RELATÓRIO DA CLASSE-PILOTO - 1973

a. Dados de identificação:

ESCOLA: I. E. JOÃO XXIII

SÉRIE: 7ª

TURMA: A

Nº DE ALUNOS: 36

NÍVEL SÓCIO ECONÔMICO: MÉDIO PARA ALTO

IDADE: 12 ANOS

CARGA HORÁRIA: 6h/s

PROFESSORES: NUBEM AIRTON CABRAL MEDEIROS
OLGA REJANE CUNHA HAAG

PROFESSORA: OBSERVADORA: MÔNICA B. DOS SANTOS

b. Conteúdos programáticos: 1º semestre 73

- Lógica - teoria de dedução
- Função - sobrejeção, injeção, bijeção. Transformação, transposição. Permutação, composição.
- Número Cardinal -
- Atributos
- Operação binária interna: operação em N. Algumas propriedades.

Grupo das isometrias do tetraedo regular. Grupo simétricos- S_3, S_4, S_5.
Construção, de pelo menos, 20 operações.

Previsão para o 2º semestre 73

- Estruturas algébricas

Grupo: finito, infinito, cíclico, de Klein, produto cartesiano de grupos, gerador de um grupo cíclico, sistema de geradores, Grupos Simétricos, sub-grupo. Transladado, sub-grupo normal, Grupo simples. Sub-grupo alternado. Homomorfismo. Automorfismo Teorema fundamentais.

Anel - ideal

Corpo

Módulo

Espaço vetorial

- gerador
- vetores livres
- base

Anel dos Inteiros

c. Material:

- as próprias crianças
- blocos lógicos
- Quadrimath
- Trimath
- 2 x 2
- 3 x 2
- 4 x 2
- 5 x 2
- 3 x 3
- 4 x 3
- 5 x 3
- 5 x 4
- 3 x 2 x 2
- 3 x 3 x 3
- 4 x 3 x 2
- 4 x 4 x 2
- 4 x 4 x 4
- 5 x 5
- 5 x 5 x 5, alguns deles sendo também família de conjuntos.
- jogo da bola
- tetraedmo

d. Objetivos da classe-piloto:

" Experênciar uma metologia a partir de um ambiente rico matematicamente, com liberdade, com liberdade de escolha que leva às atividades diferenciadas".

e. Procedimento:

Os alunos desta turma haviam terminado o ano letivo de 1973 trabalhando em funções.

O conceito de função ainda não havia sido integrado. Começamos , pois, nesse conteúdo, trabalhando agora com ponto livre, ponto - simples e ponto múltiplo, analisando, primeiramente o gráfico sagital, partindo depois para a análise de:

- quadro cartesiano
- gráfico cartesiano
- conjunto de pares ordenados

<u>Observação</u>: Alguns grupos seguiram como o trabalho de lógica, fazendo as etapas mais avançadas, chegando a 6ª etapa, tendo como atividade culminante a teoria da dedução.

A partir da bijeção, fizemos a construção do conjunto dos nº naturais, como cardinais, colocando na mesma classe de equivalência todos os conjuntos equipotentes entre si.

Os alunos fizeram um estudo de pesquisa sobre o Cardinal, sendo os textos seguintes elaborados por eles.

(Texto em anexo)

Alguns grupos retomaram o conceito de função e começaram a trabalhar com os grupos simétricos
jogando com material concreto, principalmente com as próprias crianças, construindo " ao vivo ", por exemplo, todas as 24 permutações de $\mathcal{S}_4$. Nasceu aqui, de uma maneira natural, a notação da permutação e a pessagem da notação.

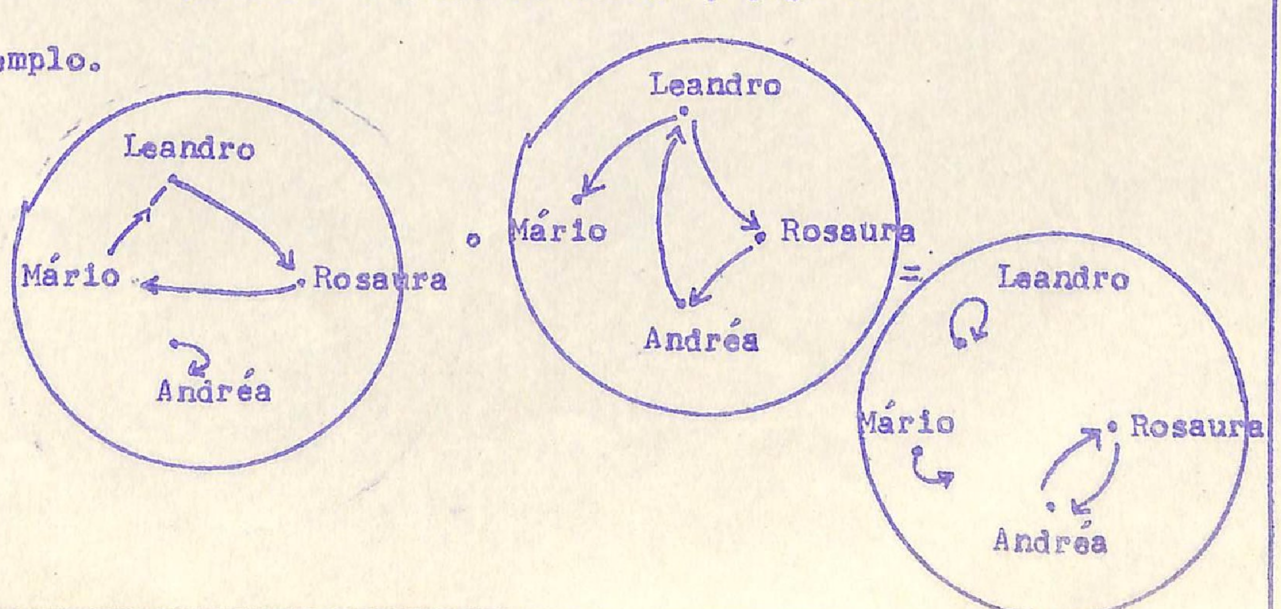
$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{matrix} \quad \text{para a notação} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

A construção do grupo das substituições $\mathcal{S}_4$, depois de ter sido construído pelas crianças " ao vivo ", foi representado nos respectivos cadernos. Outros foram além: fizeram todas as substituições do grupo simétrico $\mathcal{S}_5$. Alguns tentaram construir o grupo $\mathcal{S}_6$ mas desistiram (ainda bem ...).

(trabalhos das crianças em anexo)

A medida que as crianças iam formando as permutações, já tentavam compô-las. (ainda ao nível do jogo).

Exemplo.



(trabalhos em anexo)

Logo após, tomamos o tetraedro regular, as crianças tentavam descobrir as isometrias possíveis.

O trabalho decorreu num ambiente de entusiasmo e envolvimento, havendo muita vibração quando descobriram uma isometria.

Aqui os grupos trabalhavam diferenciadamente uns jogando com " a aldeia das 12 casas" , outros jogando com o tetraedro mesmo e outros - fazendo " ao vivo " as notações, servindo cada criança como sendo um vértice.

Houve aqui uma identificação das isometrias do tetraedro como - uma parte da $\mathcal{L}_4$.

Depois foi proposto em cada grupo de trabalho um " jogo de bola "(operações que definiam no conjunto das crianças grupos - cíclicos, grupo de Klein)

Interessante de se ressaltar neste ponto:

A partir do jogo da bola, cada grupo de trabalho quiz criar - suas próprias regras do jogo, surgindo assim pelo menos 20 operações-definidas em conjuntos finitas (os próprios grupos das crianças).

Num trabalho de integração à medida que um grupo apresentava - suas regras, os outros iam fazendo a tabela operatória daquela operação. Quando fizermos a análise das propriedades, retomaremos aquelas-operações para analisá-la.

(tabelas em anexo)

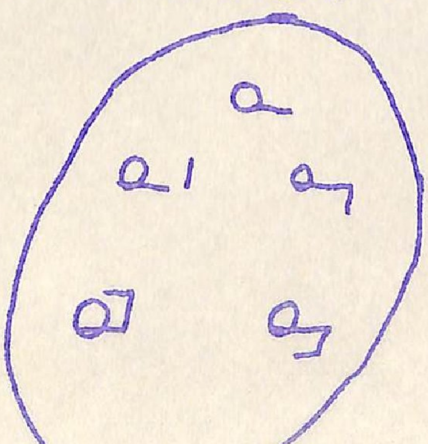
Sugerímos, depois, o grupo das 25 posições dos bracinhos.

(segue tabela anexa)

Jogamos muito com os alunos, propondo:

Ex:  = . . .

Depois, tomamos um subgrupo:



Pedimos que eles <u>buscassem</u> substituições que satisfizessem as seguintes condições:

- a soma das imagens deveria ser igual a imagem da soma.
- esta regra deve valer para qualquer par de posições que eu tomasse.

Surgiram então, os <u>automorfismos</u>.

Alguns alunos, descobriram o homomorfismo nulo.

Passamos à construção das tabelas de:

- Composição de automorfismos

(O)

- Soma de automorfismos.

(+)

Mostraram a distributividade da operação O em relação à operação + . Construindo assim o corpo sobre o qual o grupo das 25 posições dos braços (5 x 5) será espaço vertical

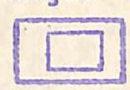
INSTITUTO EDUCACIONAL " JOÃO XXIII "
MATEMÁTICA - PROFESSORES: NUBEM E OLGA REGANE

G R U P O B R A N C O

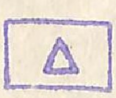
Tomem o material de 16 peças 2 x 2 x 2 x 2 em que cada uma delas consta de uma combinação de duas formas, uma grande e outra pequena.

1ª Tarefa:

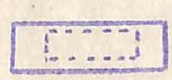
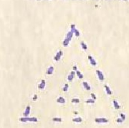
Organizem-no em 4 filas a 4, de tal maneira que que em cada fila todos os elementos tenham algo em comum.

Definam uma função para cada peça, a partir da determinação de um neutro, isto é, escolham uma das 16 peças como sendo o elemento neutro. Cada uma das outras terá ou não diferença quer de cor - ou de forma ou de ambas com relação a este. Estas diferenças caracterizarão sua função como operador. Por exemplo, seja  o elemento neutro. A peça  difere do neutro na forma da figura - grande e na cor da figura pequena. Esta é a sua função: trocar a forma da figura grande e a cor da figura pequena (As linhas tracejadas-representam a cor amarela).

2ª Tarefa:

Supondo  como elemento neutro, em que se transforma  pelo operador  ?

Em que se transforma  pelo operador  ?

Em que se modifica  pelo operador  ?

Faze, no mínimo, mais 5 transformações desta natureza.

3ª Tarefa:

Utilizando o operador , uma peça se transforma em . Qual é esta peça ?

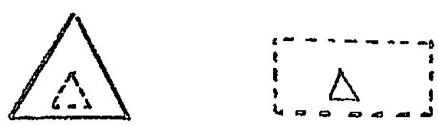
As peças de entrada e da saída de um determinado operador são:

entrada operador saída

Qual é o operador ?

4ª Tarefa:

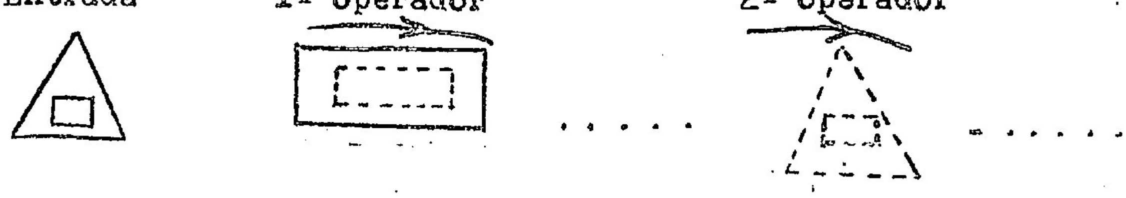
a) Faze agora, uma cadeia de 2 operadores, isto é, faze passar sucessivamente, por exemplo,  pelos 2 operadores abaixo:

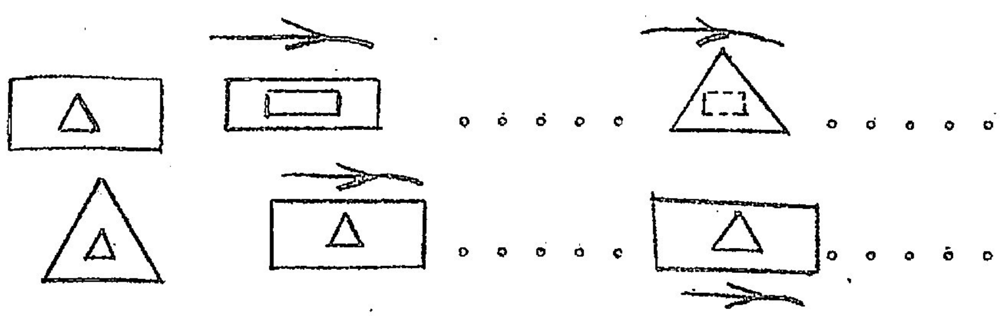
 tomados nesta ordem.

O que resulta no final ?

b) Desenha as peças convenientes nos pontinhos:

Entrada 1º operador 2º operador





5ª Tarefa:

É possível procurar nas cadeias de 2 operadores, acima, um só operador que prova substituir ambos? Analisa cada caso.

6ª Tarefa:

Sempre é possível substituir 2 operadores por um só.

Isto constitui operação. A operação composição dos operadores (∘) é fechada em D ?

Isto é,: Dados dois operadores quaisquer x e y, existe $x \circ y$ e é único em D ? D é o conjunto das 16 peças.

Existe um elemento neutro ?

Cada elemento possui um elemento inverso?

Quem é o inverso de cada elemento?

A operação composição de operadores é associativa?

A operação composição de operação em D, é comutativa?

<u>7ª Tarefa:</u>

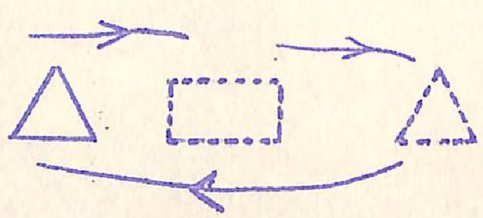
Definimos uma operação externa $\circ$ de

$C = \{$ △ , △ , ▭ , ▭ $\}$ sobre D.

Operar ▭ sobre qualquer peça de D significa levá-la ao elemento neutro ▭ Por ex: ▭ $\circ$ ▭ = ▭

Operar ▭ sobre qualquer peça de D significa resultar da mesma ▭ $\circ$ △ = △

Operar △ significa fazer as seguintes trocas:



1) isto é, se a peça possui 1 △ (tanto grande como pequeno) este se transformará em seu tamanho explicativo em ▭

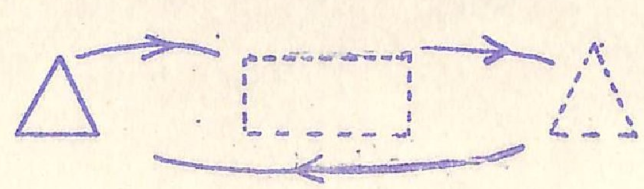
2) Se a peça possui um ▭ este se transformará em △

3) Se a peça possui um △ este se transformará em △

4) Se a peça tiver um ▭ este se manterá tal qual.

Por ex: △ $\circ$ ▭ = △

Operar △ significa fazer as trocas seguintes:



da mesma forma que no caso precedente.

Exemplo: 

Realiza várias vezes esta operação observando os resultados.

8ª Tarefa: **Conquista do Castelo**

Imaginamos que cada uma das 16 peças de D é um castelo de propriedade de um rei. O rei está disposto a doar alguns castelos e nos permite conquistar outros com os que nos foram doados, se operarmos com eles.

Pode-se usar a operação externa o dos elementos de C assim como a operação o de D.

Com um só castelo recebido é possível conquistar todos os outros?

Com dois castelos quaisquer é possível conquistar todos os outros?

9ª Tarefa:

Resolvida a questão dos castelos iniciais doados pelo rei com os quais se consegue conquistar todos os outros, caracteriza cada peça do material pelos elementos de C, com os quais deves operar esses iniciais para consegui-la.

10ª Tarefa:

Escolha outros castelos iniciais com os quais seja possível conquistar todos os outros.

11ª Tarefa:

Caracteriza novamente, cada peça de D com os elementos de C com os quais deves operar sobre os iniciais para consegui-la.

12ª Tarefa:

Descobre como obter cada elemento de C que figura na 2ª caracterização a partir dos que aparecem na 1ª caracterização. Esta relação deve ser válida para todos os 16 casos.

INSTITUTO EDUCACIONAL " JOÃO XXIII "

MATEMÁTICA - PROFESSORES: NUBEM E OLGA REGANE

GRUPO VERMELHO

FIGURAS: ○, □ $\boxed{\circ}$

1ª Tarefa: Construção do Material

As figuras devem ser colocadas nos setores dos discos obedecendo as seguintes restrições:

a) Sempre que entrar uma figura de uma cor, entram todas desta cor;

b) Em cada setor não pode haver duas peças iguais (da mesma forma e da mesma cor);

c) Em cada disco usar no máximo três cores.

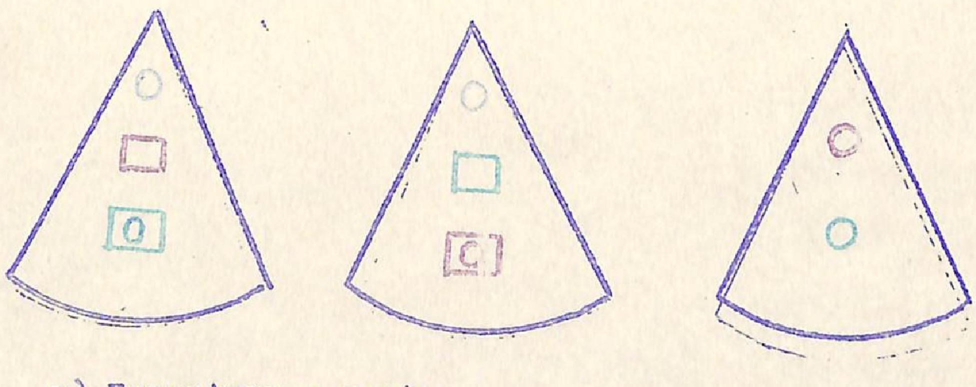
d) Seguindo o sentido anti-horário, a ordem de colocação das figuras nos setores deve ser: disco, quadrado e o par formado pelos dois.

Encontrar todas as combinações possíveis, seguindo estas instruções.

2ª Tarefa:

Vamos operar com soma módulo 2 cor a cor isto é,: cada figura anula ela própria

Ex:

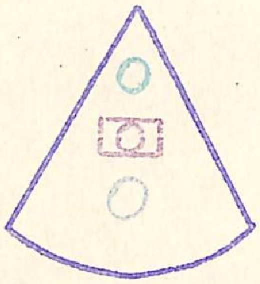
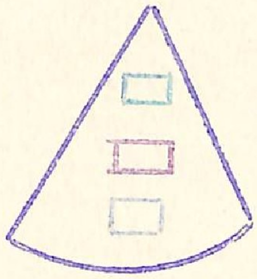
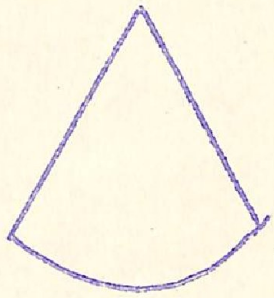


a) Encontrar o neutro

b) Encontrar o inverso de cada elemento (setor)

c) Relacionar a operação, numa mesma cor com pelo menos 5 jogos já feitos

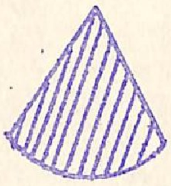
d) Fazer continhas do tipo

 ⊕  = 

3ª Tarefa:

Definam 4 operadores:

O operador Redutor r que funcionar assim:

r qualquer setor = 

O operador identidade *i* que funcione assim:

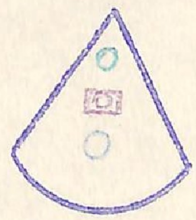
i qualquer setor = mesmo setor

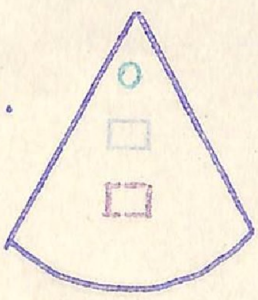
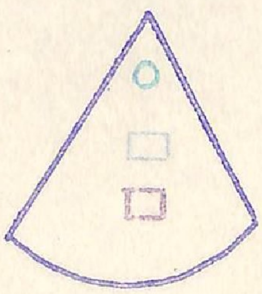
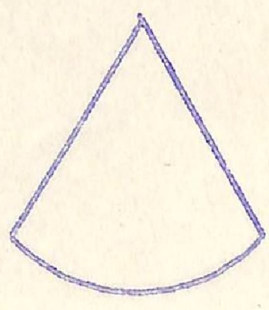
O operador direita *d* que funcione assim:

d qualquer setor = direita desse setor

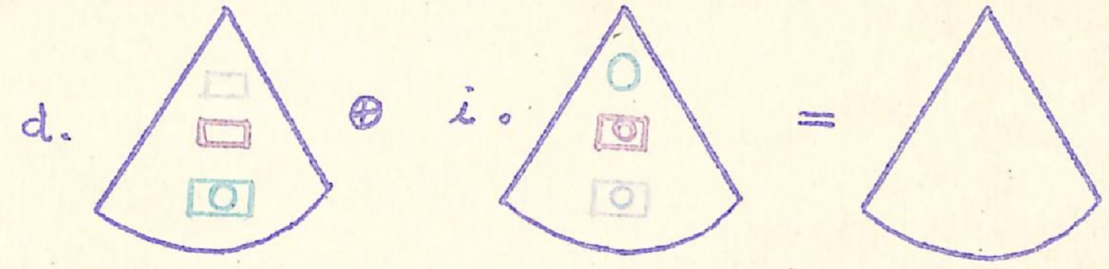
O operador esquerda e que funcione assim:

e qualquer setor = esquerda com esse setor

Faça várias continhas do tipo *d* 

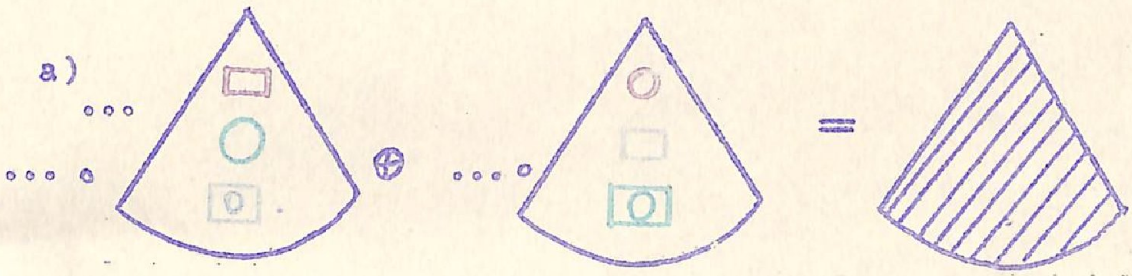
e.  ⊕ *i*  = 

2)



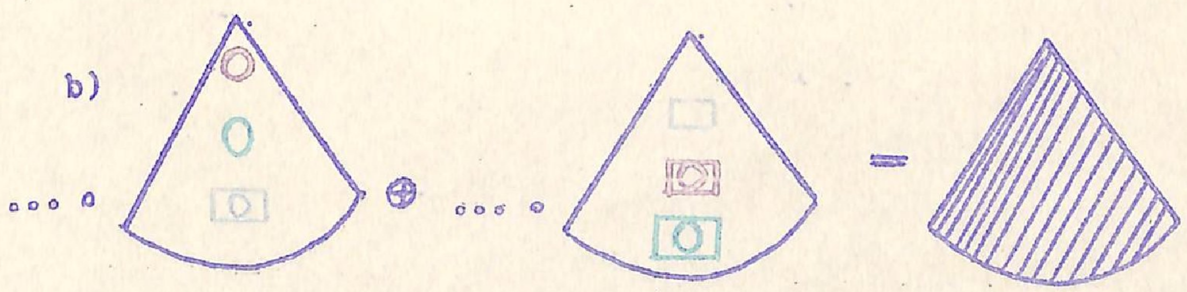
3) Completa com operadores convenientes, de forma que as continhas estejam corretas:

a)



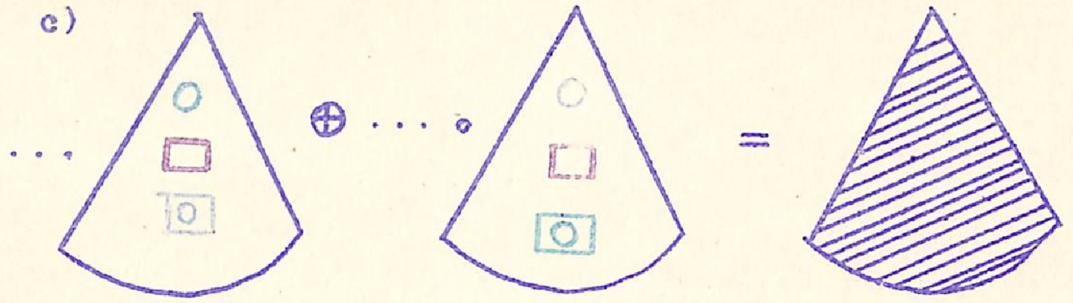
Há outra resposta ? Qual ?

b)



Há outra resposta ? Qual ?

c)



Há outra resposta ? Qual ?

d) Encontra pares de setores tais que a única combinação para encontrar o setor neutro  é conseguida com os operadores todos redutores. (aqueles que só existe uma resposta)

4ª Tarefa:

Mostrar que o operador d define um homomorfismo isto é :

$$d \circ (a \oplus b) = d(a) \oplus d(b)$$

para quaisquer que sejam a, b setores

5ª Tarefa:

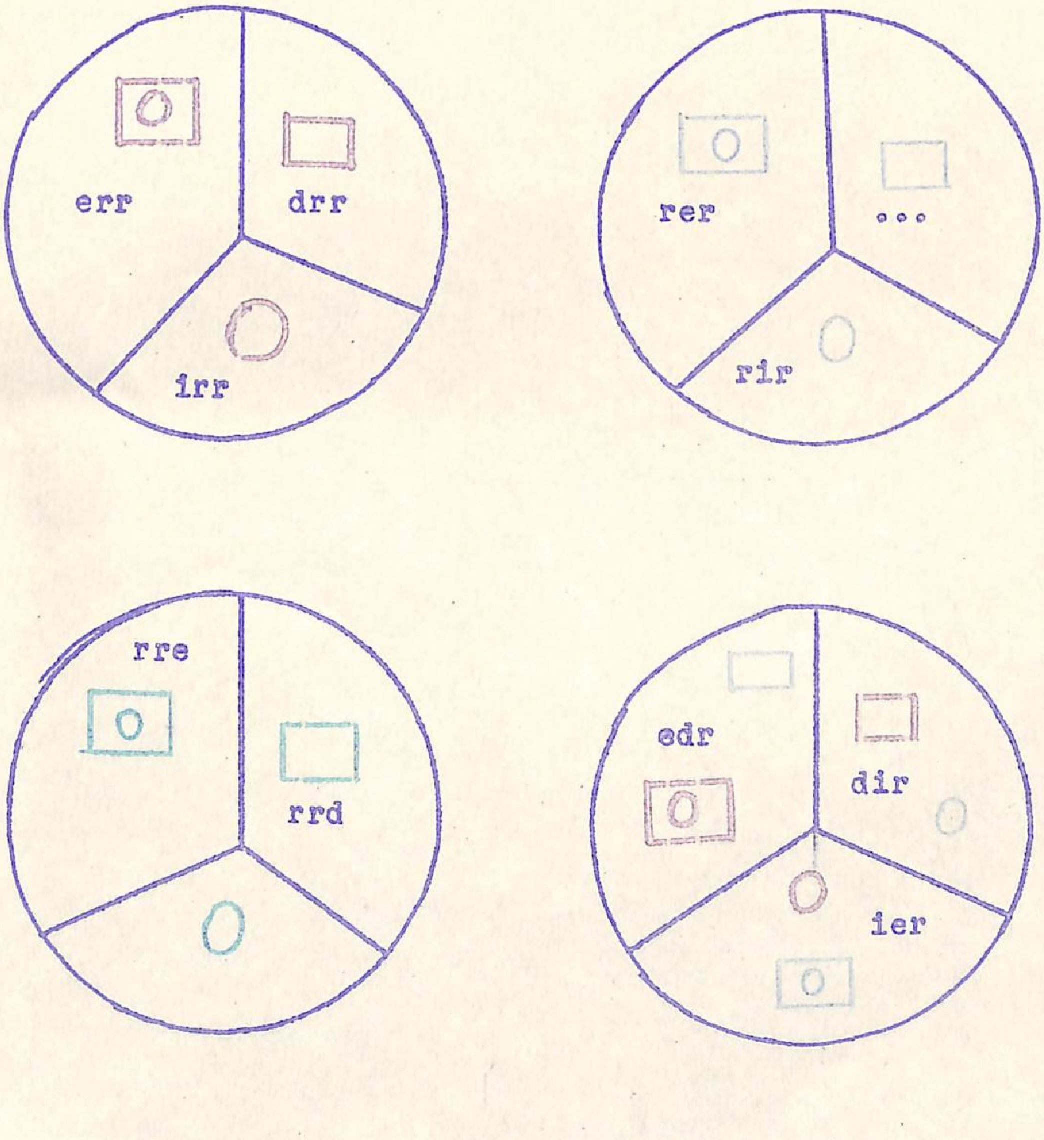
- Quem é : direita da direita ?
- Quem é : direita da esquerda?
- Quem é : esquerda da esquerda da esquerda?
- Será que $(d \circ c) \circ d = d \circ (e \circ d)$?
- Se eu aplicar numa peça (setor) o operador direita e logo depois no resultado o operador esquerda, o que acontece?
- Tenta fazer uma tábua operatória dessa composição de operadores.
- O que acontece se eu tomar qualquer operador e aplicar no setor neutro  ?
- Será que a direita do inverso de um elemento é igual o inverso da direita desse mesmo elemento?
- Como poderíamos definir uma soma (+) entre os operadores - r, i, d, e ?
- Será que o é distributiva em relação à soma definida anteriormente?

6ª Tarefa:

Vamos encontrar uma maneira de escrever cada setor como uma terna ordenada de operadores extremos.

(codificar cada setor).

Assim, por exemplo, podemos tomar -



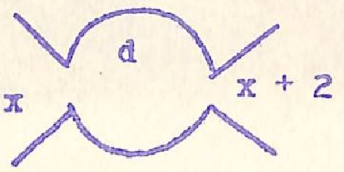
INSTITUTO EDUCACIONAL " JOÃO XXIII "
MATEMÁTICA - PROFESSORES: NUBEM E OLGA REGANE

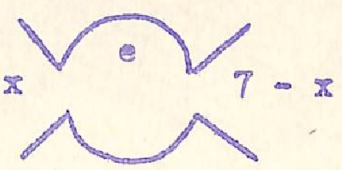
GRUPO AZUL

1) No Conjunto $G = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$,

definamos dois operadores:

- O operador " mais dois " d que atuando em qualquer nº transforma-o neste nº somado com 2 (ciclicamente , módulo 8).
- O operador " complemento " c que atuando em qualquer nº - transforma-o no complemento desse número em relação a 7:





$x \xrightarrow{d} x + 2$ $\qquad$ $x \xrightarrow{c} 7 - x$

Assim, por exemplo :

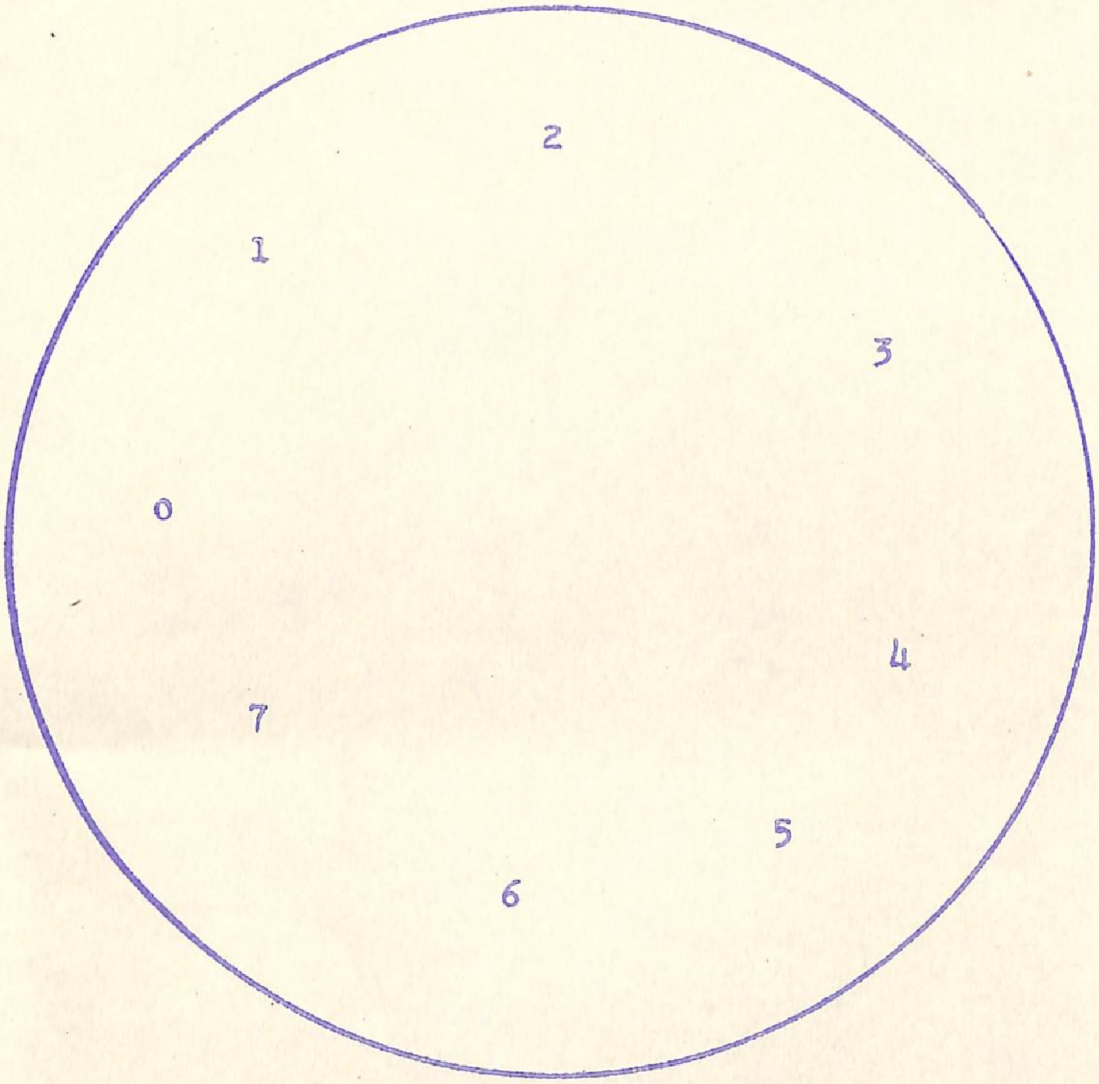
d (3) = 5 $\qquad$ c(3) = 4

d (6) = 0 $\qquad$ c (7) = 0

Posto isso, tentar encontrar uma maneira de passar do nº 3 a cada um dos nºs de G aplicando um ou mais operadores sucessivamente (dois já estão feitos abaixo). Podes fazer cadeias- de máquinas

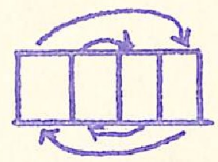
$3 \xrightarrow{cdd} 0$
$3 \xrightarrow{ddd} 1$
2
4
5
6
7

Podes agora fazer um gráfico verificando se sempre é possível passar de um nº a outro aplicando somente os operadores d e c.

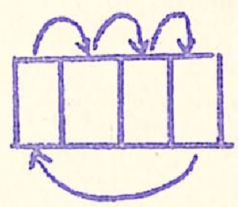


2) Definamos:

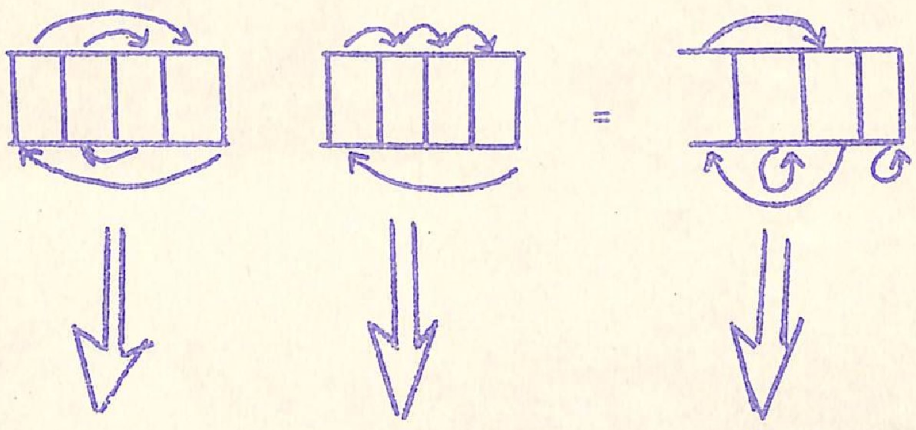
- Um operador A que faz assim:



- Um operador B que faz assim:

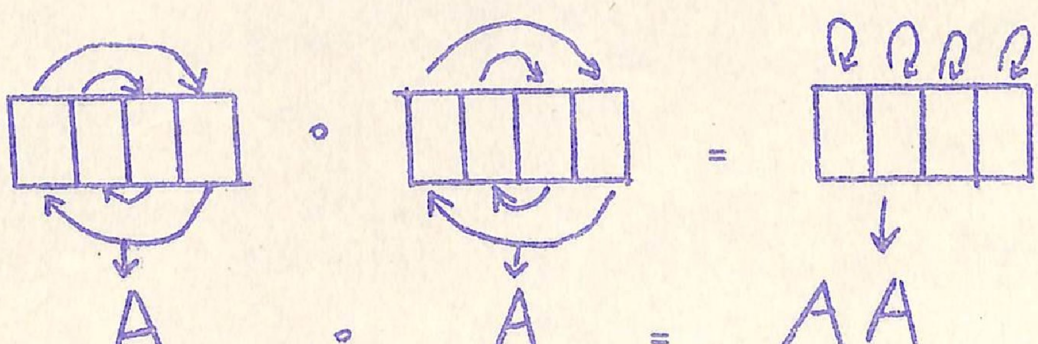


Podemos pensar em combinar (compor) estes operadores ⊚ assim, por exemplo:



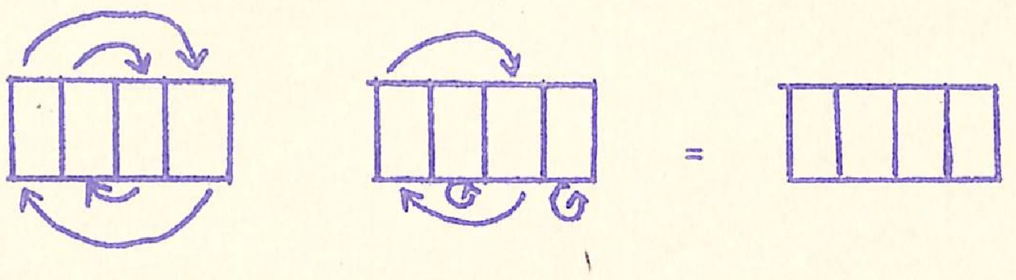
$$A \circ B = AB$$

Outro exemplo:



$$A \circ A = AA$$

Tente agora compor:

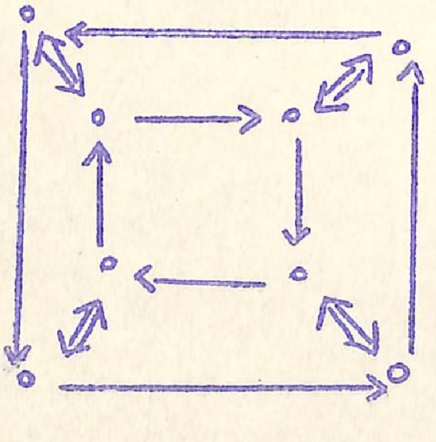


Faze outras composições

Quantas vezes tenho que aplicar o operador A para voltar à posição inicial (começando em qualquer quadradinho de barra?).

Mesma pergunta para o B.

Tenta descobrir todas as respostas que obtenho quando componho - duas barras quaisquer.



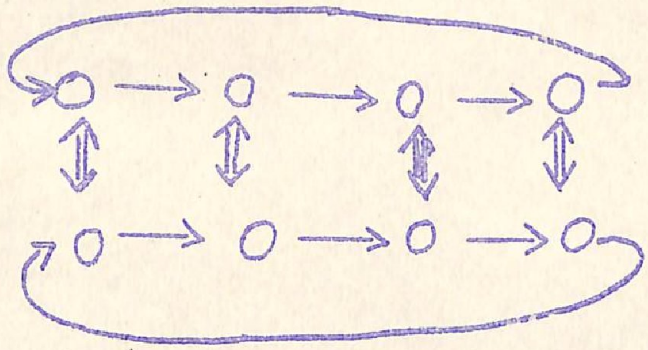
Escolhe um ponto qualquer como ponto inicial. Quantas estreitas deves andar para voltar à posição inicial? Quantas largas?

Tenta encontrar vários caminhos que te levam desse ponto inicial a determinado ponto.

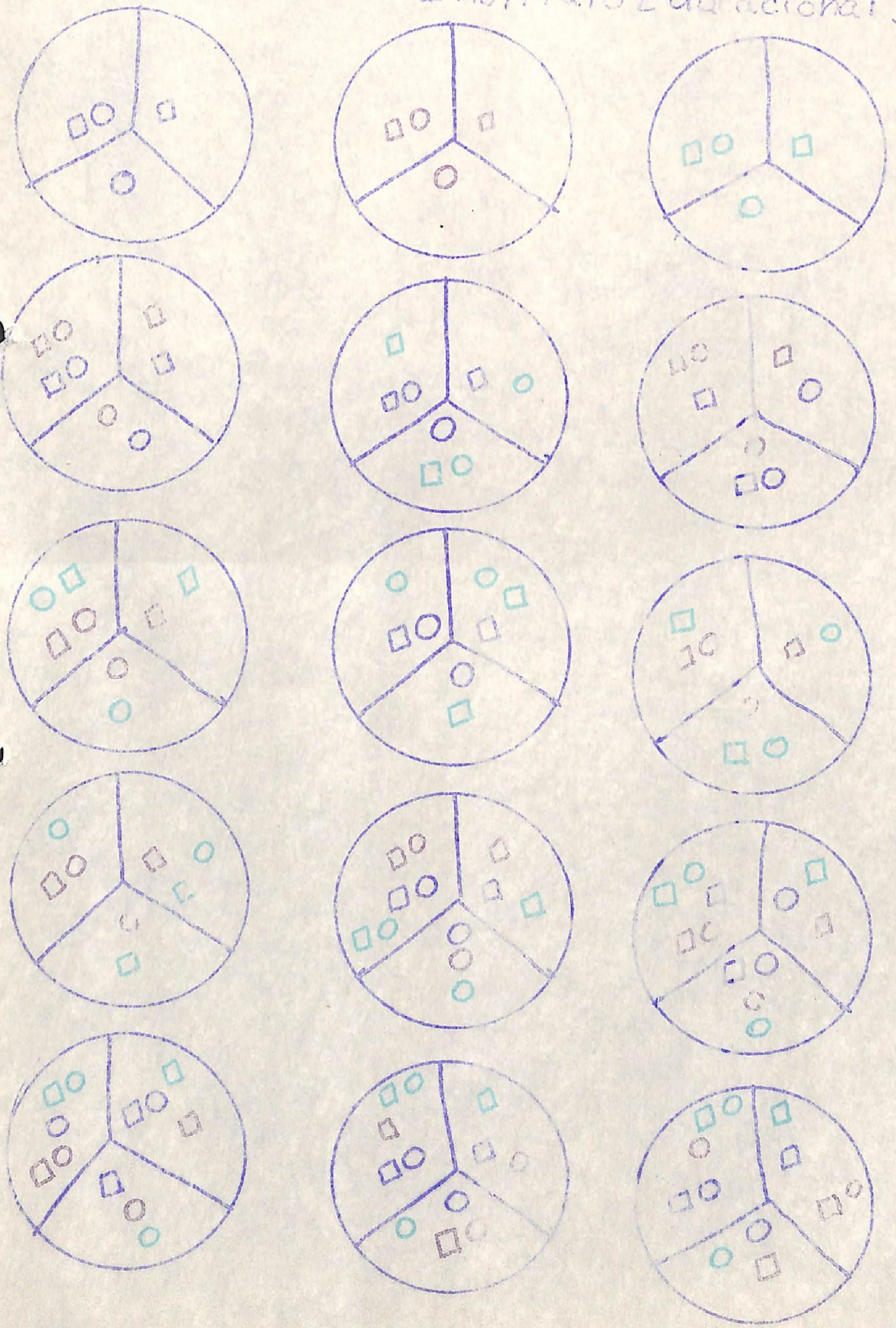
De todos esses caminhos, equivalentes fica com aquele que for o mais curto.

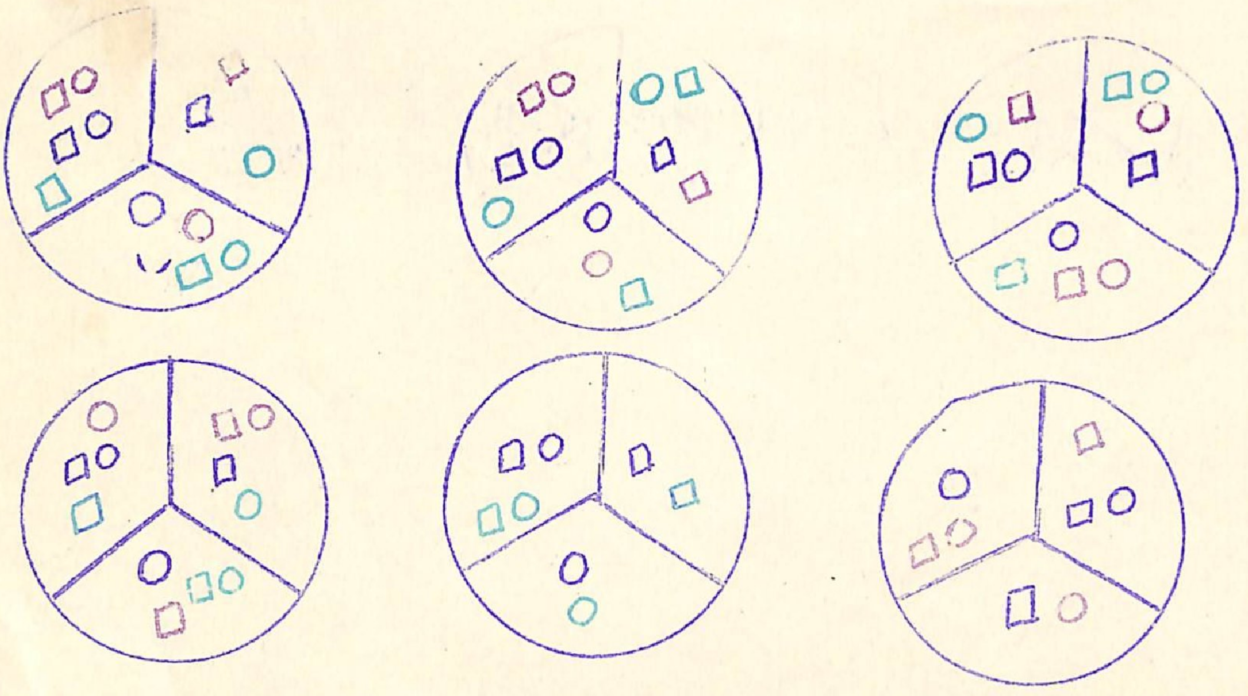
Partindo do mesmo ponto inicial, encontra o caminho mais curto até chegar a cada um dos 8 pontos do diagrama.

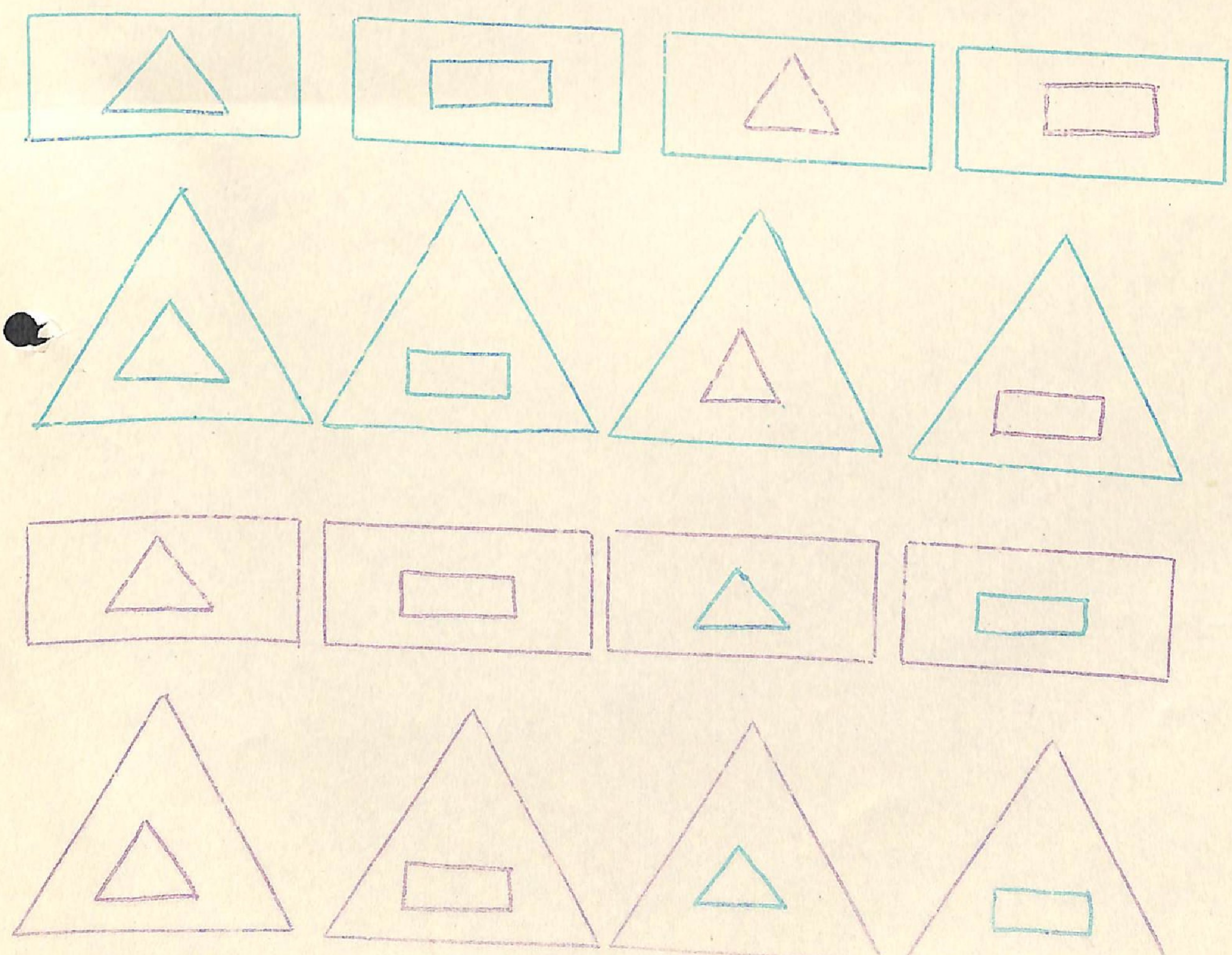
Experimenta agora definir uma operação entre os caminhos.

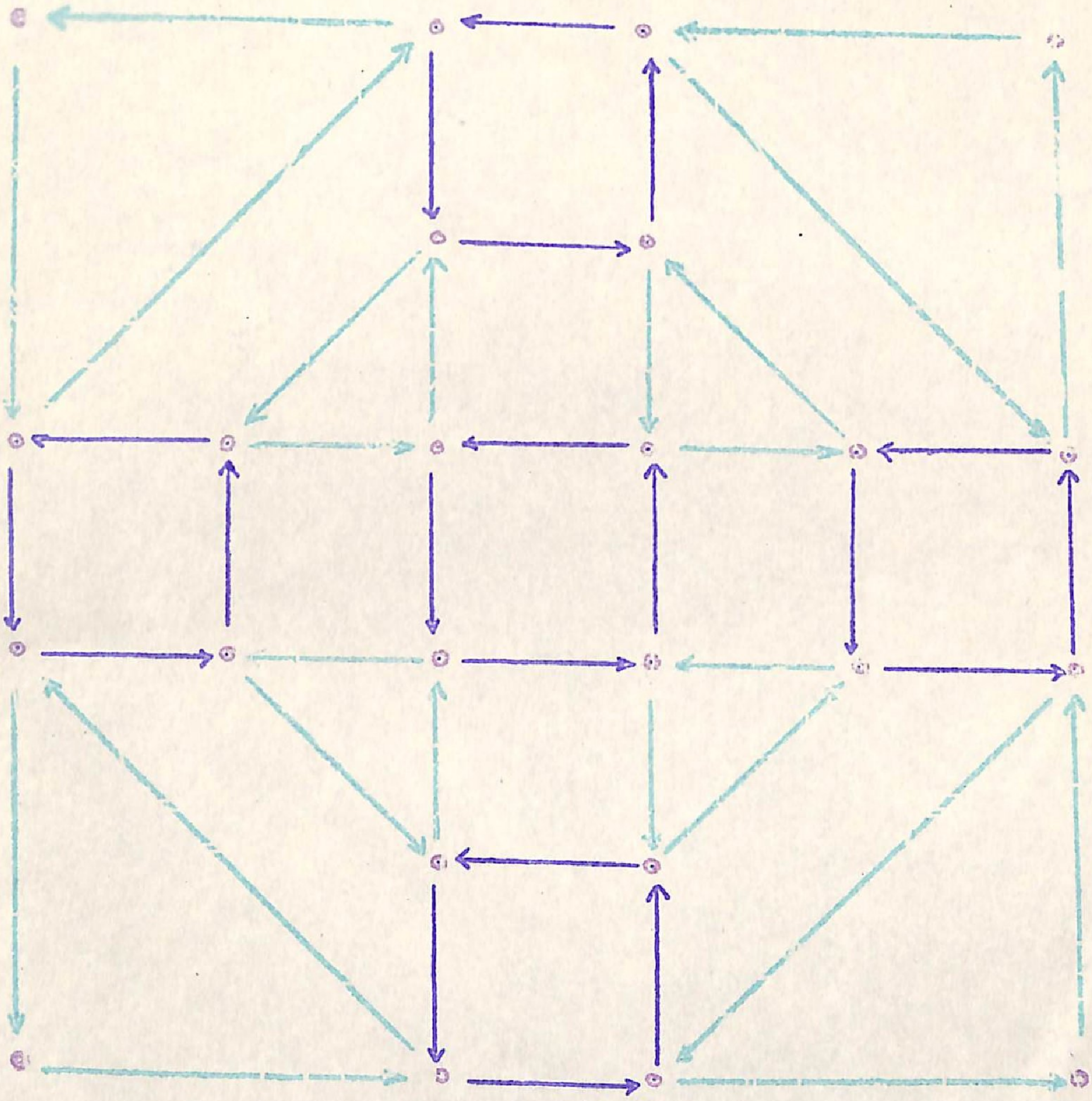


Material utilizado na aula demonstração da 7ª série do Instituto Educacional João XXIII

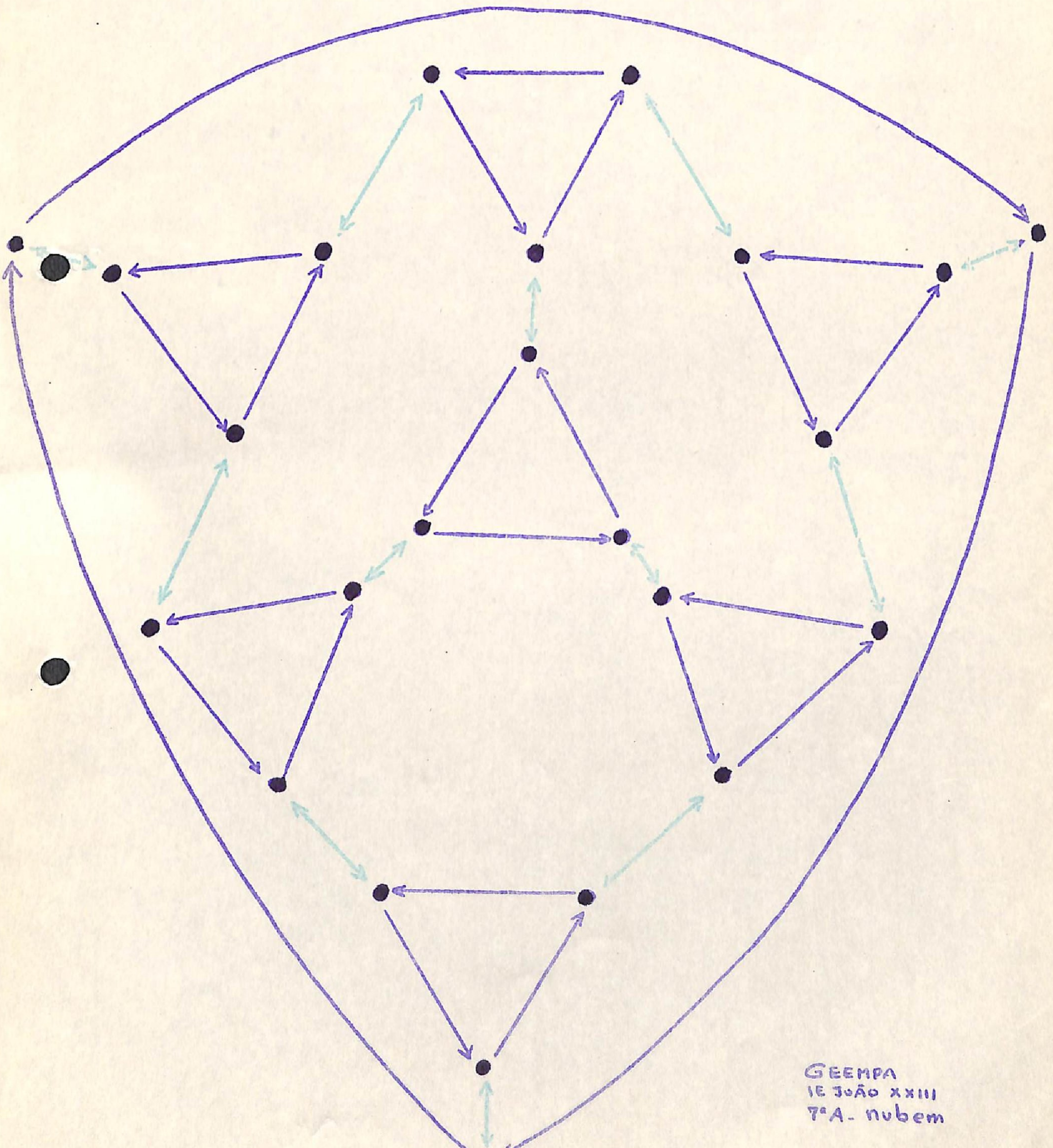




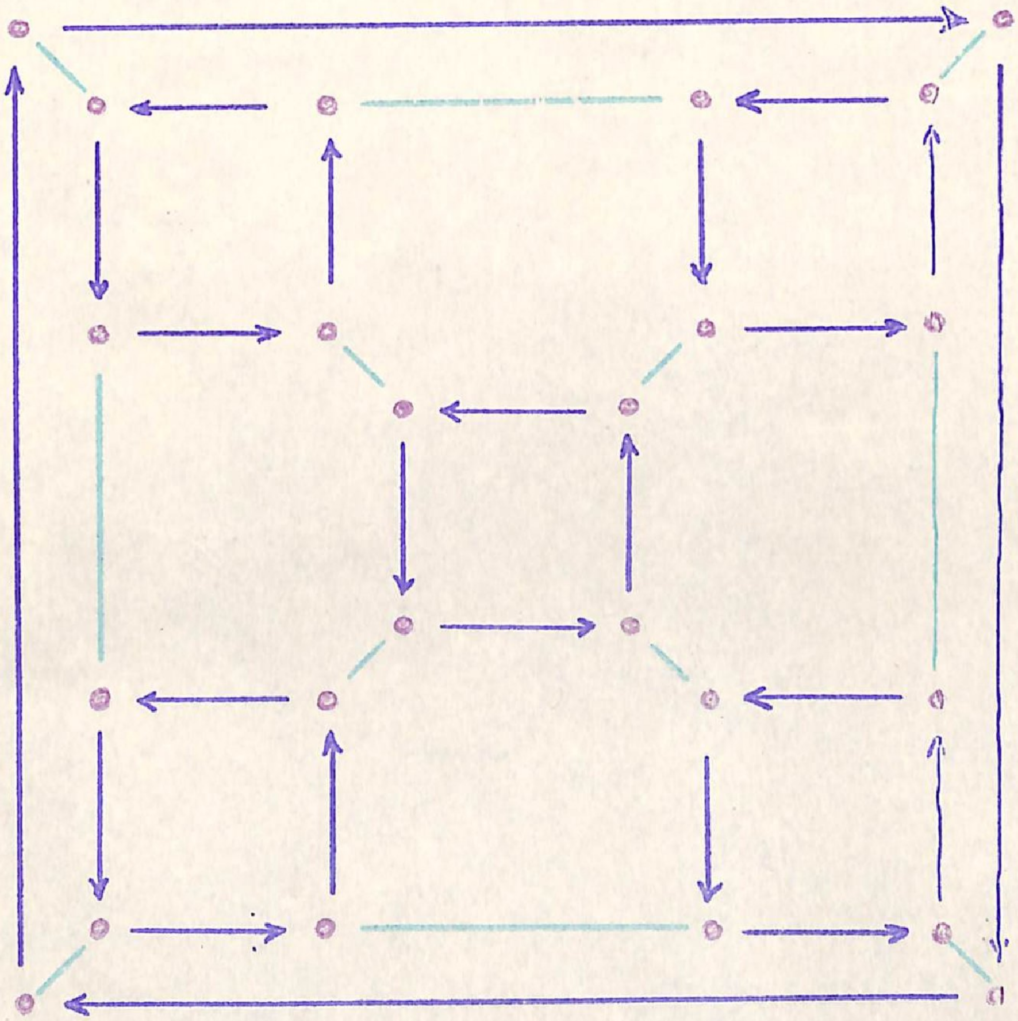




GEEMPA
IE JOÃO XXIII
7ª A. nubem



GEEMPA
IE JOÃO XXIII
7ªA- nubem



GEEMPA
IE JOÃO XXIII
7ª A - nubem