Encontro.

ESTADO DO RIO GRANDE DO SUL
SECRETARIA DE ESTADO DOS NEGÓCIOS DA EDUCAÇÃO E CULTURA
CENTRO DE PESQUISAS E ORIENTAÇÃO EDUCACIONAIS
E DE EXECUÇÃO ESPECIALIZADA
DIVISÃO DE ORIENTAÇÃO - SERVIÇO DE ENSINO
EQUIPE DE MATEMÁTICA - ENCONTRO DE MATEMÁTICA - 1969

CAPÍTULO II

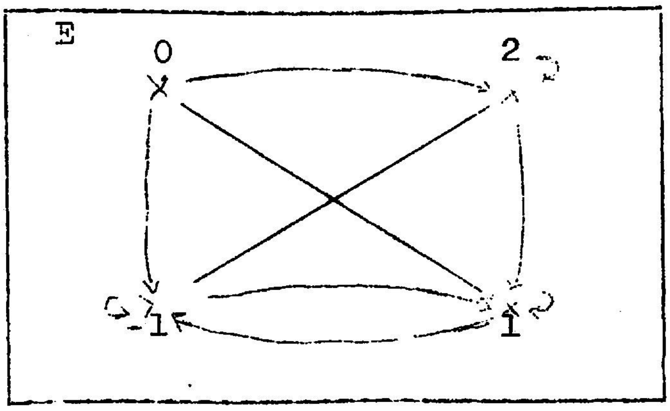
RELAÇÕES BINÁRIAS

2.1. Relação binária em um conjunto

2.11. Em $E = \{-1, 0, 1, 2\}$, consideremos a relação de divisibilidade. Existem certos pares ordenados $(x; y)$ para os quais x é divisível por y. Êstes pares ordenados formam um subconjunto S de $E \times E$.

$$\begin{array}{lcl}
2 \text{ é divisível por } 1 & \Leftrightarrow & (2; 1) \in S \\
0 \text{ é divisível por } 2 & \Leftrightarrow & (0; 2) \in S \\
-1 \text{ é divisível por } 1 & \Leftrightarrow & (-1; 1) \in S \\
1 \text{ é divisível por } 1 & \Leftrightarrow & (1; -1) \in S \\
1 \text{ não é divisível por } 2 & \Leftrightarrow & (1; 2) \notin S \\
0 \text{ não é divisível por } 0 & \Leftrightarrow & (0; 0) \notin S.
\end{array}$$

Sôbre um diagrama de E, desenhemos uma flecha de x a y, quando x fôr divisível por y. Obtemos assim uma representação gráfica da relação.



2.I - fig. I

Constata-se imediatamente que: de 0 parte uma flecha em direção a cada outro número; 0 é divisível por todos os outros elementos de E.

Cada elemento não nulo está ligado a si mesmo por uma flecha; todo número não nulo é divisível por si mesmo.

$$\forall x, \quad x \in \complement_E \{0\} \quad (x; x) \in S.$$

Os números 1 e -1 são atingidos por uma flecha proveniente da cada elemento de E: 1 e -1 são divisores de cada elemento de E.

$$\forall y\ (y; 1) \in S \text{ e } \forall y\ (y; -1) \in S.$$

	-1	0	1	2
-1	x		x	
0	x		x	x
1	x		x	
2	x		x	x

No quadro de dupla entrada de E x E, assinalemos com uma cruz o lugar dos ele - mentos de S.

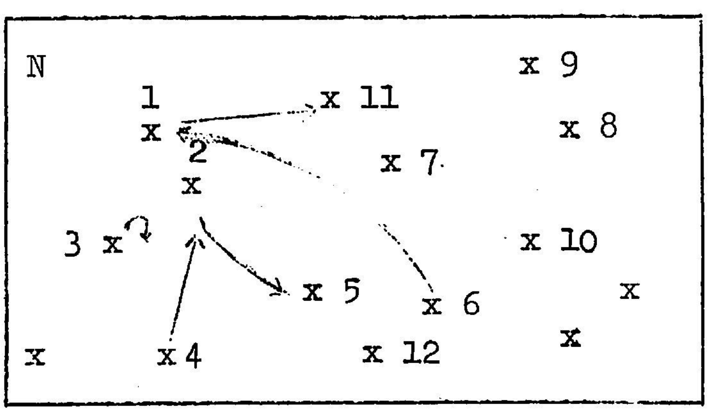
Para cada par ordenado (x; y) E x E, temos a alternativa

x é divisível por y e $(x; y) \in S$
x não é divisível por y e $(x; y) \notin S$.

Diz-se que "x é divisível por y" é uma relação **binária** em E, porque ela está definida em pares ordenados de elementos de E.

2.12. Consideremos, em N, a relação

$$x \mathcal{R} y \iff x\,(y + 1) = 12.$$

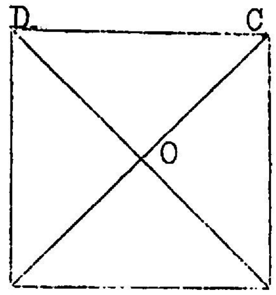


2.I - fig. 2

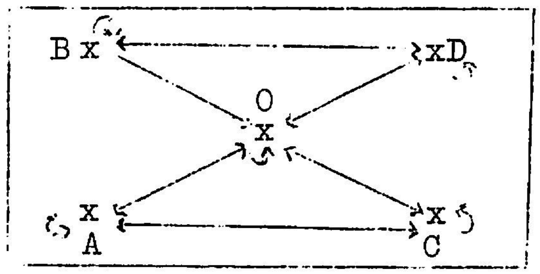
Os pares ordenados (1; 11), (2; 5), (3; 3), (4; 2), (5; 1) satisfazem a esta relação e formam um subconjunto S de N x N.

2.13. Seja um quadrado ABCD de centro O. No conjunto dos pontos de $E = \{A, B, C, D, O\}$, consideremos a relação

$$M \mathcal{R} N \iff M \text{ está sôbre a mesma diagonal que } N.$$



2.I
fig. 3



2.I - fig. 4

No quadro de E x E, assinalemos com uma cruz os elementos de S = { (M; N); M está sôbre a mesma diagonal que N } .

E x E	A	B	C	D	O
A	x		x		x
B		x		x	x
C	x		x		x
D		x		x	x
O	x	x	x	x	x

Cada elemento de E está em relação com êle mesmo; encontramos um laço em redor de cada elemento; tôdas as casas da diagonal principal (partindo do alto, à esquerda) estão marcadas com uma cruz.

Se um elemento M está sôbre a mesma diagonal que N, N também está sôbre a mesma diagonal que M. Na representação gráfica, êste fato é indicado pelas duplas flechas; na tabela de E x E, as cruzes estão dispostas simètricamente em relação à diagonal principal.

2.14. De um modo geral, indica-se por

x R y

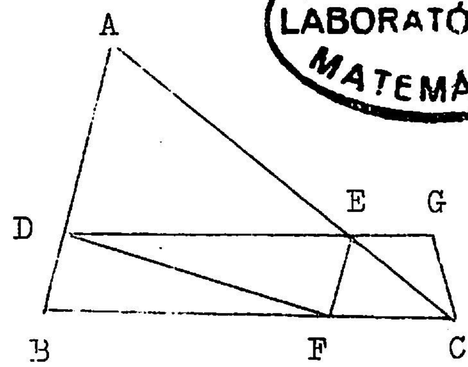
uma relação binária entre um elemento x e um elemento y no conjunto E.

2.15. <u>Definição</u>. Chama-se gráfico de uma relação binária R definida no conjunto E, o subconjunto S dos pares ordenados que satisfazem a esta relação.

2.2. Relações de equivalência

2.21. A figura abaixo compreende seis triângulos:

o triângulo a de vértices A, D, E
o triângulo b de vértices A, B, C
o triângulo c de vértices D, E, F
o triângulo d de vértices C, E, G
o triângulo e de vértices C, E, F
o triângulo f de vértices B, D, F

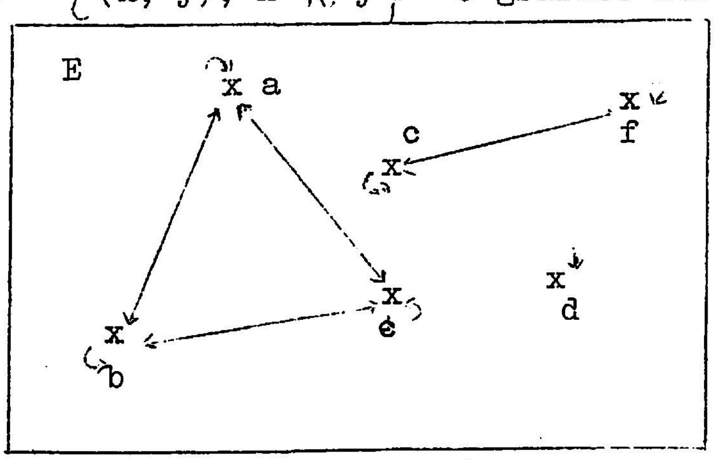


2.2 - fig. 5

No conjunto $E = \{a, b, c, d, e, f\}$, consideremos a relação de semelhança.

$$x \mathcal{R} y \Longleftrightarrow \text{o triângulo } x \text{ é semelhante ao triângulo } y.$$

Seja $S = \{(x; y);\ x \mathcal{R} y\}$ o gráfico desta relação.



2.2 - fig. 6

O exame desta representação gráfica conduz às seguintes observações:

1. Cada elemento de E está ligado a si mesmo por um laço. Portanto, cada elemento está em relação com si mesmo.

Diz-se que a relação é reflexiva.

$$\forall x \quad x \mathcal{R} x \quad \text{ou} \quad \forall x \quad (x\ ;\ x) \in S.$$

2. Se uma flecha liga x a y, existe uma outra flecha que liga y a x.

A relação é simétrica.

Se $x \mathcal{R} y$, temos $y \mathcal{R} x$ ou $(x; y) \in S \Longrightarrow (y; x) \in S$.

3. Se uma flecha liga x a y e se uma flecha liga y a z, existe, também, uma flecha de x a z.

Se $\left.\begin{array}{c} x \mathrel{R} y \\ e \\ y \mathrel{R} z \end{array}\right\}$ temos $x \mathrel{R} z$ ou $\left.\begin{array}{c} (x;\ y) \in S \\ e \\ (y;\ z) \in S \end{array}\right\} \Rightarrow (x;z) \in S.$

A relação é transitiva.

2.22. Consideremos um conjunto E de seis retângulos. Cada retângulo é caracterizado pelo seu comprimento C e sua largura l.

a:	C = 9 cm	l = 4 cm	Área S = 36 cm^2
b:	C = 6 cm	l = 6 cm	S = 36 cm^2
c:	C = 8 cm	l = 6 cm	S = 48 cm^2
d:	C = 8 cm	l = 4 cm	S = 32 cm^2
e:	C = 8 cm	l = 4,5 cm	S = 36 cm^2
f:	C = 12 cm	l = 4 cm	S = 48 cm^2.

Em E, consideremos a relação "ter a mesma área"

$$x \mathrel{R} y \Longleftrightarrow x \text{ tem a mesma área que } y.$$

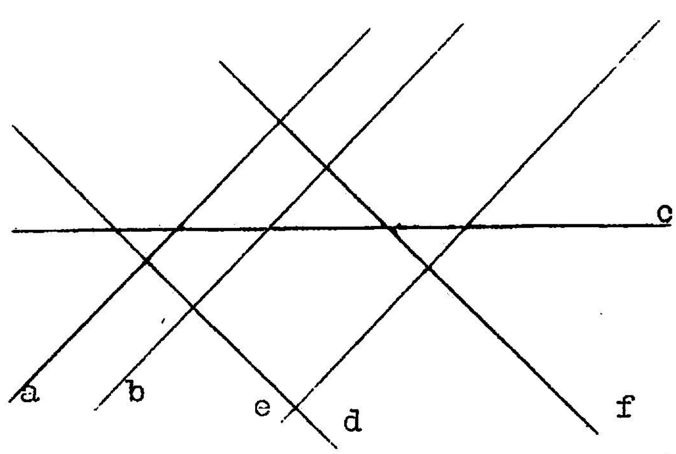
Êste segundo exemplo foi escolhido para que a representação gráfica desta relação seja a mesma que a da figura 6.
A igualdade das áreas no conjunto considerado é também uma relação reflexiva, simétrica e transitiva.

2.23. Seja $E = \{a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f\}$ o conjunto das retas da figura abaixo. Consideremos em E a relação do paralelismo. Dizemos que x é paralela a y se x tiver a mesma direção que y.
1. Cada reta $x \in E$ tem a mesma direção que ela mesma.

$$\forall x \qquad x \parallel x$$

2. Se a reta x é paralela à reta y, a reta y também é paralela à reta x.

$$x \parallel y \Rightarrow y \parallel x.$$



2.2 - fig. 7

3. Se a reta x é paralela à reta y e se a reta y é paralela à reta z, resulta daí que a reta x é paralela à reta z.

$$\left.\begin{array}{c} x \parallel y \\ \text{e} \\ y \parallel z \end{array}\right\} \Rightarrow x \parallel z.$$

A relação de paralelismo é uma relação reflexiva, simétrica e transitiva. No exemplo considerado, a representação gráfica da relação de paralelismo ainda é a mesma que a da figura 6. As três relações estudadas são análogas, se fizermos a abstração da natureza dos elementos de E.

Os pares ordenados $(x; y)$ de $E \times E$ que satisfazem à relação R considerada, formam o gráfico.
$S = \{(x; y); x R y\}$.
Os elementos de S estão assinalados por uma cruz na tabela de $E \times E$.

	a	b	c	d	e	f
a	x	x			x	
b	x	x			x	
c			x			
d				x		x
e	x	x			x	
f				x		x

A relação de paralelismo aqui introduzida é a relação de paralelismo "no sentido amplo". É a que utilizaremos a seguir. Duas retas do plano são paralelas no sentido estrito se elas forem distintas e paralelas no sentido amplo. A relação de paralelismo no sentido estrito é simétrica, mas não reflexiva.
Dos três exemplos precedentes extrairemos a noção de relação de equivalência.

2.24. Definição. Chama-se relação de equivalência num conjunto E, uma relação reflexiva, simétrica e transitiva.
Portanto, uma relação de equivalência possui as três propriedades seguintes:

1. $\forall x \quad x \equiv x$ (reflexividade)
2. $x \equiv y \Rightarrow y \equiv x$ (simetria)
3. $\left.\begin{array}{c} x \equiv y \\ \text{e} \\ y \equiv z \end{array}\right\} \Rightarrow x \equiv z$ (transitividade)

Observação: Consideramos sòmente as relações de equivalência num dado conjunto E.

$$x \equiv y \text{ subentende } x \in E \text{ e } y \in E.$$

2.241. Vamos citar ainda algumas relações de equivalência usuais. A igualdade dos conjuntos é uma relação de equivalência (1.13). A igualdade dos conjuntos induz à equivalência lógica das propriedades características.

1. $\forall p \qquad p \Longleftrightarrow p$
2. Se $p \Longleftrightarrow q$ temos também $q \Longleftrightarrow p$
3. Se $p \Longleftrightarrow q$ e se $q \Longleftrightarrow r$ $\Big\}$ temos também $p \Longleftrightarrow r$

2.242. A igualdade num conjunto de números é a mais conhecida das relações de equivalência.

1. $\forall x \qquad x = x$
2. $x = y \Longrightarrow y = x$
3. $\left.\begin{array}{l} x = y \\ \quad e \\ y = z \end{array}\right\} \Longrightarrow x = z.$

2.243. A igualdade dos triângulos também é uma relação de equivalência. Dois triângulos são iguais se pudermos superpô-los por meio de um movimento no sentido da geometria elementar.

2.244. Uma fração ordinária é um par ordenado. Seu primeiro elemento, o numerador, pertence a Z ; seu segundo elemento, o denominador, pertence a

$\complement_{Z} 0$. Escreveremos as frações sob a forma de pares ordenados. As frações (3;5), (-12; -20) e (9; 15) são equivalentes. Elas representam, sob diferentes formas, o mesmo número racional cujo valor decimal é 0,6. Quando escrevemos

$$\frac{3}{5} = \frac{-12}{-20} = \frac{9}{15} = 0{,}6$$

trata-se da igualdade em Q, no sentido do exemplo 2.242.

2.25. No conjunto Z dos números inteiros, diz-se que x é congruente a y, módulo 5, se a diferença x - y é um múltiplo de 5.

Escreve-se

$$x \equiv y \pmod 5.$$

Exemplos:

$32 \equiv 17 \pmod 5$ porque $32 - 17 = 15 = 3 \,.\, 5$
$14 \equiv -6 \pmod 5$ porque $14 - (-6) = 20 = 4.5$
$-13 \equiv 17 \pmod 5$ porque $-13 - 17 = -30 = (-6).5$
$-4 \equiv -24 \pmod 5$ porque $-4 - (-24) = 20 = 4.5$
$11 \not\equiv -21 \pmod 5$ porque $11 - (-21) = 32.$

A congruência (módulo 5) é uma relação de equivalência.

Com efeito, ela é reflexiva, simétrica e transitiva.

1. $\forall x \quad x \equiv x \pmod 5$
   porque $x - x = 0 = 0 \,.\, 5.$
2. $x \equiv y \pmod 5 \Rightarrow x - y = k.5,\ k \in Z$
   $x - y = k \,.\, 5 \Rightarrow y - x = (-k).\, 5$
   $y - x = (-k) \,.\, 5 \Rightarrow y \equiv x \pmod 5$
   donde
   $x \equiv y \pmod 5 \Rightarrow y \equiv x \pmod 5.$
3. $$\left.\begin{array}{l} x \equiv y \pmod 5 \Rightarrow x - y = k.5 \\ y \equiv z \pmod 5 \Rightarrow y - z = k'.5 \end{array}\right\} + \quad \begin{array}{l} k \in Z \\ k' \in Z \end{array}$$
   $x \equiv z \pmod 5 \Leftarrow x - z = (k + k').\, 5.$

Assim:

$$\left.\begin{array}{c} x \equiv y \pmod 5 \\ \text{e} \\ y \equiv z \pmod 5 \end{array}\right\} \Rightarrow x \equiv z \pmod 5.$$

Podemos definir uma relação de congruência em Z para cada módulo n, $n \in N$.

2.26. Num conjunto E, tôda relação de equivalência determina uma partição. Os elementos equivalentes entre si formam um subconjunto chamado classe de equivalência. Duas classes de equivalência distintas são disjuntas. A reunião de tôdas as classes de equivalência é E.

2.261. Nos exemplos 2.21, 222 e 2.23 os seis elementos de $E = \{a,b,c,d,e,f\}$ estão repartidos em três classes de equivalência.

$$A_1 = \{a,b,e\}$$
$$A_2 = \{c,f\}$$
$$A_3 = \{d\}.$$

2.262. No conjunto das frações ordinárias, cada classe de equivalência representa um número racional.

2.263. As retas do plano se repartem em classes de retas paralelas. Tôdas as retas de uma mesma classe têm a mesma direção.

2.264. Em Z, munido da congruência (mod 5), a partição compreende cinco classes de equivalência C_0, C_1, C_2, C_3, C_4.

$C_0 = \{\dots -10, -5, 0, +5, +10, +15, +20, \dots\} = \{x; x = 5k, k \in Z\}$

$C_1 = \{\dots -9, -4, +1, +6, +11, +16, +21, \dots\} = \{x; x = 5k+1, k \in Z\}$

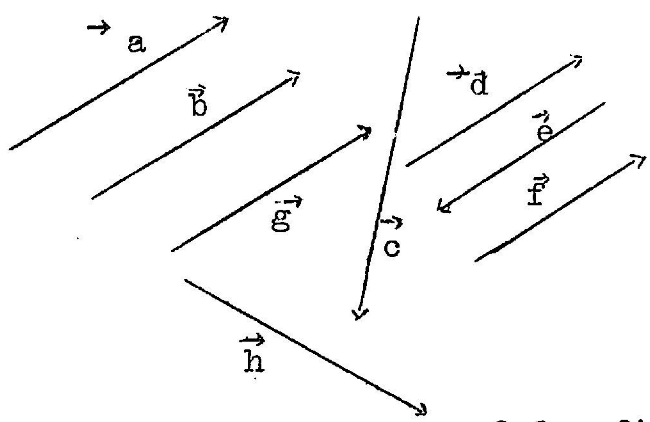
$C_2 = \{\dots -8, -3, +2, +7, +12, +17, +22, \dots\} = \{x; x = 5k+2, k \in Z\}$

$C_3 = \{\dots -7, -2, +3, +8, +13, +18, +23, \dots\} = \{x; x = 5k+3, k \in Z\}$

$C_4 = \{\dots -6, -1, +4, +9, +14, +19, +24, \dots\} = \{x; x = 5k+4, k \in Z\}$.

No caso da congruência (mod n), a partição compreende n classes de equivalência.

2.265. Seja F o conjunto das flechas do plano (fig. 8). Introduzamos em F a seguinte relação:
Duas flechas estão em relação se têm a mesma direção, o mesmo sentido e a mesma intensidade.



2.2 - fig. 8

Verifica-se, fàcilmente, que esta relação binária em F é uma relação de equivalência. Segundo a figura 8, as flechas $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são equivalentes, do mesmo modo que as flechas $\vec{a}$ e $\vec{g}$ etc.

$$\vec{a} \equiv \vec{b} \qquad \vec{d} \equiv \vec{f}$$

$$\vec{b} \equiv \vec{g}$$

$$\vec{a} \equiv \vec{g}$$

Ao contrário, $\vec{d}$ e $\vec{e}$ não são flechas equivalentes, visto que elas diferem pelo sentido. As flechas $\vec{a}$ e $\vec{f}$ não são equivalentes, porque diferem pela intensidade.

Podemos repartir o conjunto F das flechas do plano em classes de equivalência. Cada classe de equivalência compreende tôdas as flechas que têm a mesma direção, o mesmo sentido e a mesma intensidade. O conjunto

$$v = \{\vec{a}, \vec{b}, \vec{g}, \ldots\}$$

é uma classe de flechas equivalentes.

Exercícios

1. No conjunto $E = \{-2, -1, 0, 1, 4\}$ a relação $a^2+a = b^2+b$ é uma relação de equivalência?
Desenhar o gráfico desta relação.

2. Num hexágono regular, considere-se as diagonais que passam pelo centro e os seis lados. Estudar a relação de paralelismo neste conjunto de nove retas e determinar as classes de equivalência.

3. Seja $\mathcal{P}$ o conjunto dos pontos do plano e M um ponto fixo dêsse plano. Em $\complement_{\mathcal{P}}\{M\}$
a relação $A \; R \; B \Leftrightarrow A, M, B$ são colineares é uma relação de equivalência? Se fôr, quais são as classes de equivalência?

4. Em $\complement_{\mathcal{P}}\{M\}$ (ver o ex.: 3), a relação

$$A \; R \; B \Leftrightarrow MA = MB$$

é uma relação de equivalência? Quais são as classes de equivalência?

5. Seja $\mathcal{P}$ o conjunto dos pontos do plano e D uma reta dêste plano. Mostrar que em
$\complement_{\mathcal{P}} D$ a relação

$$A \equiv B \Leftrightarrow \text{o segmento } AB \text{ não corta } D$$

é uma relação de equivalência. Quantas classes de equivalência existem?

6. Em $\complement_{\mathcal{P}} D$ (ver o ex.: 5), mostrar que a relação

$A \equiv B \Leftrightarrow$ A e B estão sôbre uma mesma perpendicular a d, suporte de D

é uma relação de equivalência. Determinar as classes de equivalência.

7. Seja $E = \{1, 2, 3, \ldots, 9\}$. Em E x E, considere-se a relação

$$(a; b) \equiv (c; d) \text{ se } a-b = c-d \text{ ou se } b-a=d-c.$$

Mostrar que se trata de uma relação de equivalência e assinalar no quadrado de E x E as classes de equivalência.

8. Fazer o mesmo estudo em E x E para a relação

$$(a;\ b) \equiv (c;\ d) \iff a+b = c+d.$$

9. A relação $A \triangle B = \emptyset$ é uma relação de equivalência em P (E)? De que relação se trata? (Ver 1. ex.: 38.)

10. Seja $E = \{1, 2, 3, 4\}$ e $A = \{1; 2\}$. Em P(E), introduz-se a relação

$$X\ R\ Y \iff X \cap A = Y \cap A.$$

Mostrar que se trata de uma relação de equivalência e descrever as classes de equivalência.

11. O mesmo estudo para a relação

$$X\ R\ Y \iff X \cup A = Y \cup A.$$

12. Verificar as propriedades das seguintes relações:

Conjunto	Relação	Reflexividade	Simetria	Transitividade
a) retas do plano	d_1 e d_2 passam por A (ponto fixo)	não	sim	sim
b) P(E)	$A \subseteq B$	sim	não	sim
c) retas do plano	d_1 e d_2 têm pelo menos um ponto comum	sim	sim	não
d) P(E)	$A \subset B$	não	não	sim
e) R	$x \neq y$	não	sim	não
f) P(E)	$A \not\subset B$ A não está estritamente contido em B	sim	não	não
g) R	$2a = b$	não	não	não
h) R	$x = y$	sim	sim	sim

13. As relações seguintes são reflexivas? simétricas? transitivas?

a) $\ngeq$, $\nleq$ em R.

b) "x e y são primos entre si" em $\complement_N \{1\}$

c) "x é múltiplo de y" em N.

d) $>$, $\not<$ em Z.

e) $a - b > k$, k dado; $a, b, k \in N$.

f) $A \subset \complement_E B$ em P(E).

g) "x é perpendicular a y" no conjunto das retas do plano.

14. Seja uma relação num conjunto E. Numa tabela de dupla entrada de E x E, os pares ordenados que satisfazem à relação ocupam certas casas. Qual a disposição dessas casas para que se reconheça que a relação é simétrica? A mesma questão para a reflexividade e a transitividade.

15. Em $E = \{x;\ x \in N,\ x \leqslant 12\}$ estudar as relações

a) $xy = 24$

b) $xy = 12$

c) $x^2 + y^2 \leqslant 100$.

d) $x^2 - 4y^2 = 0$

e) $x - 2y = 0$

Quais são as inclusões entre os gráficos destas relações?

16. Em R x R, sejam

$$S = \{(x;\ y);\ 2x-3y = 1\}$$
$$T = \{(x;\ y)\ ;\ 3x + 2y = 21\}.$$

O que representa $S \cap T$?

17. Nas classes de equivalência mod 2, mod 3, mod 4, mod 6, mod 10, mod 12, verificar em exemplos as propriedades da relação de equivalência.

2.3. Relações de ordem

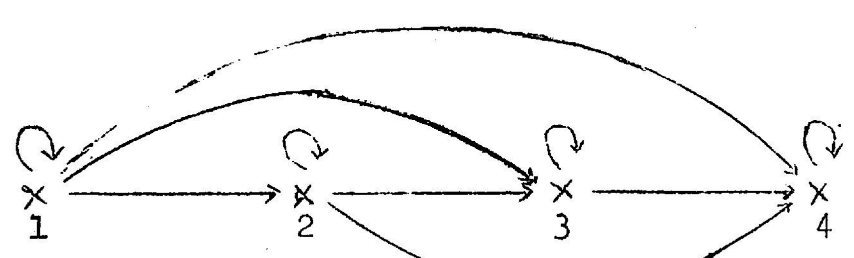
2.31. Em N, a relação $\leqslant$ (inferior ou igual) é uma relação de ordem; ela possui as seguintes propriedades:

1. É reflexiva $\quad \forall x \quad x \leqslant x$

2. É anti-simétrica $\quad \left.\begin{matrix} x \leqslant y \\ \text{e} \\ y \leqslant x \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = y$

3. É transitiva $\quad \left.\begin{matrix} x \leqslant y \\ \text{e} \\ y \leqslant z \end{matrix}\right\} \Rightarrow x \leqslant z.$

Restrita ao subconjunto $E = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, esta relação admite a representação gráfica abaixo.



2.3 - fig. 9

Dois elementos distintos x e y de N são sempre comparáveis pela relação $\leqslant$. Temos

$$x \leqslant y \text{ ou } y \leqslant x.$$

Diz-se que $\leqslant$ é uma relação de ordem total ou que N é totalmente ordenado pela relação $\leqslant$.

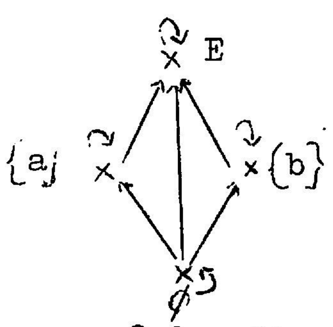
2.32. Em P(E), a relação de inclusão no sentido amplo também é uma relação de ordem reflexiva, anti-simétrica e transitiva.

1. $\forall X \quad X \subseteq X$

2. $\left.\begin{array}{c} X \subseteq Y \\ \text{e} \\ Y \subseteq X \end{array}\right\} \Rightarrow X = Y$

3. $\left.\begin{array}{c} X \subseteq Y \\ \text{e} \\ Y \subseteq Z \end{array}\right\} \Rightarrow X \subseteq Z.$

Seja E = $\{ a, b \}$. Em P(E), a representação gráfica da relação é a seguinte:



É uma relação de ordem parcial, porque dois elementos distintos de P(E) não são sempre comparáveis. Por exemplo, não temos

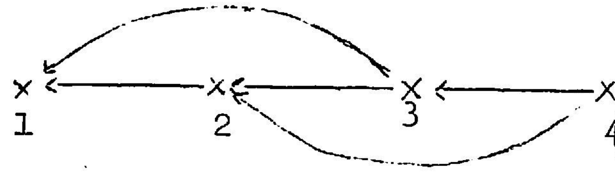
$$\{a\} \subseteq \{b\} .$$

2.3 - fig. 10

2.33. Consideremos em N a relação $>$ (superior a), relação de ordem que tem as seguintes propriedades:

1. É não reflexiva $\forall x \qquad x > x$ é falso.
2. É não simétrica porque $x > y$ e $y > x$ são incompatíveis.
3. É transitiva $\left.\begin{array}{c} x > y \\ \text{e} \\ y > z \end{array}\right\} \Rightarrow x > z.$

Restrita a E = $\{ 1, 2, 3, 4 \}$ a relação $>$ admite a representação gráfica abaixo. Em N, a relação $>$ é uma relação de ordem total , porque se $x \neq y$, temos $x > y$ ou $y > x$.



2.3 - fig. 11

2.34. Definições

2.341. Num conjunto E, chama-se relação de ordem ampla, uma relação reflexiva, anti-simétrica e transitiva.

2.342. Num conjunto E, chama-se relação de ordem estrita, uma relação não reflexiva, não simétrica e transitiva.

2.343. Distingue-se, por um lado, as relações de ordem totais pelas quais dois elementos distintos são sempre comparáveis e, por outro lado, as relações de ordem parciais onde a comparação nem' sempre é possível.

Exercícios

18. Estudar, em N, a relação "múltiplo de " e a relação "divisor de".

19. A relação $A \cap B = A$ é uma relação de ordem em P(E)?

20. Sejam $E = \{1,2,3,4\}$ e $F = \{1,2,3\}$. Ordenar E x F da seguinte maneira:

$$(a; b) \text{ precede } (c; d) \text{ se } a < c \text{ ou se } a = c \text{ e } b > d.$$

21. Ordenar $E = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ sabendo que precede b nos três casos seguintes:

se a e b são pares com $a < b$
se a e b são ímpares com $a > b$
se a é par e b é ímpar.

22. Ordenar por inclusão

$E_1 = B \cap C$	$E_2 = \emptyset$	$E_3 = A \cup B \cup C$	$E_4 = C \cap (A \cup B)$
$E_5 = E$	$E_6 = B \cup C$	$E_7 = A \cap B \cap C$	$E_8 = C$
$E_9 = C \cup (A \cap B)$			

(A, B, C são partes de E)
Propor outros exercícios semelhantes.

23. Em N, temos

$$a + b = c \qquad c - 10 = e + 10 - d$$
$$a + c = b + d \qquad e = a + 20.$$

Ordenar $E = \{a,b,c,d,e\}$ pela relação $<$, depois calcular a, b, c, d e e.

24. Três homens, Alberto, Bernardo e Carlos têm cada um, duas profissões. Estas profissões são: alpinista, livreiro, ceramista, dentista, marceneiro e flautista. Determinar as profissões de cada um a partir das seguintes informações:

1. O alpinista é o vizinho do ceramista.
2. O marceneiro e o ceramista são contemporâneos de Alberto.
3. Bernardo deve cem cruzeiros novos ao marceneiro.
4. Carlos é mais pobre que Bernardo e o dentista
5. O alpinista está apaixonado pela irmã do dentista.
6. O dentista comprou vários livros do livreiro.

(Seja E o conjunto dos nomes e F o conjunto das profissões. Estudar as informações dadas em E x F.)

2.4. Relações de incidência em geometria

Na geometria, as relações de incidência entre pontos, retas e planos são fundamentais. Convém examinar como é possível traduzir estas relações na linguagem dos conjuntos.

a) O ponto A está sôbre a reta d, a reta d passa pelo ponto A.

Quando indicamos

$$A \in D \text{ ou } D \ni A$$

a relação de pertinência implica que a reta D, de suporte d, é um conjunto de pontos ou pontilhada.

b) O ponto A está no plano π ; o plano π passa pela reta d.

Escreve-se

$$A \in \dot{\pi} \text{ ou } \dot{\pi} \ni A.$$

Esta notação indica que o plano $\dot{\pi}$ é um conjunto de pontos ou um plano pontilhado.

c) A reta d está no plano π ; o plano π passa pela reta d.

Podemos interpretar esta relação de duas maneiras:

1. A reta é uma pontilhada D e o plano é um plano pontilhado $\dot{\pi}$. A relação de incidência torna-se uma relação de inclusão entre dois conjuntos pontilhados

$$D \subset \dot{\pi} \text{ ou } \dot{\pi} \supset D.$$

2. Para traduzir a relação de incidência em têrmos de pertinência e manter a analogia com as notações precedentes, pode-se considerar a reta como elemento d, suporte da pontilhada D. Neste caso, a reta d é um elemento do plano regrado $\bar{\pi}$ ou conjunto de retas.

$$d \in \bar{\pi} \text{ ou } \bar{\pi} \ni d.$$

Esta distinção entre pontilhada D e suporte d por um lado, e entre plano pontilhado Π e plano regrado $\overline{\Pi}$ por outro lado, revelar-se-á indispensável, daqui por diante, se quisermos evitar ' confusões e abusos de notações. Quando a distinção não fôr necessária, utilizaremos "reta" e "plano" no seu sentido corrente, com a notação apropriada. Assim, para designar a reta de intersecção de dois planos secantes Π_1 e Π_2, dispomos de duas notações

$$\Pi_1 \cap \Pi_2 = D \qquad \overline{\Pi}_1 \cap \overline{\Pi}_2 = \{d\}.$$

Aprovado em 20/5/82 [illegible]

Revisado e classificado em 2/7/82 [illegible]