ROKUSABURO KIYUKAWA
CARLOS TADASHI SHIGEKIYO
KAZUHITO YAMAMOTO

Os autores são professores formados pela USP — Universidade de São Paulo — e lecionam em níveis de ensino de 1.º a 3.º graus.
Em suas atividades profissionais, incluem-se a direção de estabelecimento de ensino e a coordenação de instituto educacional.

Os elos da MATEMÁTICA 2

MANUAL DO PROFESSOR

1.ª edição — 1991

ISBN 85-02-00867-6

editora SARAIVA

editora
SARAIVA

Av. Marquês de São Vicente, 1697 — CEP 01139 — Barra Funda — Tel.: PABX (011) 826-8422
Caixa Postal 2362 — Telex: 1126789 — FAX: (011) 826-0606 — São Paulo-SP

Distribuidores Regionais

Bauru: (0142) 34-5643
Belém: (091) 222-9034
Belo Horizonte: (031) 461-9962
Blumenau: (0473) 22-4558
Brasília: (061) 226-3722
Campina Grande: (083) 321-4397
Campo Grande: (067) 382-3682
Cuiabá: (065) 321-5073
Curitiba: (041) 234-2622
Florianópolis: (0482) 22-9425
Fortaleza: (085) 231-7881
Goiânia: (062) 225-2882
Joinville: (0474) 22-8777
Maceió: (082) 221-9559
Manaus: (092) 234-4664
Natal: (084) 222-2569
Porto Alegre: (0512) 43-2986
Porto Velho: (069) 221-9405
Recife: (081) 231-1764
Ribeirão Preto: (016) 634-0546
Rio Branco: (068) 224-3432
Rio de Janeiro: (021) 201-7149
Salvador: (071) 244-0139
São Luís: (098) 222-0107
Teresina: (086) 223-0474
Uberlândia: (034) 236-4107
Vitória: (027) 227-5933

APRESENTAÇÃO

O ESPÍRITO DA OBRA

A coleção ***Os elos da Matemática*** foi elaborada dentro da concepção de que o curso de Matemática deve estar inserido no contexto geral da formação do ser humano, de que compete à escola selecionar os objetivos gerais e instrucionais que atendam, adequadamente, às necessidades de seu corpo discente e de que cabe ao professor programar as atividades de forma a motivar seus alunos para a aprendizagem.

Para possibilitar que o livro didático seja utilizado na sua primordial finalidade — material principal de apoio para as atividades didáticas —, apresentamos os conceitos, sem sofisticação, em linguagem simples e acessível aos alunos do 2.º grau. Almejamos, assim, obter a máxima concentração nas explicações do professor (o aluno não deve se transformar em "copiador"; em aula, deve reservar o maior tempo possível para as atividades mentais) e estimular a leitura e a pesquisa.

Elaboramos os textos partindo de exemplos e, a seguir, formalizando os conceitos e as propriedades, que procuram conduzir o aluno a compreender e globalizar o assunto.

Através dos exercícios, dosados em quantidade adequada e colocados em ordem crescente de dificuldade, objetivamos conduzir o aluno à assimilação e ao aprofundamento dos conceitos e propriedades, sem negligenciar, entretanto, o desenvolvimento das técnicas de cálculo.

Procuramos dar um desenvolvimento equilibrado ao conteúdo, com os assuntos prioritários tendo aprofundamento maior que os não-essenciais.

Inserimos algumas seções, denominadas *FLASH* e *ELOS*, para motivar o aluno a observar os fatos do dia-a-dia e as conexões da Matemática com os demais ramos da atividade humana.

Como sempre, esperamos contar com a colaboração dos colegas no sentido de nos enviar sugestões, comentários e, principalmente, críticas para produzirmos um trabalho cada vez mais adequado às necessidades educacionais do país.

os autores

QUADRO DE SUGESTÕES

Esquematizamos um quadro de sugestões, que poderá facilitar o trabalho do professor:

Unidade nº	Unidade assunto	Quantidade média de aulas	Sugestões
0.	Geometria Plana: revisão		Apoio para a Unidade 8 e seguintes.
1.	Progressão aritmética, progressão geométrica	10	Destacar a importância de seqüências no cotidiano; analogia entre P.A. e P.G.
2.	Matrizes	7	Realçar a importância das matrizes no cotidiano; uma estrutura diferente com respeito à multiplicação de matrizes em relação à multiplicação de números reais.
3.	Determinantes	6	Destacar a técnica para o cálculo de determinante de matriz quadrada de ordem 3 e o teorema de Laplace. Se necessário, as propriedades podem ser omitidas (destinar para pesquisa dos alunos).
4.	Sistemas lineares	9	Conexão entre matrizes, determinantes e sistemas lineares; importância da análise de sistema; em sistema 2×2, usar representação gráfica.
5.	Análise combinatória	8	Realçar o princípio fundamental de contagem e diferenciação entre arranjos e combinações.
6.	Binômio de Newton	6	Importância das relações entre binomiais e termos da expansão binomial.
7.	Probabilidade	10	Realçar a definição, probabilidade condicional e de eventos repetidos.
8.	Geometria de posição	13	Passagem da visão plana para a visão espacial; explorar a intuição; usar elementos da sala e linguagem precisa. Dependendo do nível da classe, podem ser omitidos os teoremas fundamentais (pesquisa para alunos).
9.	Prismas	10	Reconhecimento de prismas e elementos; destaque para o Princípio de Cavalieri; preocupações com planificação.

Unidade nº	assunto	Quantidade média de aulas	Sugestões
10.	Pirâmides	10	Reconhecimento de pirâmides e seus elementos; preocupação com tetraedro.
11.	Cilindros e cones	7	Reconhecimento de cilindro e cone; analogia entre cilindro e prisma e entre cone e pirâmide.
12.	Esferas	8	Explorar a intuição para rotação de figura; relações da esfera com outros sólidos.
13.	Troncos de pirâmides e cones	6	Idéia fundamental de semelhança de sólidos. Se necessário, pode-se omitir esta unidade.
14.	Poliedros	6	Analogia entre ângulo plano e diedro; destaque para poliedros convexos e regulares. Se necessário, pode-se omitir esta unidade.
Complemento:	Indução finita	6	Para classes de nível mais elevado, principalmente para candidatos à área de exatas ou pesquisa para alunos.

Total: 122 aulas

A quantidade média de aulas indicada para cada unidade, no quadro de referências, é uma sugestão para os professores que dispõem de 4 aulas semanais. Com um cronograma baseado nela, é perfeitamente possível percorrer todos os capítulos em um ano letivo. Os alunos poderão adquirir uma boa formação nos fundamentos matemáticos necessários para o prosseguimento em seus estudos.

Obviamente, para que o professor possa comentar todos os exercícios propostos, os testes e os exercícios de aprofundamento, em sala de aula, serão necessárias mais do que 4 aulas por semana.

Assim, de acordo com as condições particulares de cada escola, esta obra pode ser utilizada sob dosagens diversas:

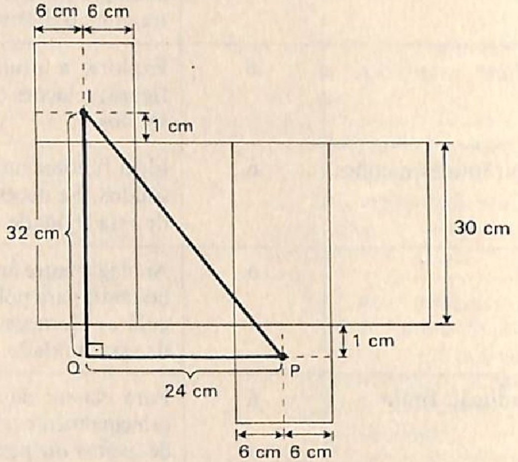
1) dar todas as unidades e todos os exercícios;
2) dar todas as unidades, restringindo-se apenas aos exercícios propostos;
3) dar apenas os capítulos básicos, caso disponha de menos de 4 aulas semanais.

Nas escolas onde a Matemática é dividida em duas ou mais frentes (dadas por dois ou mais professores), esta obra pode ser utilizada sem restrições, pois ela está dimensionada para este esquema de ensino.

COMENTÁRIOS SOBRE OS *FLASHES*

Unidade 9: O menor caminho entre o inseto e sua presa

Planificando a caixa conforme a figura, temos:



No $\triangle PQI$, pelo teorema de Pitágoras, vem:

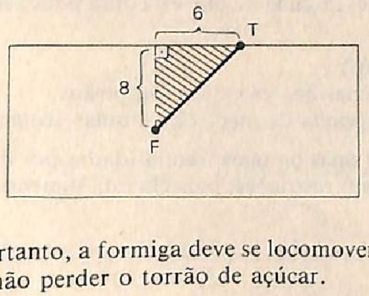
$$(IP)^2 = 32^2 + 24^2 \Rightarrow IP = 40 \text{ cm}$$

Unidade 11: A formiga e o torrão de açúcar

A circunferência da base tem comprimento $2\pi r = 2\pi \cdot \frac{18}{\pi} = 36$ cm.

O arco correspondente ao ângulo central de 60° mede $\frac{36}{6} = 6$ cm.

A planificação da superfície cilíndrica fornece:



No triângulo hachurado, pelo teorema de Pitágoras, vem:

$$(FT)^2 = 8^2 + 6^2 \Rightarrow FT = 10 \text{ cm}$$

Tempo máximo = 5 s

v_m = velocidade média da formiga

$$v_m = \frac{10}{5} = 2 \text{ cm/s}$$

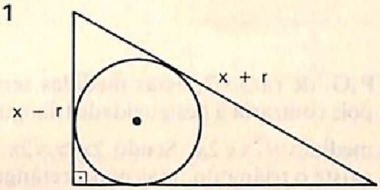
Portanto, a formiga deve se locomover com velocidade média maior ou igual a 2 cm/s para não perder o torrão de açúcar.

RESOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS DE APROFUNDAMENTO

Apresentamos, a seguir, as resoluções dos exercícios de aprofundamento. Essas resoluções são sugestões para análise e encaminhamento do raciocínio e, naturalmente, não são os únicos caminhos para se chegar à resposta.

Unidade 1 — Progressão aritmética, progressão geométrica

EA.1



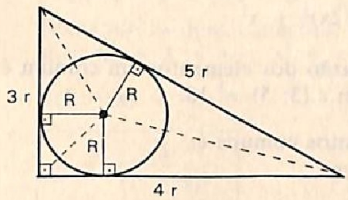
Se as medidas dos lados estão em P.A., podemos indicá-las assim:

$x - r$, x e $x + r$

Aplicando o teorema de Pitágoras:

$(x + r)^2 = (x - r)^2 + x^2$

$x^2 - 4xr = 0 \Rightarrow x = 4r$



Então:

Unindo o centro do círculo aos três vértices, obteremos três triângulos de alturas R, relativas aos lados 3r, 4r e 5r.

A soma das áreas dos três triângulos é igual à área do triângulo retângulo:

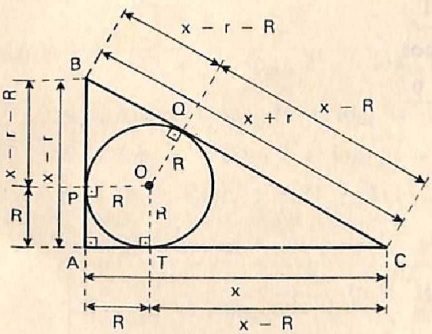
$$\frac{3r \cdot 4r}{\cancel{2}} = \frac{3r \cdot R}{\cancel{2}} + \frac{4r \cdot R}{\cancel{2}} + \frac{5r \cdot R}{\cancel{2}}$$

$\cancel{12}r^2 = \cancel{12}rR$

$r^2 - rR = 0 \Rightarrow r = 0$ não convém

$\boxed{r = R}$

Outro modo:



$x - r$, x, $x + r$ = medidas dos lados

Pelo teorema de Pitágoras, vem:

$(x - r)^2 + x^2 = (x + r)^2 \Rightarrow x = 4r$ (1)

P, Q, T: pontos de tangência dos lados do $\triangle ABC$ com a circunferência. Então:

$CT = CQ = x - R$

$BP = BQ = x - r - R$

$BC = BQ + CQ \Rightarrow$

$\Rightarrow x + r = x - r - R + x - R \Rightarrow$

$\Rightarrow x - 2r = 2R$ (2)

Substituindo (1) em (2), vem $r = R$.

EA.2 $(a_1; a_2; a_3; \ldots; a_j; \ldots)$

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_j - a_{j-1} = 2 \cdot j, \ j \geqslant 2 \end{cases}$$

Fazendo $j = 2; 3; 4; \ldots; n$, temos:

$$a_2 - a_1 = 2 \cdot 2$$
$$a_3 - a_2 = 2 \cdot 3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_n - a_{n-1} = 2n$$

Somando membro a membro essas equações, resulta:

$$a_n - a_1 = 2(2 + 3 + \ldots + n)$$
$$a_n = 2(2 + 3 + \ldots + n) + 1$$

$2(2 + 3 + \ldots + n)$ é par $\Rightarrow a_n$ é ímpar

EA.3 a) Se as medidas dos lados estivessem em P.G. de razão 2, essas medidas seriam x, $2x$ e $4x$, $x > 0$, o que seria absurdo, pois contraria a desigualdade triangular.

b) Se um dos lados medir x, os outros terão medidas $\sqrt{2}x$ e $2x$. Sendo $2x > \sqrt{2}x > x$ e satisfazendo a desigualdade triangular, existe o triângulo, mas não é retângulo, pois:

$$(2x)^2 \neq (\sqrt{2}x)^2 + x^2$$

EA.4 $\left.\begin{array}{l} (2; 5; 8; \ldots; 332) \Rightarrow r_1 = 3 \\ (7; 12; 17; \ldots; 157) \Rightarrow r_2 = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow$ a razão dos elementos em comum é m.m.c.$(3; 5) = 15$.

Então, a progressão formada pelos elementos comuns é:
$(15; 30; \ldots; 150) \Rightarrow 10$ termos em comum

EA.5 a) $x = 9 + 99 + 999 + \ldots + \underbrace{999\ldots9}_{\text{n algarismos}}$

$$x = (10 - 1) + (10^2 - 1) + (10^3 - 1) + \ldots + (10^n - 1)$$
$$x = (10 + 10^2 + 10^3 + \ldots + 10^n) - \underbrace{(1 + 1 + 1 + \ldots + 1)}_{n}$$

$$x = \frac{10(10^n - 1)}{10 - 1} - n \Rightarrow x = \frac{10^{n+1} - 10 - 9n}{9}$$

b) $y = 1 + 11 + 111 + \ldots + \underbrace{111\ldots1}_{\text{n algarismos}}$

$$y = \frac{9 + 99 + 999 + \ldots + 999\ldots9}{9}$$

$$y = \frac{\dfrac{10^{n+1} - 9n - 10}{9}}{9}$$

$$\boxed{y = \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{81}}$$

EA.6 a) $m = 1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \frac{5}{16} + \ldots$

Para melhor visualização:

$$\begin{array}{cccc} 1 & & & \\ \frac{1}{2} + & \frac{1}{2} & & \\ \frac{1}{4} + & \frac{1}{4} + & \frac{1}{4} & \\ \frac{1}{8} + & \frac{1}{8} + & \frac{1}{8} + & \frac{1}{8} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \quad \ddots \\ \hline \end{array}$$

$$m = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{2}} + \ldots = 2 + 1 + \frac{1}{2} + \ldots = \boxed{4}$$

b) $n = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots$ com $0 < x < 1$

Multiplicando ambos os membros por $-x$:

$-xn = -x - 2x^2 - 3x^3 - 4x^4 - \ldots$

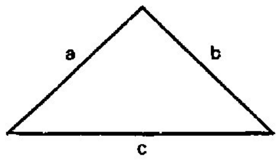
Somando as duas equações, vem:

$n - xn = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$

$n(1 - x) = \frac{1}{1 - x}$

$$\boxed{n = \frac{1}{(1 - x)^2}}$$

EA.7 Se as medidas dos lados estão em P.G., podemos escrevê-las assim:



$a = x, \ b = xq \ \text{e} \ c = xq^2$

Dependendo do valor de **q**, o maior lado poderá ser o lado **a** ou o lado **c**; aplicando a condição de existência do triângulo, teremos:

$x < xq + xq^2$ e $xq^2 < xq + x$

Resolvendo, teremos $\frac{\sqrt{5} - 1}{2} < q < \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$.

EA.8 $S = \frac{1}{\log_a 2} + \frac{1}{\log_{2a} 2} + \frac{1}{\log_{4a} 2} + \ldots + \frac{1}{\log_{2^n \cdot a} 2}$, $0 < a \neq 1$ e $n \in \mathbb{N}^*$

$S = \log_2 a + \log_2 2a + \log_2 4a + \ldots + \log_2 2^n \cdot a$

$S = \log_2 a + (\log_2 2 + \log_2 a) + (\log_2 4 + \log_2 a) + \ldots + (\log_2 2^n + \log_2 a)$

$S = (n + 1)\log_2 a + (1 + 2 + \ldots + n)$

$$\boxed{S = (n + 1)\log_2 a + n\frac{(n + 1)}{2}}$$

EA.1 $AB + BA = 0 \Rightarrow AB = -BA$

1º membro $= AB^2 = \underbrace{(AB)}_{-BA}B = (-BA)B = -B\underbrace{(AB)}_{-BA} = -B(-BA) =$

$= B^2A =$ 2º membro

EA.2 Se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, então $A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

$A \cdot A_t = 0_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ e } b = 0 \\ c^2 + d^2 = 0 \Rightarrow c = 0 \text{ e } d = 0 \end{cases}$

Portanto, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

EA.3 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

De forma análoga: $A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^5 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

De forma geral, temos:

$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

EA.4 a) $T_\alpha \cdot T_\beta = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\beta & -\operatorname{sen}\beta \\ \operatorname{sen}\beta & \cos\beta \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} \cos\alpha \cdot \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta & -\cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta - \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta \\ \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta & \cos\alpha \cdot \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\operatorname{sen}(\alpha + \beta) \\ \operatorname{sen}(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{pmatrix} = T_{\alpha + \beta}$

b) $T \cdot T^{-1} = I_2$

$\begin{pmatrix} \cos x & -\operatorname{sen} x \\ \operatorname{sen} x & \cos x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a \cdot \cos x - c \cdot \text{sen } x & b \cdot \cos x - d \cdot \text{sen } x \\ a \cdot \text{sen } x + c \cdot \cos x & b \cdot \text{sen } x + d \cdot \cos x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$① \begin{cases} a \cdot \cos x - c \cdot \text{sen } x = 1 \\ a \cdot \text{sen } x + c \cdot \cos x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rl} ① & \begin{cases} -a \cdot \cos x \cdot \text{sen } x + c \cdot \text{sen}^2 x = -\text{sen } x \\ a \cdot \text{sen } x \cdot \cos x + c \cdot \cos^2 x = 0 \end{cases} \\ + & \\ \hline & c(\text{sen}^2 x + \cos^2 x) = -\text{sen } x \end{array}$$

$$\boxed{c = -\text{sen } x}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{a = \cos x}$$

$$② \begin{cases} b \cdot \cos x - d \cdot \text{sen } x = 0 \\ b \cdot \text{sen } x + d \cdot \cos x = 1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{rl} ② & \begin{cases} -b \cdot \cos x \cdot \text{sen } x + d \cdot \text{sen}^2 x = 0 \\ b \cdot \text{sen } x \cdot \cos x + d \cdot \cos^2 x = \cos x \end{cases} \\ + & \\ \hline & d(\text{sen}^2 x + \cos^2 x) = \cos x \end{array}$$

$$\boxed{d = \cos x}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{b = \text{sen } x}$$

Portanto, $T^{-1} = \begin{pmatrix} \cos x & \text{sen } x \\ -\text{sen } x & \cos x \end{pmatrix}$.

Outro modo:

Do item a: $T_\alpha \cdot T_\beta = T_{\alpha+\beta}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall \beta \in \mathbb{R}$.

Basta tomar $T_{\alpha+\beta} = I_2$, que resulta T_α e T_β inversas entre si.

Então $\begin{cases} \cos(\alpha + \beta) = 1 \\ \text{sen}(\alpha + \beta) = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha + \beta = k\,2\pi + 2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos \beta = \cos \alpha \\ \text{sen } \beta = -\text{sen } \alpha \end{cases}$$

Portanto, a inversa de $T_\alpha = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\text{sen } \alpha \\ \text{sen } \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ é $T_\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \text{sen } \alpha \\ -\text{sen } \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$.

Unidade 3 — Determinantes

EA.1 $\left.\begin{array}{l} B = A' \Rightarrow \det B = \det A' \\ \bar{A} = (A')^t \Rightarrow \det \bar{A} = \det(A')^t \end{array}\right\} \Rightarrow \det B = \det \bar{A}$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \bar{A} \Rightarrow \det A^{-1} = \left(\frac{1}{\det A}\right)^3 \cdot \det \bar{A} \Rightarrow -\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{-2}\right)^3 \cdot \det \bar{A} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \det B = 4$$

EA.2 A é inversível $\Rightarrow \det A \neq 0$

Com $p \in \mathbb{N}^*$, $A^p = \underbrace{A \cdot A \ldots A}_{p \text{ vezes}}$

Então:

$\det(A^p) = \det A \cdot \det A \ldots \det A$

$\det(A^p) = (\det A)^p \neq 0$

Portanto, A^p é inversível.

EA.3 $\det A = \begin{vmatrix} \cos^2 a - \text{sen}^2 a & \cos^2 a & \text{sen}^2 a \\ \cos^2 b - \text{sen}^2 a & \cos^2 b & \text{sen}^2 b \\ \cos^2 c - \text{sen}^2 c & \cos^2 c & \text{sen}^2 c \end{vmatrix}$

A 1ª coluna é combinação linear da 2ª e 3ª colunas.

Portanto, $\det A = 0$.

EA.4 $A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ x + r & y + d & z + k \\ x + 2r & y + 2d & z + 2k \end{pmatrix}$

$\det A = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x + r & y + d & z + k \\ x + 2r & y + 2d & z + 2k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ r & d & k \\ 2r & 2d & 2k \end{vmatrix} = 0,$

pois a 2ª linha e a 3ª são proporcionais.

Unidade 4 — Sistemas lineares

EA.1 a) Seja $S \begin{cases} a_1x + a_2y + a_3z = d_1 & (1) \\ b_1x + b_2y + b_3z = d_2 & (2) \\ c_1x + c_2y + c_3z = d_3 & (3) \end{cases}$

tal que toda solução $(\alpha; \beta; \gamma)$ de (1) e (2) implica que $(\alpha; \beta; \gamma)$ é solução de (3).

Então:

$T \begin{cases} a_1x + a_2y + a_3z = d_1 & (1') \\ b_1x + b_2y + b_3z = d_2 & (2') \end{cases}$

Devemos mostrar que: (I) toda solução de S é solução de T e

(II) toda solução de T é solução de S.

(I) Qualquer que seja a solução $(m; n; p)$ de S, as equações (1') e (2') de T estão satisfeitas.

Portanto, se $(m; n; p)$ é solução de S, então $(m; n; p)$ é solução de T.

(II) Qualquer que seja a solução $(q; r; s)$ de T, as equações (1) e (2) estarão satisfeitas, e, pela hipótese, estará satisfeita a equação (3).

Portanto, se $(q; r; s)$ é solução de T, então $(q; r; s)$ é solução de S.

b) $\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 5 & (1) \\ 6x + 7y + 8z = 9 & (2) \\ x + y + z = 1 & (3) \end{cases}$

Basta mostrar que toda solução de (1) e (2) é também solução de (3).

Seja $(\alpha; \beta; \gamma)$ uma solução de (1) e (2).

Então:

$$\begin{cases} 2\alpha + 3\beta + 4\gamma = 5 \\ 6\alpha + 7\beta + 8\gamma = 9 \end{cases} \Rightarrow \beta = -2\alpha - 1, \ \gamma = \alpha + 2, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

Substituindo na equação (3), vem:

$\alpha + (-2\alpha - 1) + (\alpha + 2) = 1$

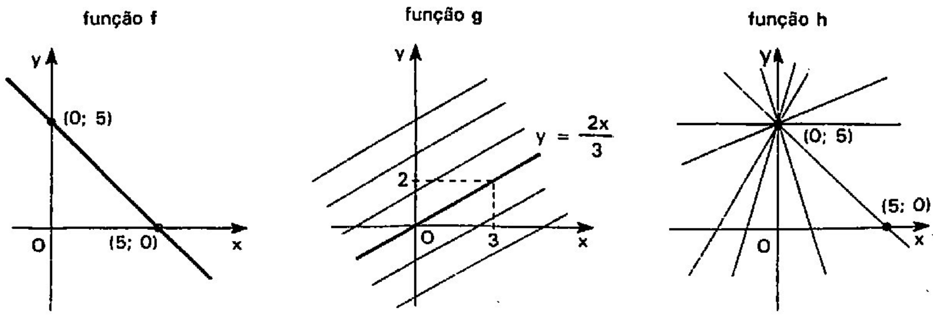
que está satisfeita, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

EA.2 $f: x \longrightarrow y = -x + 5$

$g: x \longrightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{k}{3}$

$h: x \longrightarrow y = kx + 5$

Vejamos os gráficos de f, g e **h**:



Para cada valor de $k \in \mathbb{R}$, o gráfico de g é uma reta paralela à reta de equação $y = \frac{2}{3}x$, e o gráfico de **h** é uma reta que passa por $P(0; 5)$. Notemos que o gráfico de **h** passa por P, $\forall k \in \mathbb{R}$.

a) Basta que o gráfico de g passe por P. Então:

$$5 = \frac{2 \cdot 0}{3} + \frac{k}{3} \Rightarrow k = 15$$

Portanto, $k = 15$; e o ponto comum é $P(0; 5)$.

Outro modo:

Os gráficos de **f**, **g** e **h** serão concorrentes num mesmo ponto se o sistema formado pelas equações é possível e determinado. Escalonando o sistema

$$\begin{cases} y + x = 5 \\ y - \dfrac{2x}{3} = \dfrac{k}{3} \\ y - kx = 5 \end{cases} \quad \text{vem} \quad \begin{cases} y + x = 5 \\ x = \dfrac{15 - k}{5} \\ (k + 1)x = 0 \end{cases}$$

Para $k \neq -1$, prosseguindo o escalonamento, vem:

$$\begin{cases} y + x = 5 \\ x = \dfrac{15 - k}{5} \\ 0 = \left(\dfrac{15 - k}{5}\right)(k + 1) \end{cases}$$

Da última equação: $k = 15$, e substituindo nas anteriores, obtemos $x = 0$ e $y = 5$.

b) Basta que:

$$\begin{cases} f \neq h & (1) \\ P \notin \text{gráfico de } g & (2) \end{cases}$$

De (1), vem $k \neq -1$.

De (2), vem $5 \neq \dfrac{2}{3} \cdot 0 + \dfrac{k}{3} \Rightarrow k \neq 15$.

EA.3 No 1º marco, sejam **x** e **y** os algarismos, respectivamente, das dezenas e das unidades; então, o número é $10x + y$.

Assim, no 2º marco, temos o número $10y + x$, e no 3º marco, temos o número $100x + y$.

As distâncias entre os marcos consecutivos são iguais entre si.

Então:

$$(10y + x) - (10x + y) = (100x + y) - (10y + x) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = 6x,\ 1 \leqslant x \leqslant 9,\ 1 \leqslant y \leqslant 9 \Rightarrow x = 1,\ y = 6$$

A distância entre o 3º e o 1º marcos é igual a:

$$(100x + y) - (10x + y) = 90x = 90 \cdot 1 = 90 \text{ km}$$

Unidade 5 — Análise combinatória

EA.1 A ordem dos números influi na contagem das etiquetas; logo, temos problema de arranjos.

a) Da urna I, retirando duas etiquetas, temos:

$A_{5,2}$ novas etiquetas

Da urna II, retirando duas etiquetas, temos:

$A_{4,2}$ novas etiquetas

Há três números comuns às duas urnas, que originam

$A_{3,2}$ novas etiquetas.

Portanto, o número de novas etiquetas é $A_{5,2} + A_{4,2} - A_{3,2} = 26$.

b) De forma análoga ao item **a**, temos:

$A_{5,3} + A_{4,3} - A_{3,3} = 78$

c) $A_{5,4} + A_{4,4} = 144$

EA.2 É claro que o cadeado de número 1 estará aberto.
Para os cadeados de números **n**, $n \geqslant 2$, basta que o **número de alterações** seja **par** depois da passagem da 1.ª pessoa; logo, **n** deve ser um quadrado perfeito. Portanto, os cadeados que estarão abertos são os numerados com 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 e 100.

EA.3 conhecidos do homem $\begin{cases} 4 \text{ mulheres} \\ 6 \text{ homens} \end{cases}$

conhecidos da mulher $\begin{cases} 6 \text{ mulheres} \\ 4 \text{ homens} \end{cases}$

Para convidar 5 homens e 5 mulheres de modo que 5 pessoas sejam conhecidas do marido e 5 da esposa, temos:

Conhecidos do marido	**Conhecidos da esposa**
5H e 0M	0H e 5M
4H e 1M	1H e 4M
3H e 2M	2H e 3M
2H e 3M	3H e 2M
1H e 4M	4H e 1M

Então, vem:

$C_{6,5} \cdot C_{4,0} \cdot C_{4,0} \cdot C_{6,5} + C_{6,4} \cdot C_{4,1} \cdot C_{4,1} \cdot C_{6,4} + C_{6,3} \cdot C_{4,2} \cdot C_{4,2} \cdot C_{6,3} +$
$+ C_{6,2} \cdot C_{4,3} \cdot C_{4,3} \cdot C_{6,2} + C_{6,1} \cdot C_{4,4} \cdot C_{4,4} \cdot C_{6,1} = 21\,672$

EA.4 $2.^\circ \text{ membro} = p \cdot A_{n-1,\,p-1} + A_{n-1,\,p} = p \cdot \dfrac{(n-1)!}{(n-p)!} + \dfrac{(n-1)!}{(n-p-1)!} =$

$$= \frac{p(n-1)! + (n-p)\,(n-1)!}{(n-p)!} =$$

$$= \frac{(n-1)!\,(n-p+p)}{(n-p)!} =$$

$$= \frac{n(n-1)!}{(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)!} =$$

$$= A_{n,p} = 1.^\circ \text{ membro}$$

EA.5 a) $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 = 2^6(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6) = 2^6 \cdot 6!$

b) $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n) = 2^n(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n) = 2^n \cdot n!$

c) $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} = \dfrac{11!}{2^5 \cdot 5!}$

d) $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n + 1) = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)(2n + 1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n} = \dfrac{(2n + 1)!}{n!2^n}$

EA.6 a) 1º membro $= p! - (p - 1)! = p(p - 1)! - (p - 1)! =$
$= (p - 1)!\,(p - 1) =$ 2º membro

b) Sabemos que:

$k! - (k - 1)! = (k - 1)!\,(k - 1)$

Fazendo $k = 2; 3; 4; \ldots; n$, temos:

$2! - 1! = 1!\,1$

$3! - 2! = 2!\,2$

$4! - 3! = 3!\,3$

....

$n! - (n - 1)! = (n - 1)!(n - 1)$

Somando membro a membro, vem:

$n! - 1 = 1!\,1 + 2!\,2 + 3!\,3 + \ldots + (n - 1)!\,(n - 1)$

EA.7 a) 1º membro $= \dfrac{1}{p!} - \dfrac{1}{(p + 1)!} = \dfrac{p + 1 - 1}{(p + 1)!} = \dfrac{p}{(p + 1)!} =$ 2º membro

b) Em $\dfrac{1}{p!} - \dfrac{1}{(p + 1)!} = \dfrac{p}{(p + 1)!}$,

fazendo $p = 1; 2; 3; 4; \ldots; n - 1$, vem:

$1 - \dfrac{1}{2!} = \dfrac{1}{2!}$

$\dfrac{1}{2!} - \dfrac{1}{3!} = \dfrac{2}{3!}$

$\dfrac{1}{3!} - \dfrac{1}{4!} = \dfrac{3}{4!}$

$\dfrac{1}{4!} - \dfrac{1}{5!} = \dfrac{4}{5!}$

....

$\dfrac{1}{(n - 1)!} - \dfrac{1}{n!} = \dfrac{n - 1}{n!}$

Somando membro a membro, vem:

$1 - \dfrac{1}{n!} = \dfrac{1}{2!} + \dfrac{2}{3!} + \dfrac{3}{4!} + \ldots + \dfrac{n - 1}{n!}$

Unidade 6 — Binômio de Newton

EA.1 a) 2º membro $= \dbinom{n}{n - p} = \dfrac{n!}{(n - p)![n - (n - p)]!} = \dfrac{n!}{(n - p)!p!} = \dbinom{n}{p} =$

$=$ 1º membro

b) 1º membro $= \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \dfrac{(n-1)!}{(n-p)!(p-1)!} + \dfrac{(n-1)!}{(n-p-1)!p!} =$

$$= \frac{(n-1)!\,p + (n-1)!(n-p)}{(n-p)!p!} =$$

$$= \frac{(n-1)!(p+n-p)}{(n-p)!p!} =$$

$$= \frac{(n-1)!n}{(n-p)!p!} = \frac{n!}{(n-p)!p!} =$$

$$= \binom{n}{p} = 2^{\text{o}} \text{ membro}$$

c) 1º membro $= \binom{n}{p} : \binom{n}{p-1} = \dfrac{n!}{(n-p)!p!} : \dfrac{n!}{(n-p+1)!(p-1)!} =$

$$= \frac{\cancel{n!}}{\cancel{(n-p)!}\, p\cancel{(p-1)!}} \cdot \frac{(n-p+1)\cancel{(n-p)!}\,\cancel{(p-1)!}}{\cancel{n!}} =$$

$$= \frac{n-p+1}{p} = 2^{\text{o}} \text{ membro}$$

EA.2 Para obter o coeficiente do termo em x^5, deveremos calcular os coeficientes dos termos em x^4 e x^5 do desenvolvimento de $(1-x)^9$, pois serão multiplicados por $(1+x)$.

Coeficiente do termo em x^5: $(-1)^5\binom{9}{5}$

Coeficiente do termo em x^4: $(-1)^4\binom{9}{4}$

Portanto, o coeficiente é $\binom{9}{4} - \binom{9}{5}$.

EA.3 a) Um binomial $\binom{n}{p}$ será máximo se:

$$\begin{cases} \binom{n}{p} \geqslant \binom{n}{p-1}, \text{ com } 0 < p \leqslant n \quad (1) \\ \binom{n}{p} \geqslant \binom{n}{p+1}, \text{ com } 0 \leqslant p < n \quad (2) \end{cases}$$

De (1), vem:

$$\frac{n!}{p!(n-p)!} \geqslant \frac{n!}{(p-1)!(n-p+1)!} \Rightarrow \frac{1}{p} \geqslant \frac{1}{n-p+1} \Rightarrow p \leqslant \frac{n+1}{2}$$

De ②, vem:

$$\frac{n!}{p!(n-p)!} \geqslant \frac{n!}{(p+1)!(n-p-1)!} \Rightarrow \frac{1}{n-p} \geqslant \frac{1}{p+1} \Rightarrow p \geqslant \frac{n-1}{2}$$

Portanto, $\frac{n-1}{2} \leqslant p \leqslant \frac{n+1}{2}$.

b) Se **n** é ímpar, então $n = 2k + 1$, com $k \in \mathbb{N}^*$.
Substituindo na relação provada no item **a**, vem:

$$\frac{(2k+1)-1}{2} \leqslant p \leqslant \frac{(2k+1)+1}{2} \Rightarrow k \leqslant p \leqslant k+1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p = k \text{ ou } p = k + 1.$$

Portanto, entre os binomiais de mesmo numerador $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}^*$, os de maior valor são $\binom{n}{k}$ e $\binom{n}{k+1}$.

c) Se **n** é par, então $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}^*$.
Substituindo na relação provada no item **a**, vem:

$$\frac{2k-1}{2} \leqslant p \leqslant \frac{2k+1}{2} \Rightarrow k - \frac{1}{2} \leqslant p \leqslant k + \frac{1}{2} \Rightarrow p = k.$$

Portanto, entre os binomiais de mesmo numerador $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}^*$, o de maior valor é $\binom{n}{k}$.

EA.4 Na expansão de $\left(1 + \frac{3}{5}\right)^{10}$, o termo máximo é o termo central:

$$T_6 = \binom{10}{5} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^5$$

EA.5 a) 1º membro $= p\binom{n+1}{p+1} + \binom{n}{p+1} =$

$$= p \cdot \frac{(n+1)!}{(n-p)!(p+1)!} + \frac{n!}{(n-p-1)!(p+1)!} =$$

$$= \frac{p(n+1)! + (n-p)n!}{(n-p)!(p+1)!} = \frac{n![p(n+1) + n - p]}{(n-p)!(p+1)!} =$$

$$= \frac{n!n\cancel{(p+1)}}{(n-p)!\cancel{(p+1)}p!} = n \cdot \frac{n!}{(n-p)!p!} =$$

$$= n\binom{n}{p} = 2^{\circ} \text{ membro}$$

b) 1º membro $= \binom{n+2}{p} - 2\binom{n+1}{p} + \binom{n}{p} =$

$$= \frac{(n+2)!}{(n-p+2)!p!} - 2 \cdot \frac{(n+1)!}{(n-p+1)!p!} + \frac{n!}{(n-p)!p!} =$$

$$= \frac{(n+2)! - 2(n+1)!(n-p+2) + n!(n-p+2)(n-p+1)}{(n-p+2)!p!} =$$

$$= \frac{n![(n+2)(n+1) - 2(n+1)(n-p+2) + (n-p+2)(n-p+1)]}{(n-p+2)!p!} =$$

$$= \frac{n![(n+2)(n+1) - (n+1)(n-p+2) - (n+1)(n-p+2) + (n-p+2)(n-p+1)]}{(n-p+2)!p!} =$$

$$= \frac{n![(n+1)p - (n-p+2)p]}{(n-p+2)!p!} = \frac{n!\cancel{p}\cancel{(p-1)}}{(n-p+2)!(p-2)!\cancel{(p-1)}\cancel{p}}$$

$$= \binom{n}{p-2} = 2^{\circ} \text{ membro}$$

Outro modo:

Da relação de Stifel, temos:

$$\binom{n+1}{p-1} + \binom{n+1}{p} = \binom{n+2}{p} \Longrightarrow \binom{n+2}{p} - \binom{n+1}{p} = \binom{n+1}{p-1}$$

$$\binom{n}{p-1} + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p} \Longrightarrow \binom{n+1}{p} - \binom{n}{p} = \binom{n}{p-1}$$

$$\binom{n}{p-2} + \binom{n}{p-1} = \binom{n+1}{p-1} \Longrightarrow \binom{n+1}{p-1} - \binom{n}{p-1} = \binom{n}{p-2}$$

Então:

$$1^{\circ} \text{ membro} = \left[\binom{n+2}{p} - \binom{n+1}{p}\right] - \left[\binom{n+1}{p} - \binom{n}{p}\right] =$$

$$= \binom{n+1}{p-1} - \binom{n}{p-1} = \binom{n}{p-2} = 2^{\circ} \text{ membro}$$

EA.6 Para facilitar, vamos dividir cada número por 100^{50}:

$$a = \frac{101^{50}}{100^{50}} = 1{,}01^{50}$$

$$b = \frac{99^{50} + 100^{50}}{100^{50}} = \frac{99^{50}}{100^{50}} + \frac{100^{50}}{100^{50}} \Rightarrow b = 0{,}99^{50} + 1$$

Vamos calcular $1{,}01^{50}$ e $0{,}99^{50}$ pelo binômio de Newton, aproximadamente:

- $1{,}01^{50} = (1 + 0{,}01)^{50} = 1 + \binom{50}{1}0{,}01 + \binom{50}{2}(0{,}01)^2 + \ldots + (0{,}01)^{50}$

$1{,}01^{50} = 1 + 0{,}5 + 0{,}1225 + 0{,}0098 + 0{,}00002303 + \ldots + (0{,}01)^{50}$

Usando até o 4º algarismo decimal, vem:

$1{,}01^{50} \simeq 1{,}6323$

- $0{,}99^{50} = (1 - 0{,}01)^{50} = 1 - \binom{50}{1}0{,}01 + \binom{50}{2}(0{,}01)^2 - \ldots - \binom{50}{49}(0{,}01)^{49} +$

$+ (0{,}01)^{50}$

$0{,}99^{50} = 1 - 0{,}5 + 0{,}1225 - 0{,}0098 + 0{,}00002303 - \ldots + (0{,}01)^{50}$

Usando até o 4º algarismo decimal, vem:

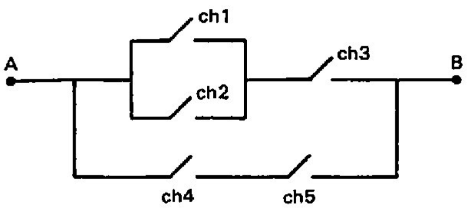
$0{,}99^{50} \simeq 0{,}6127$

Então, $b \simeq 1{,}6127$.

Portanto, $a > b$, ou seja, $101^{50} > 99^{50} + 100^{50}$.

Unidade 7 — Probabilidade

EA.1



Para que haja corrente entre os terminais A e B, as chaves podem estar posicionadas de 16 maneiras:

abertas: ch2, ch4, ch5
fechadas: ch1, ch3 $\left.\right\}$ $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{32}$

abertas: ch2, ch4
fechadas: ch1, ch3, ch5 $\left.\right\}$ $= \frac{1}{32}$

e, assim, sucessivamente.

Portanto, $p = \frac{16}{32} \Rightarrow p = \frac{1}{2}$.

EA.2 Se uma pessoa estiver mentindo, indicaremos por M e se estiver dizendo a verdade, por V. O conjunto das possibilidades seria:

(V; V; V), (V; V; M), (V; M; V), (M; V; V),
(M; M; M), (M; M; V), (M; V; M), (V; M; M).

Analisemos uma das possibilidades como, por exemplo: (M; M; V).

$$\begin{array}{ccc} \text{M}; & \text{M}; & \text{V} \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{C} & \text{B} & \text{A} \end{array}$$

A disse uma verdade; **B** está mentindo, isto é, está dizendo a **C** que **A** mente, e finalmente se **C** está mentindo, irá dizer que **B** disse que **A** falou a verdade.

Para resolver o problema, devemos resolver a probabilidade condicional dos eventos:

(I) — **A** fala a verdade (V; V; V) e (M; M; V)

(II) — **C** diz que **B** diz que **A** falou a verdade.

(M; V; M), (V; M; M), (M; M; V), (V; V; V)

(I) $\cap$ (II) = {(V; V; V), (M; M; V)}

$$p[(I) \cap (II)] = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{27}$$

$$p(II) = \frac{13}{27}$$

$$p(I/II) = \frac{\frac{5}{27}}{\frac{13}{27}} = \frac{5}{13}$$

EA.3 $\begin{cases} \text{50 bolas brancas} \\ \text{50 bolas pretas} \\ \text{2 urnas} \end{cases}$

Suponhamos que o condenado colocou **b** bolas brancas na urna 1 num total de k bolas. Então, na urna 2, teremos 100 − k bolas, sendo 50 − b bolas brancas. A probabilidade de o condenado escolher a urna 1 e sair em liberdade é:

$$p_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{k}$$

Enquanto isso, a probabilidade de ser posto em liberdade escolhendo a urna 2 é:

$$p_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{50 - b}{100 - k}$$

Então, a probabilidade de o condenado ser posto em liberdade é:

$$p = \frac{1}{2}\left[\frac{b}{k} + \frac{50 - b}{100 - k}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{50k + b(100 - 2k)}{(100 - k)k}\right]$$

- Se $k = 50$, **p** não depende de b: $p = \frac{1}{2}$.
- Vamos analisar $k < 50$ (se $k > 50$, análise semelhante será feita na urna 2).
  $k < 50 \Rightarrow 100 - 2k > 0 \Rightarrow$ **p** é máximo para **b** máximo $\Rightarrow$

  $$\Rightarrow b = k \Rightarrow p = \frac{1}{2}\left[\frac{150 - 2k}{100 - k}\right]$$

  A função é decrescente: $p(k) > p(k + 1)$; portanto, **p** é máximo para **k** mínimo ($k = 1$).

  $$p = \frac{74}{99} \Rightarrow p \simeq 75\%$$

Unidade 8 — Geometria de posição

EA.1 Se os quatro pontos forem coplanares, teremos um único plano.
Se os quatro pontos forem, três a três, não-coplanares, temos:

$$C_{4,3} = 4 \text{ planos}$$

EA.2 Seja a reta r.

Existe um ponto $A_1 \not\in r$; logo, existe o plano $\alpha_1 = pl(r, A_1)$.

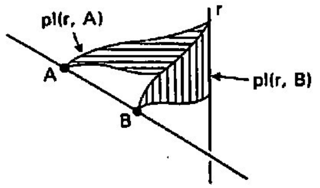
Existe um ponto $A_2 \not\in \alpha_1$; logo, existe o plano $\alpha_2 = pl(r, A_2)$.

Existe um ponto $A_3 \not\in \alpha_1$, $A_3 \not\in \alpha_2$; logo, existe o plano $\alpha_3 = pl(r, A_3)$.

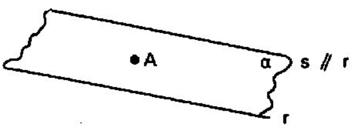
Repetindo o raciocínio, existem infinitos planos por r.

EA.3 Temos as possibilidades:

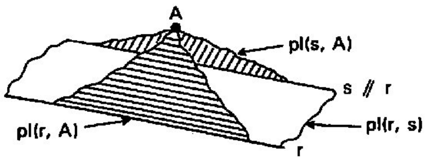
- Se $\overleftrightarrow{AB}$ for concorrente (ou paralela) com r, teremos um único plano.
- Se $\overleftrightarrow{AB}$ for reversa com r, teremos os planos pl(r, A) e pl(r, B):



EA.4 Se o ponto A pertencer ao plano (r, s), teremos um único plano:

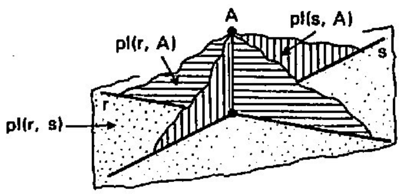


Se o ponto A não pertencer ao plano (r, s), teremos os planos pl(r, A), pl(s, A) e pl(r, s):

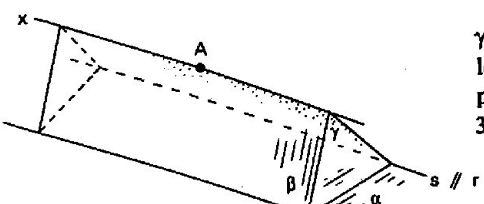


EA.5 Se A pertence ao plano (r, s), teremos um único plano.

Se A não pertence ao plano (r, s), teremos os planos pl(r, A), pl(s, A) e pl(r, s).

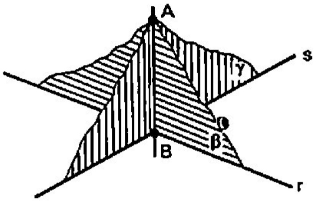


EA.6



$\gamma \cap \beta \neq \varnothing$, pois $A \in \gamma$ e $A \in \beta$; logo, $\gamma \cap \beta$ é uma reta x que passa por A; pelo teorema da intersecção de 3 planos, $x /\!/ r$ e $x /\!/ s$.

EA.7



$A \in \beta,\ A \in \gamma \Rightarrow A \in \beta \cap \gamma$ (I)

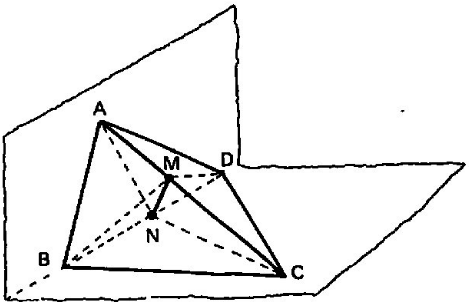
$\left.\begin{array}{l} B \in r,\ r \subset \beta \Rightarrow B \in \beta \\ B \in s,\ s \subset \gamma \Rightarrow B \in \gamma \end{array}\right\} \Rightarrow B \in \beta \cap \gamma$ (II)

Como $A \neq B$, de (I) e (II), vem:

$$\beta \cap \gamma = \overleftrightarrow{AB}$$

EA.8 Vide resposta do livro.

EA.9



$\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $\overline{BC} \cong \overline{AD}$

M: ponto médio de $\overline{AC}$

N: ponto médio de $\overline{BD}$

Devemos provar que:

$\overleftrightarrow{MN} \perp \overleftrightarrow{AC}$ e $\overleftrightarrow{MN} \perp \overleftrightarrow{BD}$

$$\left.\begin{array}{l} \overline{AB} \cong \overline{CD} \\ \overline{AD} \cong \overline{BC} \\ \overline{BD} \text{ comum} \end{array}\right\} \overset{LLL}{\Longrightarrow} \triangle ABD \cong \triangle BCD \Rightarrow \overline{AN} \cong \overline{NC}$$

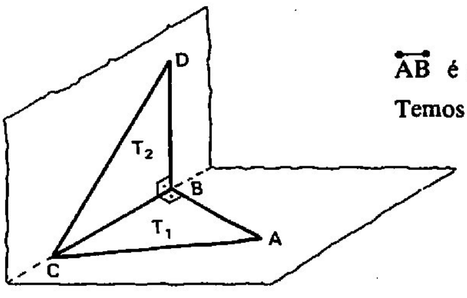
Logo, o $\triangle ANC$ é isósceles de base $\overline{AC}$, da qual M é ponto médio; então $\overline{MN}$ é a altura relativa a $\overline{AC}$, ou seja, $\overleftrightarrow{MN} \perp \overleftrightarrow{AC}$.

De forma análoga:

$\triangle ABC \cong \triangle ACD \Rightarrow \overline{BM} \cong \overline{MD} \Rightarrow \triangle BMD$ é isósceles de base $\overline{BD}$.

Como N é o ponto médio de $\overline{BD}$, resulta $\overleftrightarrow{MN} \perp \overleftrightarrow{BD}$.

EA.10



$\overline{AB}$ é ortogonal a $\overline{CD}$

Temos que provar que $\overline{BD}$ é ortogonal a $\overline{AC}$.

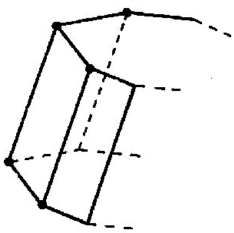
$$\left.\begin{array}{l} \overleftrightarrow{AB} \text{ perpendicular a } \overleftrightarrow{BC} \\ \overleftrightarrow{AB} \text{ ortogonal a } \overleftrightarrow{CD} \end{array}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{AB} \text{ é perpendicular ao plano (B, C, D)} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ plano (A, B, C) é perpendicular ao plano (B, C, D) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\overleftrightarrow{BD}$ é perpendicular ao plano (A, B, C) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\overline{BD}$ é ortogonal a $\overline{AC}$

EA.1 a)



Temos n arestas laterais, n arestas em cada base; logo, 3n arestas.

Outro modo:

De cada vértice partem três arestas; temos ao todo 2n vértices; então, obtemos $2n \cdot 3$ arestas, cada uma contada duas vezes. Logo, o n.º de arestas é $\frac{2n \cdot 3}{2} = 3n$.

b) Em cada face lateral (quadrilátero) temos duas diagonais; como são n faces laterais, temos 2n diagonais das faces laterais.

c) Cada base tem $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonais; portanto, temos $n(n-3)$ diagonais das bases.

d) Temos 2n vértices; ligando-os dois a dois obtemos a soma dos números de diagonais do prisma (x), diagonais das bases, diagonais das faces laterais e arestas:

$C_{2n,2} = x + n(n-3) + 2n + 3n \Rightarrow$

$\Rightarrow x = C_{2n,2} - n(n-3) - 2n - 3n \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{\cancel{2}n(2n-1)}{\cancel{2}} - n^2 + 3n - 5n \Rightarrow$

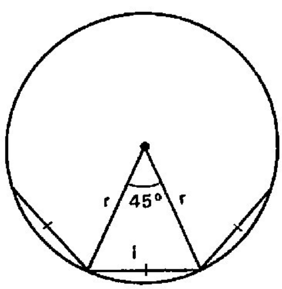
$\Rightarrow x = 2n^2 - n - n^2 - 2n \Rightarrow x = n(n-3)$.

e) A cada quatro vértices podemos obter uma intersecção na região interna de uma base. Logo, o número máximo dessas intersecções é $\binom{n}{4}$.

Não devemos esquecer os vértices: n intersecções.

Portanto, o número máximo de intersecções das diagonais é $\binom{n}{4} + n$.

EA.2 a)



Aplicando a Lei dos cossenos:

$l^2 = r^2 + r^2 - 2r \cdot r \cdot \cos 45°$

$l^2 = 2r^2 - \cancel{2}r^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}$

$l^2 = r^2(2 - \sqrt{2})$

$l = r\sqrt{2 - \sqrt{2}}$

b) Área da base: $A_b = 8 \cdot A_{triâng.}$

$A_b = \overset{4}{\cancel{8}} \cdot \frac{r \cdot r \cdot \text{sen } 45°}{\cancel{2}} = 2\sqrt{2}\, r^2$

Área lateral: $A_l = 8 \cdot A_{face}$

$A_l = 8 \cdot 2r \cdot r\sqrt{2 - \sqrt{2}}$

$A_l = 16\, r^2\sqrt{2 - \sqrt{2}}$

Área total:

$A_t = 2 \cdot A_b + A_l$

$A_t = 2 \cdot 2\sqrt{2}\, r^2 + 16\, r^2\sqrt{2 - \sqrt{2}}$

$A_t = 4r^2(\sqrt{2} + 4\sqrt{2 - \sqrt{2}})$

c) $V = A_b \cdot h$

$V = 2\sqrt{2}\, r^2 \cdot 2r$

$V = 4\, r^3\sqrt{2}$

EA.3 Analisemos a base antes e depois da deformação:

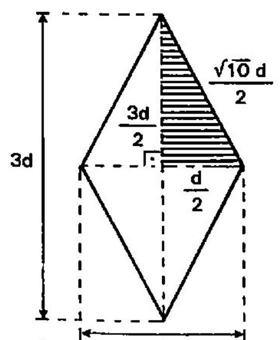


figura 1

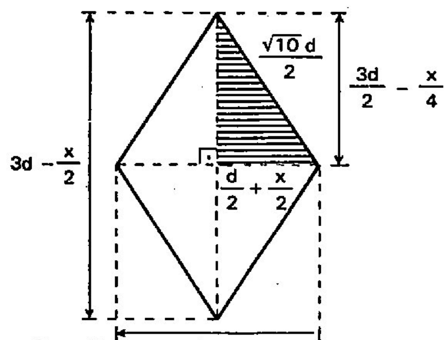


figura 2

Na figura 1, pelo teorema de Pitágoras aplicado ao triângulo hachurado, concluímos que o lado do losango vale $\frac{\sqrt{10}\,d}{2}$.

Na figura 2, no triângulo hachurado, vem:

$$\left(\frac{3d}{2} - \frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{d}{2} + \frac{x}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{10}\,d}{2}\right)^2 \Rightarrow d = \frac{5x}{4} \quad (1)$$

Do enunciado:

$$A_{figura\ 2} = A_{figura\ 1} + 84 \Rightarrow \frac{(d + x)\left(3d - \frac{x}{2}\right)}{2} = \frac{d \cdot 3d}{2} + 84 \quad (2)$$

Substituindo (1) em (2), vem: $x = 8$ m.

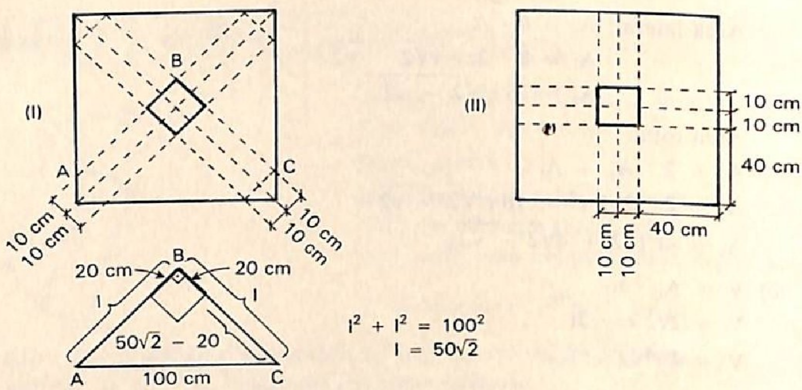
Logo, $d = 10$ m.

Portanto, temos:

antes da deformação: $d = 10$ m, $3d = 30$ m, área da base $= 150$ m^2 e volume $= 1\,500$ m^3

depois da deformação: $d + x = 18$ m, $3d - \frac{x}{2} = 26$ m, área da base $= 234$ m^2 e volume $= 2\,340$ m^3

EA.4 a)



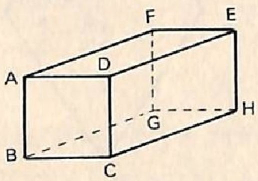
Como os dois prismas têm bases equivalentes entre si, basta comparar as suas alturas:

$50\sqrt{2} - 20 > 40 \Rightarrow$ prisma da figura I tem volume maior que o da figura II.

b) $\dfrac{V_I}{V_{II}} = \dfrac{20^2\,(50\sqrt{2} - 20)}{20^2 \cdot 40} \simeq \dfrac{50 \cdot 1{,}414 - 20}{40} \simeq 1{,}26$

Portanto, o volume maior é aproximadamente 126% do volume menor.

EA.5



E: espaço amostral é o conjunto dos pares das 12 arestas.

Logo, $n(E) = C_{12,2} = 66$

A: evento constituído por pares de arestas reversas entre si.

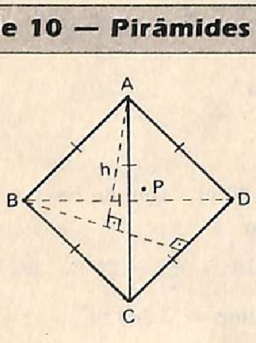
Cada aresta é reversa a duas arestas (por exemplo, $\overleftrightarrow{AB}$ é reversa a $\overleftrightarrow{EF}$ e $\overleftrightarrow{GH}$)

Logo, $n(A) = 12 \cdot 2 = 24$.

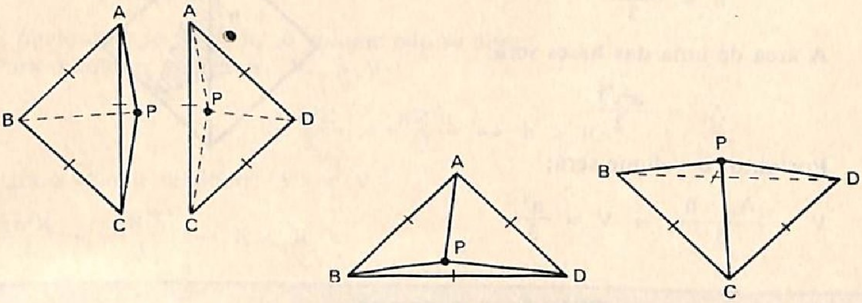
Portanto, $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(E)} = \dfrac{24}{66} = \dfrac{4}{11}$.

Unidade 10 — Pirâmides

EA.1



Tomando um ponto P interno e unindo-o aos vértices do tetraedro através de segmentos de retas, obteremos novos tetraedros:



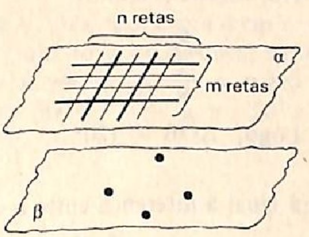
As distâncias do ponto P às bases serão as alturas dos tetraedros, relativas ao ponto P; o volume do tetraedro ABCD é igual à soma dos volumes dos 4 outros tetraedros.

Então:

$$\frac{\cancel{A_b} \cdot h}{\cancel{3}} = \frac{\cancel{A_b} \cdot h_1}{\cancel{3}} + \frac{\cancel{A_b} \cdot h_2}{\cancel{3}} + \frac{\cancel{A_b} \cdot h_3}{\cancel{3}} + \frac{\cancel{A_b} \cdot h_4}{\cancel{3}}$$

$$h = h_1 + h_2 + h_3 + h_4$$

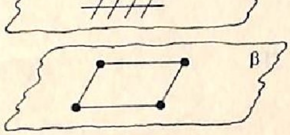
EA.2 a)



Para formar uma base quadrangular em α, deveremos tomar duas retas quaisquer de cada feixe de paralelas, como na figura. Estando o vértice em β (quatro pontos), o total de pirâmides será:

$$4 \cdot C_{m,2} \cdot C_{n,2}$$

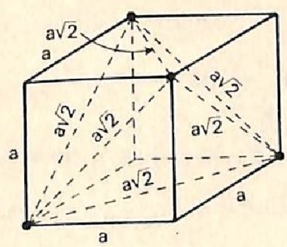
b)



Estando uma das bases em β, só teremos uma maneira de formar essa base (quatro pontos), enquanto a outra base pode ser formada de $C_{m,2} \cdot C_{n,2}$ maneiras.

Portanto, o nº de prismas será $C_{m,2} \cdot C_{n,2}$.

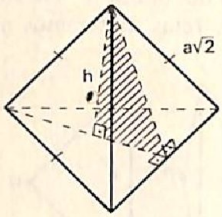
EA.3



Sendo a a medida do lado do cubo, cada lado do tetraedro regular irá medir $a\sqrt{2}$.

A altura do tetraedro assim obtido será:

$$h = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$



A área de uma das bases será:

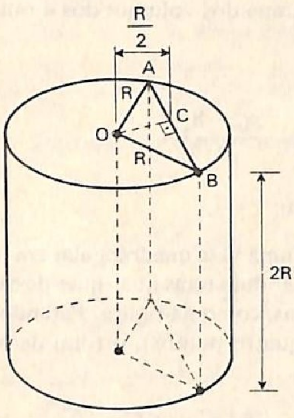
$$A_b = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$$

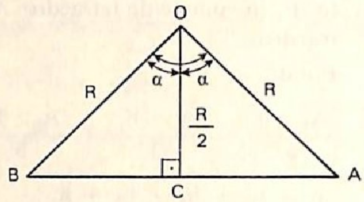
Portanto, o volume será:

$$V = \frac{A_b \cdot h}{3} \Rightarrow V = \frac{a^3}{3}$$

Unidade 11 — Cilindros e cones

EA.1





No $\triangle AOC$, temos:

$$\cos \alpha = \frac{\frac{R}{2}}{R} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

Logo, $A\hat{O}B = 120^\circ$

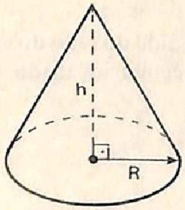
O volume do menor segmento cilíndrico será igual à diferença entre o volume de $\frac{1}{3}$ do cilindro e a do prisma de base triangular:

$$V_{seg.} = \frac{V_{cil.}}{3} - V_p$$

$$V_{seg.} = \frac{\pi R^2 \cdot 2R}{3} - \frac{1}{2} R \cdot R \cdot \text{sen } 120^\circ \cdot 2R$$

$$V_{seg.} = \frac{R^3(4\pi - 3\sqrt{3})}{6}$$

EA.2



$$V = \frac{\pi R^2 \cdot h}{3}$$

Se o calculista trocou R por **h**, então:

$$V' = \frac{\pi h^2 R}{3}$$

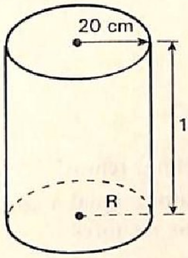
É óbvio que, se $R = h$, o volume não se altera.
Para o volume aumentar: $V' > V$

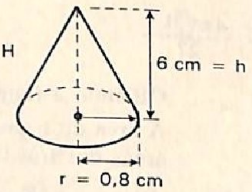
$$\frac{\pi h^2 R}{3} > \frac{\pi R^2 h}{3} \Rightarrow h > R$$

Para o volume diminuir: $V' < V$

$$\frac{\pi h^2 R}{3} < \frac{\pi R^2 h}{3} \Rightarrow h < R$$

EA.3





a) n = nº de pirulitos

$$n \cdot \frac{\pi r^2 h}{3} = \pi R^2 H$$

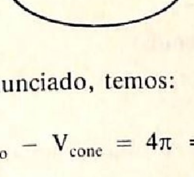
$$n \cdot \frac{\pi (0{,}8)^2 \cdot 6}{3} = \pi \cdot 20^2 \cdot 16$$

$$n = 5\,000$$

b) A nova altura será 4 cm e o número de pirulitos 7 500; seja **x** a medida do raio do novo pirulito; então:

$$7\,500 \cdot \frac{\pi x^2 4}{3} = \pi \cdot 20^2 \cdot 16 \Rightarrow x = 0{,}8 \text{ cm}$$

EA.4



(h, r, g) em P.A. $\Rightarrow (r - x; r; r + x)$
Aplicando o teorema de Pitágoras:
$(r + x)^2 = (r - x)^2 + r^2 \Rightarrow r = 4x$
Logo, $h = 3x$, $g = 5x$

Do enunciado, temos:

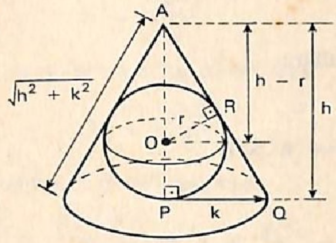
$$V_{cilindro} - V_{cone} = 4\pi \Rightarrow \pi r^2 h - \frac{\pi r^2 h}{3} = 4\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}\pi r^2 h = 4\pi \Rightarrow r^2 h = 6 \Rightarrow (4x)^2 \cdot 3x = 6 \Rightarrow x = 0{,}5$$

Portanto, $r = 4x = 4 \cdot 0{,}5 = 2$ m e $h = 3 \cdot x = 3 \cdot 0{,}5 = 1{,}5$ m.

Unidade 12 — Esferas

EA.1



Área da superfície esférica: $4\pi r^2$

Área da base do cone: πk^2

$$\frac{4\pi r^2}{\pi k^2} = \frac{4}{3} \Rightarrow r = \frac{k\sqrt{3}}{3} \quad (1)$$

$$\triangle AOR \sim \triangle APQ \Rightarrow \frac{r}{k} = \frac{h - r}{\sqrt{h^2 + k^2}} \quad (2)$$

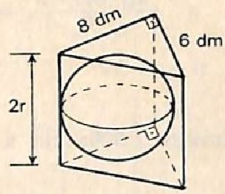
Substituindo (1) em (2) resulta: $h = \sqrt{3} \cdot k$.

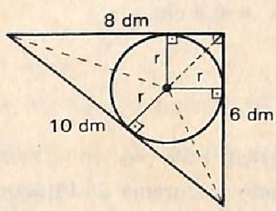
a) $V_{cone} = \frac{1}{3} \cdot \pi k^2 \cdot h \Rightarrow V_{cone} = \frac{1}{3} \cdot \pi k^3\sqrt{3}$

b) $V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow V = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{k\sqrt{3}}{3}\right)^3$

$$V = \frac{4\pi\sqrt{3}k^3}{27}$$

EA.2





Olhando a figura, de cima, temos:

A área do triângulo maior é igual à soma das áreas dos três triângulos menores:

$$\frac{10 \cdot r}{\cancel{2}} + \frac{8 \cdot r}{\cancel{2}} + \frac{6 \cdot r}{\cancel{2}} = \frac{6 \cdot 8}{\cancel{2}}$$

$24r = 48$

$r = 2$ dm

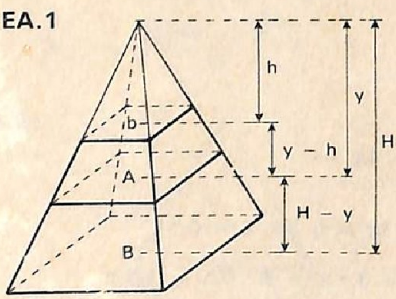
a) $V = \frac{4}{3} \cdot \pi r^3 \Rightarrow \boxed{V = \frac{32\pi}{3} \text{dm}^3}$

b) $V = \frac{A_b \cdot h}{2} \Rightarrow V = \frac{6 \cdot 8 \cdot 4}{2}$

$$\boxed{V = 96 \text{ dm}^3}$$

Unidade 13 — Troncos de pirâmides e cones

EA.1



Pelo enunciado, temos:

$$\frac{y - h}{H - y} = \frac{m}{n} \quad (1)$$

Pelas semelhanças de sólidos, temos:

$$\frac{b}{A} = \left(\frac{h}{y}\right)^2 \Rightarrow \frac{h}{y} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{A}} \Rightarrow h = \frac{y\sqrt{b}}{\sqrt{A}} \quad (2)$$

$$\frac{A}{B} = \left(\frac{y}{H}\right)^2 \Rightarrow \frac{y}{H} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} \Rightarrow H = \frac{y\sqrt{B}}{\sqrt{A}} \quad (3)$$

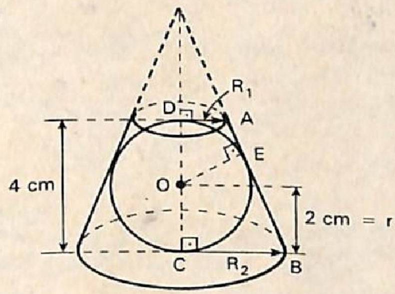
(2) e (3) em (1) fornece:

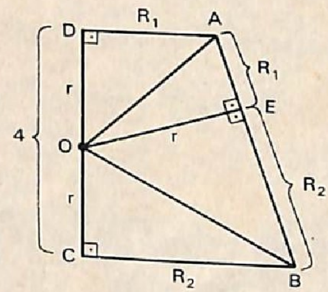
$$\frac{y - \dfrac{y\sqrt{b}}{\sqrt{A}}}{\dfrac{y\sqrt{B}}{\sqrt{A}} - y} = \frac{m}{n} \Rightarrow \frac{\sqrt{A} - \sqrt{b}}{\sqrt{B} - \sqrt{A}} = \frac{m}{n} \Rightarrow (\sqrt{B} - \sqrt{A})m = (\sqrt{A} - \sqrt{b})n \Rightarrow$$

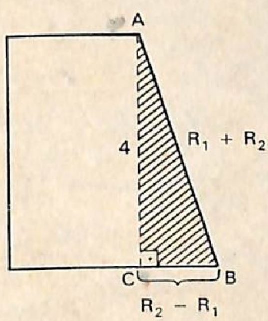
$$\Rightarrow (m + n)\sqrt{A} = m\sqrt{B} + n\sqrt{b} \Rightarrow \sqrt{A} = \frac{m\sqrt{B} + n\sqrt{b}}{m + n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \left(\frac{m\sqrt{B} + n\sqrt{b}}{m + n}\right)^2$$

EA.2







$$\left.\begin{array}{l}\triangle BCO \sim \triangle BEO \\ \triangle ADO \sim \triangle AEO\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}AE = R_1 \\ BE = R_2\end{array}\right.$$

Aplicando o teorema de Pitágoras:

$(R_1 + R_2)^2 = (R_2 - R_1)^2 + 4^2$

$R_1 \cdot R_2 = 4 \quad (1)$

$V_T = 2 \cdot V_e$

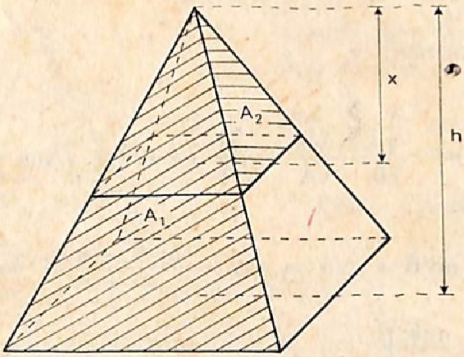
$$\cancel{\frac{4}{3}}\pi\,(R_1^2 + R_1 \cdot R_2 + R_2^2) = 2 \cdot \cancel{\frac{4}{3}\pi}2^3 \Rightarrow R_1^2 + R_2^2 = 12 \quad (2)$$

De (2), vem:

$$\left.\begin{array}{l}(R_2 + R_1)^2 - 2R_1R_2 = 12 \Rightarrow (R_1 + R_2)^2 = 20 \Rightarrow R_1 + R_2 = 2\sqrt{5} \\ (R_2 - R_1)^2 + 2R_1R_2 = 12 \Rightarrow (R_2 - R_1)^2 = 4 \Rightarrow R_2 - R_1 = 2\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_2 = (\sqrt{5} + 1)\ \text{cm} \ \text{ e } \ R_1 = (\sqrt{5} - 1)\ \text{cm}$$

EA.3 Vamos imaginar uma pirâmide regular de base quadrada.



Se a área lateral da pirâmide de altura x é igual à área lateral do tronco da pirâmide de altura $h - x$, então, $A_1 = 2 \cdot A_2$.

Sendo as bases paralelas, as pirâmides são semelhantes. Portanto:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{h^2}{x^2} \Rightarrow 2 = \frac{h^2}{x^2} \Rightarrow x = \frac{h\sqrt{2}}{2}$$

Unidade 14 — Poliedros

EA.1 $(4; V_1; V_2; A_1; A_2; 14)$ P.A.

Sendo **r** a razão da P.A., então:

$14 - 4 = 5r \Rightarrow r = 2$

Logo, $V_1 = 6$, $V_2 = 8$, $A_1 = 10$, $A_2 = 12$

Teorema de Euler: $V - A + F = 2$

$V_1 - A_1 + F_1 = 2 \Rightarrow F_1 = 6$

$V_2 - A_2 + F_2 = 2 \Rightarrow F_2 = 6$

EA.2 Poliedro convexo

$A = 15$

$S = 32 \cdot 90° = 2\,880°$

n_1 faces quadrangulares e n_2 pentagonais

Portanto:

$$\begin{cases} n_2 \cdot 540° + n_1 \cdot 360° = 2\,880° \\ \dfrac{5n_2 + 4n_1}{2} = 15 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos:

$n_1 = 5$ e $n_2 = 2$, ou seja, 5 faces quadrangulares e 2 pentagonais.

ISBN 85 02 00967