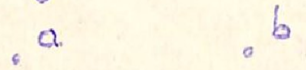
A Geometria pelas transformações

Estudo da Equipolência

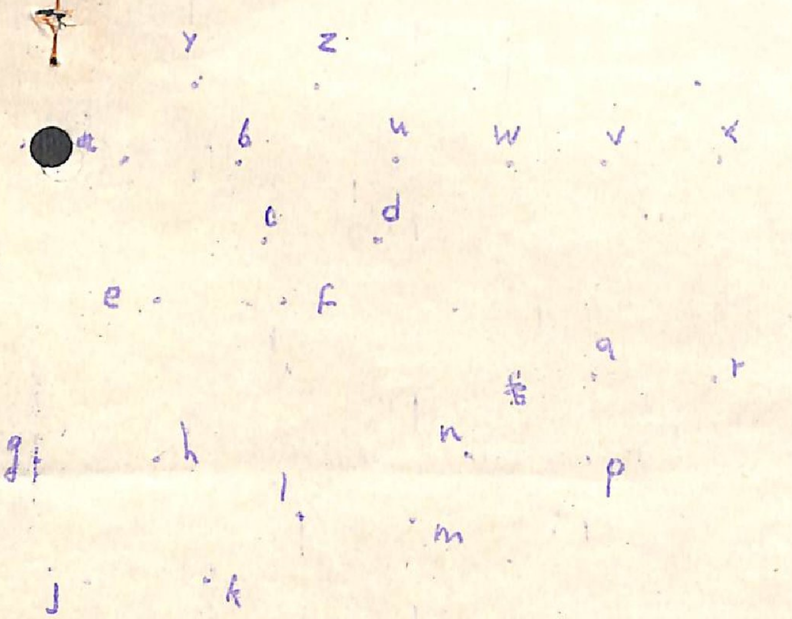
- Dados dois pontos $a, b \in \Pi$, vamos construir um paralelogramo abcd tendo $[ab]$ como lado.



O par (c,d) deve ser construído a partir do par (a,b).
Construído o paralelogramo, dizemos que os pares (a,b) e (c,d) são <u>ligados</u> por um paralelogramo.

- Vamos repetir o procedimento acima, ligando por um paralelogramo os pares:

(y,z) e (a,b); (a,b) e (c,d); (c,d) e (e,f); (e,f) e (g,h); (g,h) e (j,k); (j,k) e (l,m); (l,m) e (n,p); (n,p) e (q,r); (c,d) e (s,t); (s,t) e (u,w); (s,t) e (v,x).

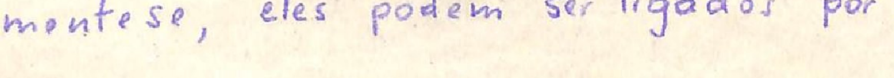


Os pares assim construídos são chamados <u>equipolentes</u> o que se nota:
$(a,b) \uparrow (c,d) \uparrow (e,f)$, etc...

- Dois pares de pontos não alinhados são equipolentes, se, e somente se, eles podem ser ligados por um paralelogramo

$(a,b) \uparrow (c,d) \Longleftrightarrow (ac \parallel bd \text{ e } ab \parallel cd)$

- Dois pares, não idênticos de pontos alinhados, são equipolentes, se, e somente se, eles podem ser ligados por 2 paralelogramos.



- Admite-se que todos os pares idênticos são equipolentes.
$(a,a) \uparrow (b,b) \uparrow (c,c)\ldots$

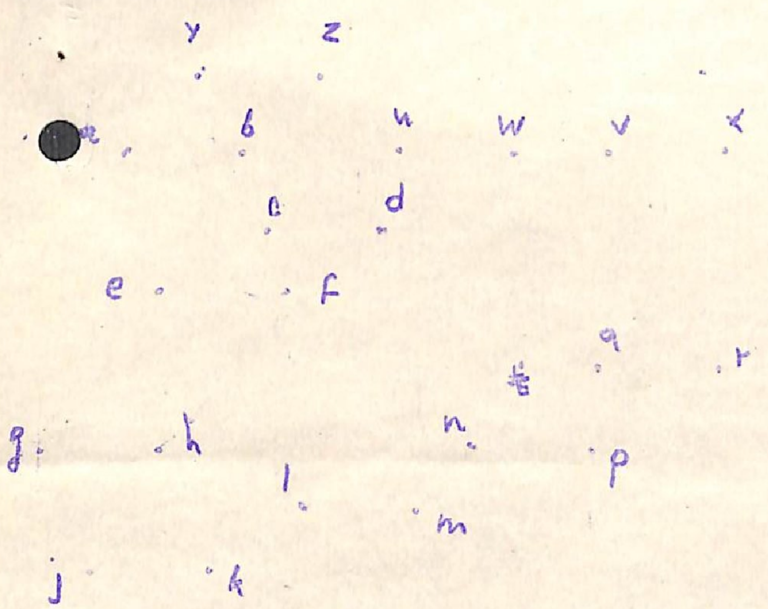
A Geometria pelas transformações
Estudo da Equipolência

- Dados dois pontos $a, b \in \pi$, vamos construir um paralelogramo abcd tendo $[ab]$ como lado.

O par (c,d) deve ser construído a partir do par (a,b).
Construído o paralelogramo, dizemos que os pares (a,b) e (c,d) são <u>ligados</u> por um paralelogramo.

— Vamos repetir o procedimento acima, ligando por um paralelogramo os pares:

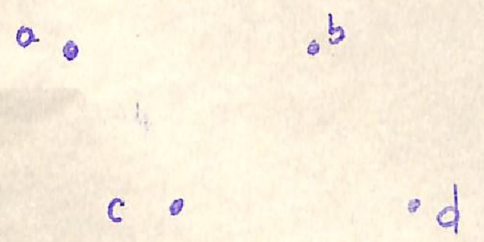
(y,z) e (a,b); (a,b) e (c,d); (c,d) e (e,f); (e,f) e (g,h); (g,h) e (j,k); (j,k) e (l,m); (l,m) e (n,p); (n,p) e (q,r); (c,d) e (s,t); (s,t) e (u,w); (s,t) e (v,x).



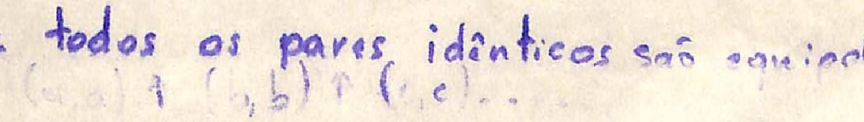
Os pares assim construídos são chamados <u>equipolentes</u> o que se nota:
$(a,b) \uparrow (c,d) \uparrow (e,f)$, etc...

— Dois pares de pontos não alinhados são equipolentes, se, e somente se, eles podem ser ligados por um paralelogramo

$(a,b) \uparrow (c,d) \iff (ac \parallel bd \text{ e } ab \parallel cd)$



— Dois pares, não idênticos de pontos alinhados, são equipolentes, se, e somente se, eles podem ser ligados por 2 paralelogramos.



— Admite-se que todos os pares idênticos são equipolentes.
$(a,a) \uparrow (b,b) \uparrow (c,c)$...

Simetria Central

Elaborado pela prof. Zely Nunes

Dado um ponto $c \in \Pi$, vamos considerar um ponto x de Π e determinar uma transformação s do plano, tal que a imagem de x por s, ou $s(x)$ seja definida pela seguinte relação:

$$\boxed{(x, c) \uparrow (c, s(x))}$$

Desta forma, c é o centro de $(x, s(x))$.

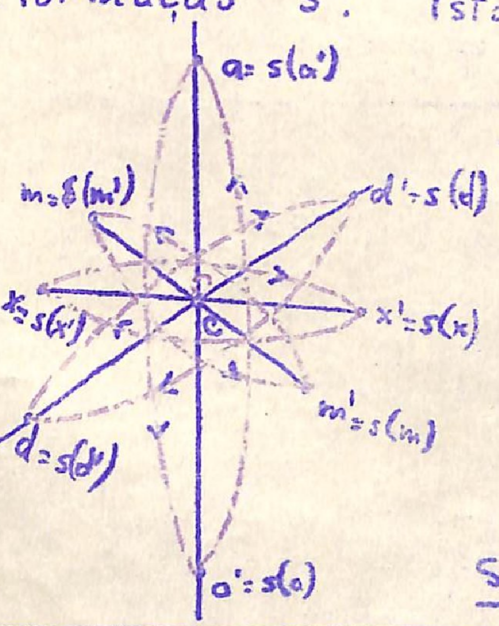
Admitimos anteriormente que todos os pares idênticos são equipolentes: $(c, c) \uparrow (c, c)$

Logo, a imagem de $\underline{c}$ pela transformação $\underline{s}$ é $\underline{c}$, ou: $s(c) = c$. O ponto $\underline{c}$ é, pois, um ponto fixo.

Prosseguindo, podemos afirmar que, pela transformação s um ponto x' será imagem de x, se, e somente se, (x, c) e (c, x') forem equipotentes: $x' = s(x) \Longleftrightarrow (x, c) \uparrow (c, x')$

Da mesma forma: $(x, c) \uparrow (c, x') \Longleftrightarrow x' = s(x)$

Os pares (x, x') e (x', x) pertencem à relação que é a transformação s. Isto é verdade para qualquer ponto $x \in \Pi$.



A relação s é simétrica, pois $(a, a') \in s \rightarrow (a', a) \in s$
$(b, b') \in s \rightarrow (b', b) \in s$, etc.

Os pontos $\underline{a}$ e $\underline{a}'$, $\underline{b}$ e $\underline{b}'$, etc, são simétricos em relação a c.

E temos que $s = s^{-1}$

A relação s tem o nome de <u>simetria</u> <u>central</u>.

Definição: A relação s é uma simetria central de centro c se, e somente se, $\forall x \in \Pi$, c é o centro do par $(x, s(x))$

As simetrias centrais saõ permutações do plano.

Considerando uma simetria de centro c

a) $\forall x \in \Pi$, $\exists_1\, x' \mid (x,c) \uparrow (c,x')$ ou: "todo ponto do plano tem uma e só uma imagem pela simetria de centro c.

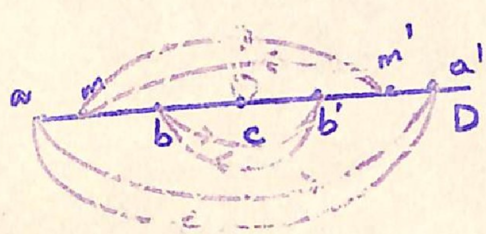
b) Dado um ponto $x' \in \Pi$, êle é imagem de um e só um ponto $x \in \Pi$, por S.

Logo, a simetria de centro c é uma função bijetora e, portanto, uma permutaçaõ de Π.

Imagem de uma reta por uma simetria central

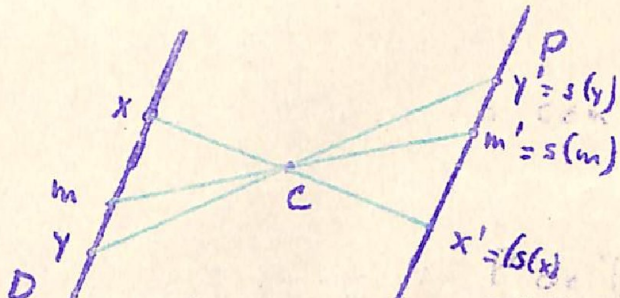
Dada uma reta D, o centro C pode pertencer ou não a D.

1) $c \in D$



evidentemente, $s(D) = D$ e como todo reta é paralela a si mesmo, temos que $S(D) \parallel D$

2) $c \notin D$



Tomamos um ponto $x \in D$ e construimos sua imagem por S. Tracemos por s(x) uma paralela P a D. Destaquemos outros pontos de D e vamos construir suas imagens por S. Vemos que a imagem de todos os pontos de D pertencem a P e todo ponto de P é imagem de 1 ponto de D.

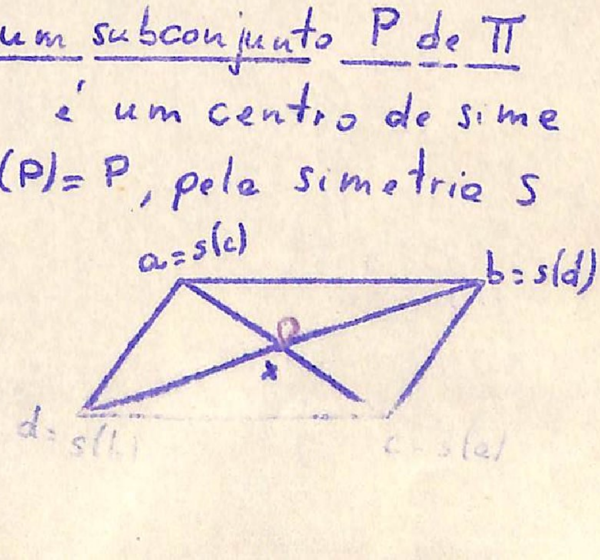
Logo: $S(D) = P$

A imagem de uma reta por uma simetria central é uma reta paralela.

Centro de simetria de um subconjunto P de Π

Sendo $P \subset \Pi$, o ponto c é um centro de simetria de P, se, e somente se, $s(P) = P$, pela simetria S de centro c.

Ex.: O ponto x, de intersecçaõ das diagonais de um paralelogramo é o centro do paralelogramo.



- Pesquisa:
  1) Um triângulo equilátero tem centro de simetria?
  2) Quais os polígonos regulares que admitem um centro de simetria?

Noções conservadas pela simetria central

a) o alinhamento dos pontos
b) a direção das retas
c) o paralelismo das retas
d) a equipolência dos pares
e) os vetores
f) as semi-retas e os segmentos.

Exercícios

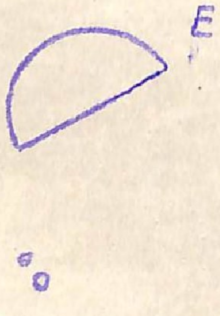
1 Desenhe em verde a imagem do A vermelho pela simetria de centro c

A

c

2. Desenhe em verde a imagem do quadrado roxo (já desenhado), pela simetria de centro verde. Faze o mesmo para o ponto vermelho. Onde colocarias o ponto roxo?

3. Qual a imagem de E pela simetria de centro o?



4. Se a b c são 3 pontos não alinhados, procure a imagem a' e b' dos pontos pela simetria de centro c?

Zely Nunes

TRANSLAÇÃO

Chamamos translação ab de Π, toda transformação de Π, que associa um ponto x a um ponto y de Π, tal que (x,y) e (a,b) são pares equipolentes.

$$\boxed{t_{ab}: \Pi \longrightarrow \Pi, \quad x \longrightarrow y \mid (x,y) \uparrow (a,b)}$$

Toda translação é uma permutação de Π

1. Dado um ponto de Π êle é origem de um e só um par da translação t_{ab}

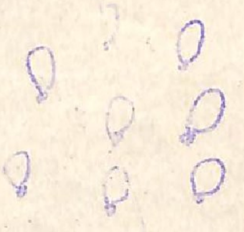
Logo, t_{ab} é uma transformação (função) de Π

2. A recíproca de t_{ab} é t_{ba} e é também uma transformação (função) de Π, pois dado um ponto $m \in \Pi$, êle é origem de um e só um par de t_{ba}

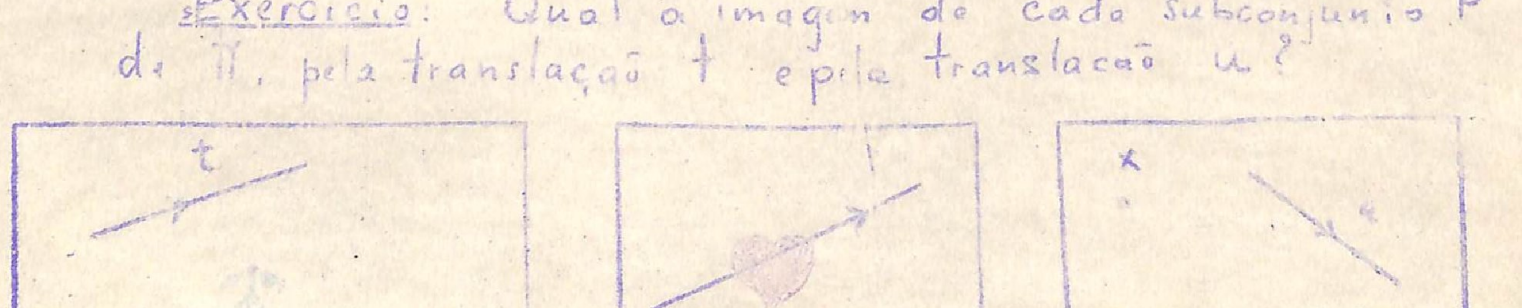
3. Uma transformação cuja inversa é uma transformação é uma permutação de Π

Translação idêntica

A translação t_{aa}, definida pelo vetor idêntico $\vec{aa}$ é o conjunto dos pares (x,x) tal que $(x,x) \uparrow (a,a)$. A direita, algumas flechas da translação idêntica



~~s~~Exercício: Qual a imagem de cada subconjunto P de Π, pela translação t e pela translação u?



FACULDADE DE EDUCAÇÃO - UFRGS

COLÉGIO DE APLICAÇÃO - 1972

Nome :.. Turma:......

Trabalho elaborado pelos professores:
Gelsa Baumvol
Lea da Cruz Fagúndes
Telmo Pires Mota

Introdução

Até alguns anos atrás a Matemática se constituia em linguagem de algumas ciências. Com o desenvolvimento da Teoria dos Conjuntos a Matemática assumiu um papel unificador da linguagem científica em geral (inclusive nas ciências sociais).

Ao mesmo tempo, os novos instrumentos matemáticos criados permitiram que a própria matemática se tornasse uma ciência sem barreiras, possibilitando tratamento similar a problemas aparentemente diferentes - algébricos e geométricos.

Esta nova maneira de encarar a ciência matemática se relaciona, e foi possibilitada pela criação de novos instrumentos, um dos quais: o Espaço Vetorial. Iniciaremos o estudo dos primeiros elementos para a definição e construção dos espaços vetoriais - a Translação.

O estudo sobre translação será feito de maneira individual usando um dos mais recentes métodos da tecnologia educacional: "mapeamento de informação".

Objetivos

Esse trabalho será realizado para tornar-nos capazes de:

- Identificar, definir e construir pares equipolentes.
- Identificar, definir e construir função.
- Reconhecer, definir e construir transformações.
- Reconhecer, definir e construir transformações em

- Dados pontos de , construir a imagem destes pontos por uma translação dada.
- Determinar a imagem de por uma translação.
- Definir Translação.
- Analisar situações de vida usando as informações.

2ª PARTE

Conceituação das noções básicas:

1 PARALELISMO:

Introdução

O paralelismo determina uma das áreas mais impor - tantes da geometria. A Geometria Afim.

A figura do paralelogramo caracteriza esta área.

Definição

Paralelogramo é todo quadrilátero cujos lados opos tos são paralelos dois a dois.

Consideremos quatro pontos a,b,c,d não alinhados 3 a 3, então a união dos segmentos que unem estes 4 pon tos ao contorno do quadrilátero a b c d.

Lado de um quadrilátero é todo segmento de reta que une dois vértices consecutivos:

Representação

a ________ b $\{a,b,c,d\}$ é o conjunto dos vérti ces do paralelogramo abcd.

c ________ d $\{\overline{ab}, \overline{bd}, \overline{dc}, \overline{ca}\}$ é o conjunto dos lados do paralelogramo abcd.

EXEMPLO I:

Todo retângulo é um paralelogramo:

Seja x ____ y a representação de um retângulo.

k ____ z

Os lados $\overline{xy}$ e $\overline{kz}$ são paralelos. Os lados $\overline{xk}$ e $\overline{yz}$ são paralelos.

Assim, o retângulo xyzk, é paralelo gramo. Assim como tomamos o retângulo xyzk, poderíamos ter escolhido qualquer outro elemento do conjunto dos retângulos.

CONTRA-EXEMPLO

Consideremos o quadrilátero chamado trapézio, re - presentado na figura abaixo:

m ______ p

r __________ q

Os lados $\overline{mp}$ e $\overline{rq}$ são paralelos, entretanto, os la- dos $\overline{rm}$ e $\overline{pq}$ não são paralelos, logo, o trapézio não é um paralelogramo.

II PAR ORDENADO

INTRODUÇÃO:

Lidamos, na vida diária, com pares. Diante de um par de meias não temos a preocupação de fazer corresponder uma das meias a um pé específico. Entretanto, quando precisamos calçar os sapatos é fundamental observar que nesse par existe um componente que corresponde ao pé direito e um que corresponde ao pé esquerdo.

O conceito de par ordenado é relevante para o estudo dos conteúdos que nos propusemos, porque um par equipolente – o conceito que a seguir analisaremos – é um par ordenado.

DEFINIÇÃO:

Dados dois pares ordenados (a,b) e (x,y), (a,b) é igual a (x,y) se, e somente se <u>a</u> é igual a <u>x</u> e <u>b</u> é igual a <u>y</u>.

REPRESENTAÇÃO

Simbolizando o par ordenado por (a,b), que se lê <u>par a b</u>. Representamos, então, sua definição:

$(a,b) = (x,y) \iff a = x \quad b = y$

A representação gráfica será: a. .b

Exemplo 1

$(a,d) \neq (d,c)$

No desenho ao lado representamos a disposição das poltronas de um auditório.

Para localizarmos um espectador que está na fila <u>d</u> coluna <u>c</u>, podemos usar o símbolo (d,c).

Estamos convencionando que o 1º componente do par refere-se à fila e o segundo à coluna do auditório.

C	d	.	.	.	.	.
O	c	.	.	.	.	.
L	b	.	.	.	.	.
U	a	.	.	.	.	.
N		a	b	c	d	e
				FILA		

Na planta do auditório (d,c) está marcado em azul.

O lugar marcado em vermelho na planta corresponde à fila <u>c</u> e coluna <u>d</u>. Logo, a representação matemática desta posição deverá ser (c,d). Um mesmo espectador está em (d,c) e em (c,d) ao mesmo tempo? É evidente que não (c,d) $\neq$ (d,c)

VII EQUIPOLÊNCIA

INTRODUÇÃO Os conceitos de par ordenado e paralelogramo nos conduzem a um novo conceito matemático os EQUIPOLENTES. O estudo da EQUIPOLÊNCIA nos permite utilizar as primeiras demonstrações geométricas dignas deste nome.

DEFINIÇÃO Dois <u>pares ordenados</u> de pontos são <u>equipolentes</u> se e somente se puderem ser unidos por um ou dois paralelogramos.

REPRESENTAÇÃO Os pares (a, b) e (c, d) são equipolentes pois existe o paralelogramo abcd que os une ab e cd são paralelos ac e bd são paralelos.

Podemos traduzir esta situação escrevendo

$\overline{ab} // \overline{cd}$

$\overline{ac} // \overline{bd}$

Para representar que (a, b) é equipolente a (c, d) usamos o símbolo entre os dois pares (a, b) (c, d) que se lê:

(a, b) é equipolente a (c, d)

Definição simbólica da equipolência: (a, b) (c, d)

a, c bd e ab cd

EXEMPLO 1 Consideremos o conjunto de pontos não no plano todos alinhados x, y, m, n.

(x, y) é equipolente a (m, n) porque (x, y) e (m, n) podem ser unidos por 1 paralelogramo, a saber, o paralelogramo xymn.

$\overline{xy} // \overline{mn}$

$\overline{xm}$ $\overline{yn}$ logo (x, y) (m, n)

EXEMPLO 2 Consideremos o conjunto de pontos alinhados t, s, r, u no plano r s t u

a resposta para a pergunta ,

-Existe um paralelogramo que une os pontos r, s, t, r?

é negativa. No entanto, os pontos r, s t, u podem ser unidos por <u>dois</u> paralelogramos.

A definição de pares equipolentes nos garante que dois pares de pontos são equipolentes se puderem ser unidos por dois paralelogramos: logo, (r,s) ~ (t,u)
(r,s) ~ (t,u) se e somente $\overline{rs}//\overline{tu}$. Na representação gráfica podemos observar que $\overline{rs}//\overline{ab}$
$\overline{ab}//\overline{tu}$ logo, $\overline{rs}//\overline{tu}$

EXEMPLO 3 Pensemos, agora em pares ordenados de pontos do tipo (m,m), (x,x), (a,a). Podemos constatar que os dois componentes do par são iguais. Esta é a razão pela qual chamamos (m,m), (x,x), (a,a), de pares Idênticos.
Vamos estender a definição de pares EQUIPOLENTES de modo a considerar todos os pares ordenados idênticos equipolentes entre si. Assim (a,a) ~ (b,b) ~ (c,c), (d,d) ~ (e,e) ...

CONJUNTO DE PROBLEMAS

1) Completa: (1,3)= (1,...)
(a,b)= (....,b)
(a,b)= (.......)
(m,n)= ....
{(a,r), (s,l)}.... {(s,l), (a,r)}

2) Se os pares (a,n) e (p,r) são iguais, o que podem se concluir sobre a,p,n,r?

3) No teatro de Arena os lugares para o público estão dispostos assim:
Ao lugar marcado ( ) corresponde o par (a,1), onde a simboliza a fila e 1 a poltrona correspondente a fila.

a) Marca no mapa-
△ A poltrona 6 da fila b
☆ A poltrona 15 da fila e
○ A poltrona 11 da fila c

b) Qual o par ordenado que corresponde à poltrona que está atrás da ☆ ?

c) Em que lugar está a poltrona atrás da △ ?

4) Marca as figuras que representam paralelogramos.

CONTINUAÇÃO DA AUTO CORREÇÃO

8)

c) É verdade porque (g, c) e (c,x) podem ser unidos por 2 paralelogramos.

9)

(p,q) e (p,q) podem ser unidos por 2 paralelogramos

10)

Revisado
Arquivado em 28/03/8
NB