz de ordem 2 e det A = 6, calcula det 3. A .

1,0

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 6$ $a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21} = 6$ $3a_{11}.a_{22} - 3a_{12}.a_{21} = 3(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 3.6 =$

$= 18$

5. Calcula a em $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 2a & 3a \\ a^2 & 4a^2 & 9a^2 \end{vmatrix} = 16$ $18a^3 + 3a^3 + 4a^3 - (2a^3 + 12a^3 + 9a^3) = 16$

$25a^3 - 23a^3 = 16$

$2a^3 = 16 \Rightarrow a^3 = 8 \Rightarrow a = 2$

1,0

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & 2a & 3a & a & 2a \\ a^2 & 4a^2 & 9a^2 & a^2 & 4a^2 \end{vmatrix} = 16$

6. Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 3 & x \\ y & 4 \end{pmatrix}$ se AB = BA, calcula 2x - y

2,0

$\begin{matrix} & 3 & \cancel{x} \\ & y & 4 \\ -1 & 4 & -3+4y & -x+16 \\ 2 & -2 & 6-2y & 2x-8 \end{matrix}$ $\begin{matrix} & & -1 & 4 \\ & & 2 & -2 \\ 3 & x & -3+2x & 12-2x \\ y & 4 & -y+8 & 4y-8 \end{matrix}$

$\cancel{-3} + 4y = \cancel{-3} + 2x$ $-x + 16 = 12 - 2x$

$y = \frac{2x}{4} \Rightarrow y = \frac{x}{2}$ $x = 12 - 16$

$x = -4$

$y = -\frac{4}{2} = -2$

7. Resolve a equação $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 & 1 \\ x & x^2 & 0 & x & x^2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$

1,0

$10x - 5x^2 = 0$

$5x^2 - 10x = 0$

$x^2 - 2x = 0$ $x = 0$ ou $x = 2$

OPERAÇÕES COM MATRIZES TURMA: 211

exercícios

1. Calcule as somas das seguintes matrizes:

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} =$

b) $\begin{pmatrix} 10 & 5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -3 & 7 \end{pmatrix} =$

2. Calcule a soma A + B, sendo dados:

$A = [3 \quad 1 \quad 4] \qquad B = [0 \quad 3 \quad -1]$

3. Calcule a seguinte soma:

$\begin{pmatrix} 4 & 7 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 6 & 4 & 3 \end{pmatrix} =$

4. Calcule *a, b* e *c* em:

$\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

5. Resolva a seguinte equação matricial:

$X + \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 7 & 0 \\ 9 & 4 & -2 \end{bmatrix}$

6. Calcule:

a) $\begin{bmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 5 & -1 \\ 4 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

7. Para que valores de *x, y* e *z* temos:

$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ x & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & z \\ \text{[illegible]} & -1 \end{bmatrix}$

8. Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, calcule:

a) A + B b) A − B c) B − A

9. Calcule **x, y** e **z** tal que

$\begin{bmatrix} 2x & z \\ x - y & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2z \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$.

10. Sendo $A = (a_{ij})_{3 \times 2}$, com $a_{ij} = 2i - j$, e $B = (b_{ij})_{3 \times 2}$, com $b_{ij} = i^2 + j$, calcule:

a) A − B b) B − A

11. Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 7 \end{bmatrix}$, determine o valor de:

a) $A^t + B^t$ b) $(A + B)^t$

12. Calcule:

$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 6 \end{bmatrix} =$

13. Ache *x* e *y* em:

$3 \cdot \begin{bmatrix} x & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & y \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

14. Sendo $A = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$, encontre 3A + B − 2C:

15. Calcule:

$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 6 \end{bmatrix} =$

16. Ache *x* e *y* em:

$3 \cdot \begin{bmatrix} x & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & y \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

17. Resolva a equação matricial X + A = 5B + 2C, sendo dados:

$A = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 10 & 21 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$