Geometria

2-6-72 (Kely)

(Para chegar às transformações do plano)

1) Texto sobre Geometria pelas Transformações

2) Plano – Subconjuntos do plano
   - Regiões – polígonos < abertos / fechados
   - Curva – segmento de curva
   - Reta < segmento de reta / semi-reta < aberta / fechada
   - Ponto

3) Reta – Posições relativas de duas retas no mesmo plano
   Retas paralelas – Retas secantes
   ↓
   Paralelismo – Propriedades
   Relações de equivalência
   Partição do plano
   Noção de direção

4) Retas orientadas – sentido
   Semi-retas
   Intervalos ou segmentos

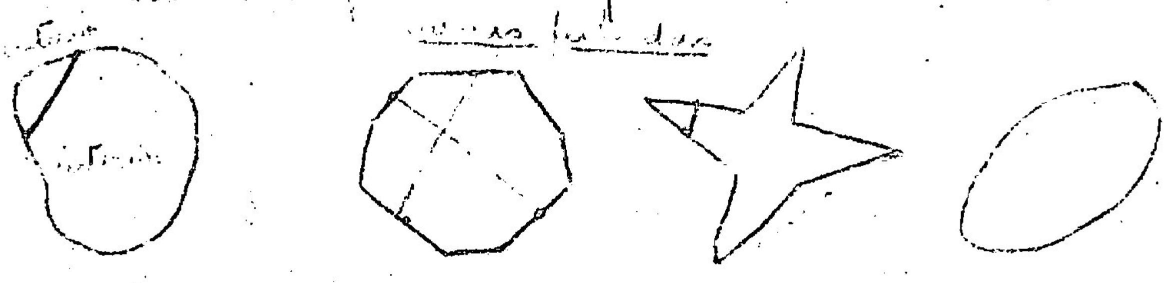
5) Transformações do plano
   Definição
   Casos particulares

6) Projeções

<u>Geometria pelas transformações</u>

Texto sobre Geometria pelas transformações
Geometria no plano
Que é plano?
É um conjunto infinito de pontos (Axioma 1)
Não podemos estudar o plano em todos seus elementos
Por isso destacamos porções ou subconjuntos do plano
Determinamos o plano em duas regiões: interior e exterior
(dentro e fora da curva fechada)

Os limites ou fronteiras podem ser espessas ou não
curvas fechadas



Todas são fronteiras simples

Se tomarmos dois pontos quaisquer na região e ligarmos um ao outro, se eles ficarem no interior ela é convexa, se ficarem no exterior não é convexa.

Quando temos uma fronteira formada por segmentos de retas, temos um polígono e cada segmento de reta se chama lado do polígono.

Vamos pensar no quadrilátero e no quadrilátero particular que é o quadrado.

quadrado fechado

Vamos considerar o conjunto de pontos interiores.

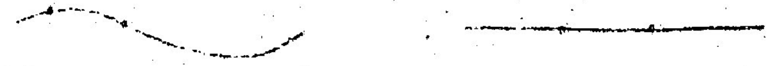
Obs. - Os pontos são estes interiores.

Vamos considerar o conjunto de pontos da borda.

quadrado aberto

Isso são porções do plano.

Curvas e retas são também porções do plano. São subconjuntos próprios do plano



Na curva podemos limitar uma parte que é o segmento de curva ou segmento de reta, que é uma curva particular

Toda reta é curva, mas nem toda curva é reta.

Π - Símbolo para o plano.

Axioma 2 - As retas do plano Π são partes próprias infinitas de Π.

$\mathcal{G}$ - conjunto das retas do plano Π

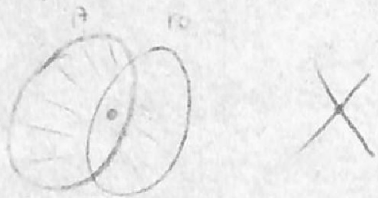
Quantas retas podemos traçar entre dois pontos? Uma e somente uma

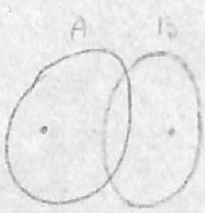
Todo par de pontos pertence a uma e uma só reta?
Três pontos distintos podem ou não pertencer à mesma reta

Posição relativa de duas retas no plano

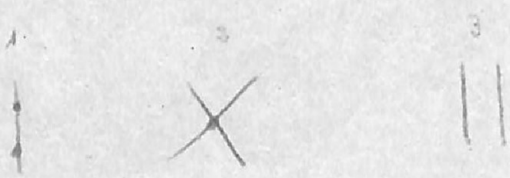
retas coincidentes

Quais as retas que pertencem a A e B?





Três situações para duas retas no mesmo plano



A: retas A ∩ B ∈ D

coincidentes — um ponto unitário — vazio

Como pode ser a intersecção de duas retas distintas?

$A \cap B$ = conj. unitário

$A \cap B = \emptyset$; vazio

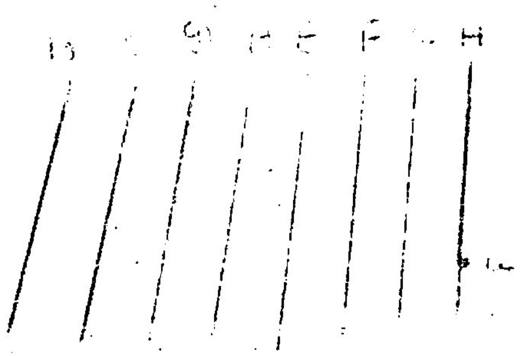
Quando a intersecção de 2 retas é um conjunto unitário, dizemos que essas retas são concorrentes, sendo-se a intersecção um conjunto unitário.

Se duas retas não são concorrentes, elas são paralelas.

Def. de equivalência

$A \nparallel B \iff A \cap B$ não são paralelas
$A \cap B$ é conjunto unitário

Se $A \parallel B \iff (A = B$ ou $A \cap B = \emptyset)$



Se eu elegermos as paralelas a B e todos os pontos ... tomar todas as paralelas que ... pontos
(... pode tomar uma)

Se tomarmos todas as paralelas temos os conjuntos Direção de B que é o conjunto de todas as paralelas a uma determinada reta.

Neste conjunto direção de uma reta B, fizemos pontos retas. Pode ser um conjunto vazio? Não, Direção é um conjunto de partes não vazias do plano

- Dado um ponto qualquer u de um plano ele pertence a uma só direção.
- A intersecção entre essas partes é vazia.
- Se reunirmos todas as retas deste conjunto de conjuntos que é a direção, teremos o plano.

O que a direção determina no plano?
Toda a direção é uma partição do plano.

O paralelismo (ou paralelo ...) é uma relação de equivalência pois goza das propriedades reflexiva, simétrica e transitiva.

Todas as retas de uma mesma direção são paralelas entre si

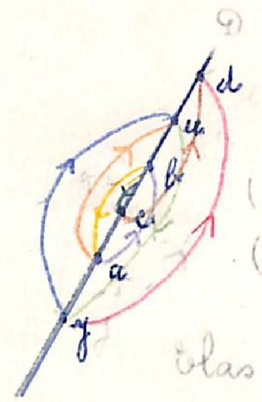
$A \parallel B \nparallel C \Longrightarrow A \nparallel C$

Simbologia: $\parallel$ --> paralela

$\nparallel$ --> secante

Vamos ficar com a reta $\mathcal{D}$

<u>Retas orientadas</u>



Marcar com flechas os pares de pontos distintos

(a;b) (c;d) (u;y) (b;a) (a;u) (b;c)

(y;u) (y,d)

Elas tem sentidos opostos

No sentido (a;b) temos os seguintes pares

(a,b), (y,d), (y,u) (a,u), (c,d)

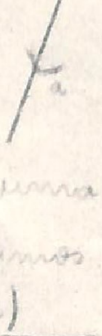
No sentido de (b;a) temos

(u, y); (b;c) ;(b,a)

Todo e qualquer par tem o mesmo sentido que um e somente um dos pares (a;b); (b,a)

Podemos orientar uma reta de quantas maneiras diferentes?

Duas maneiras → dois sentidos.



ou no sentido de (a;b)

ou no sentido de (b;a)

Orientar uma reta é chamar <u>positivo</u> um dos seus sentidos.

Se considerarmos positivo o par (a, b), então será negativo o sentido do par (b;a)

$\boxed{a < b}$ lê-se precede, é menor ou está antes

$a < b$ — <u>a</u> menor que <u>b</u>

$a > b$ — <u>a</u> maior que <u>b</u>

Dados dois pontos quaisquer <u>a</u> e <u>b</u> de uma reta orientada, uma

...tos, 3 ... [illegible]

$a = b \qquad a \geq b$

$\qquad\qquad a \leq b$

$a < b$

Uma reta qualquer está provida de uma relação de ordem parcial e duas totais.

<u>total</u> - dois pontos de uma reta podem ser comparados por uma relação

parcial - ... [illegible] as propriedades anti-simétrica, ... [illegible] e transitiva.

$a < b \qquad b < c \qquad f < c$

$a < c \qquad c < a \qquad f < b$

$a < d \qquad c < d \qquad f < a$

$c < d \qquad\qquad\quad f < c$

mudando a orientação de $a < b$ para $b < a$, $a > b$

Se conservamos o ... o sinal, ... [illegible] as letras.

Se invertemos as letras, inverte-se o sinal.

<u>Axioma 3</u> - <u>Toda reta é ... [illegible] duas relações totais opostas.</u>

Dizemos que <u>orientamos uma reta</u> decidindo $a < b$ para dois pontos distintos <u>a</u> e <u>b</u>

Noção de semi-reta

Chamamos de semi-reta de origem <u>p</u>.

Temos que duas semi-retas, subconjuntos da reta.

$\mathcal{D}_1 = \{u \in \mathcal{D} \mid u \geq p\}$

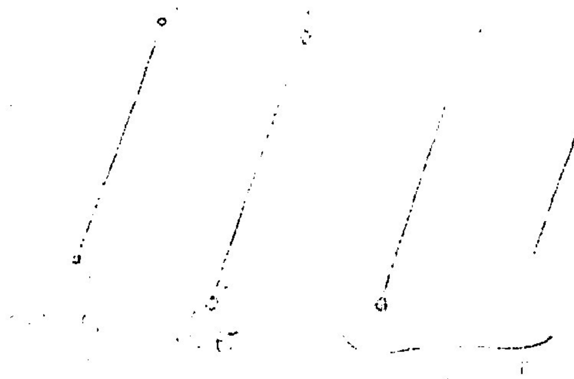
$\mathcal{D}_2 = \{u \in \mathcal{D} \mid u \leq p\}$

$\mathcal{D}_1$ - semi-reta fechada é um conjunto de pontos <u>u</u> que pertencem a $\mathcal{D}$, tais que <u>u</u> é igual a <u>p</u> ou sucede <u>p</u> (... [illegible])

$\mathcal{D}_2$ - semi-reta é um conjunto de pontos <u>u</u> que pertencem a $\mathcal{D}$, tais que <u>u</u> é igual a <u>p</u> ou precede <u>p</u>.

Semi-reta aberta - não consideramos a fronteira.

Semi-reta fechada - consideramos a fronteira.



[illegible] pontos [illegible]:
[illegible] $a < b$

1 – [illegible] fechado $[ab] = \{u \in ab \mid a \leq u \leq b\}$ [illegible] conjunto de pontos u que pertencem a ab tal que a precede b e que u é igual ou vem depois de a ou u vem antes de b ou é igual a b.

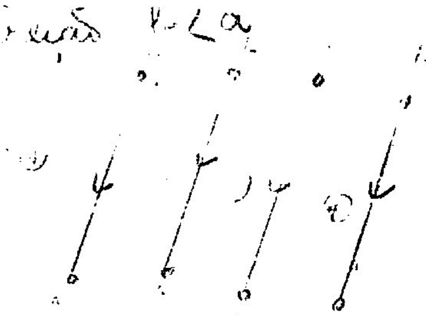
2) $]ab[= \{u \in ab \mid a < u < b\}$ [illegible] conjunto de pontos u que pertencem a ab tal que u vem depois de a e precede b.

3 – $]ab] = \{u \in ab \mid a < u \leq b\}$ [illegible] conjunto de pontos u que pertencem a ab tal que u vem depois de a e precede ou é igual a b.

Nota – aberto, quando o limite não pertence ao conjunto ([illegible])
fechado, quando o limite entra no conjunto.

4 – $[ab[= \{u \in ab \mid a \leq u < b\}$ [illegible] conjunto de pontos u que pertencem a ab tal que u vem depois de a ou é igual a a e precede b.

Direção $b < a$



1 – $[ba] = \{u \in ba \mid b \leq u \leq a\}$
2) $]ba[= \{u \in ba \mid b < u < a\}$
[illegible] $= \{u \in ba \mid b \leq u < a\}$
3 – $]ba] = \{u \in ba \mid b < u \leq a\}$
4 – $[ba[= \{u \in ba \mid b < u \leq a\}$

Mudando o sinal – direção $b > a$
1 – $[ab] = \{u \in ab \mid a \geq u \geq b\}$
2 – $]ab[= \{u \in ab \mid a > u > b\}$
3 – $]ab] = \{u \in ab \mid a \geq u > b\}$
4 – $[ab[= \{u \in ab \mid a \geq u > b\}$

Transformações do plano

Plano – conjunto infinito de pontos
Representação – sempre subconjunto do plano porque não podemos representar o plano todo. Ele é infinito.

$f(y) = x \Longleftrightarrow y = f(x)$

Algumas flechas de transformações f de $\tilde{\Pi}$

Os gráficos representam alguns pares de uma relação $\underline{f}$ definida em $\tilde{\Pi}$

- é função - de cada ponto parte uma e somente uma flecha

Temos uma função de $\tilde{\Pi}$ em $\tilde{\Pi}$.

<u>Toda função de $\tilde{\Pi}$ em $\tilde{\Pi}$ é uma transformação</u>

- não é sobrejetora porque tem ponto livre (no gráfico 2) em b, não chega nenhuma flecha.

Se em todos os pontos de $\tilde{\Pi}$ tivermos uma função definida com laçadas

 → transformação idêntica → bijeção

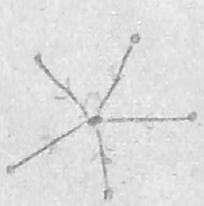
$1\tilde{\Pi}$ - notação da transformação idêntica

$1\tilde{\Pi}(x) = x$

<u>Transformação idêntica</u> é uma função de $\tilde{\Pi}$ em $\tilde{\Pi}$ que transforma x em x

$1\tilde{\Pi} : \tilde{\Pi} \longrightarrow \tilde{\Pi} \quad x \rightarrow x$

Outro caso particular de transformação de $\tilde{\Pi}$ em $\tilde{\Pi}$



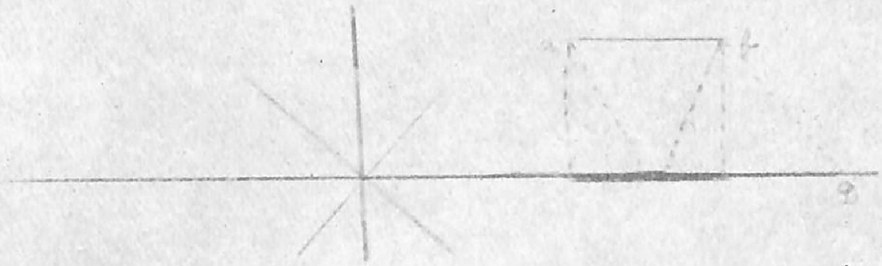
- faz partir de cada ponto uma flecha a um ponto $\underline{c}$
- imagem desta transformação é um conjunto unitário (c

<u>Transformação constante</u> é uma função que tem como imagem um conjunto unitário, que no caso é um ponto $\underline{c}$.

Para qualquer $\underline{x}$ de $\tilde{\Pi}$ temos como imagem um ponto $\underline{c}$

<u>Transformação de $\tilde{\Pi}$ - projeção</u>

Projeções de Π sobre uma reta



Temos que projetar paralelamente a uma direção
Todas são secantes a D
Em verde temos um caso particular - perpendicular
Quando projetamos, sempre seguimos uma direção e uma reta paralela.
Uma projeção perpendicular é uma projeção ortogonal
Sempre a projeção é paralela a uma direção
Sempre que a projeção é perpendicular a reta na qual se projeta é tambem paralela, mas é um caso particular - projeção ortogonal.

I.

• Permutação - é a relação ... a permutação de um conjunto E ... ou seja uma bijeção de E sobre E

$f = g \Longrightarrow \forall x \in E \; f(x) = g(x)$

Na permutação ... [illegible]

Composição de permutações - ... grupo de permutações

Composição de uma permutação ... dá como resultado uma permutação ...

Simbologia da composição de permutação +

Bijeção quando no conjunto de chegada só existem pontos simples

Bijeção só é permutação quando a relação é definida sobre o mesmo conjunto

Toda permutação é uma bijeção mas nem toda bijeção é uma permutação.

Quando a bijeção é definida sobre dois conjuntos não é permutação

Injeção quando no conjunto de chegada só existem pontos simples ou livres

Função quando ~~do~~ conjunto de partida parte de cada elemento uma e somente uma flecha.

Arranjo é o número de combinações que podemos fazer com os elementos de maneira tal que eles difiram ou pela natureza ou pela ordem dos elementos.

Quando o cardinal de A é igual ao # de B, toda bijeção é uma injeção de A em B

Toda bijeção é uma injeção, mas nem toda injeção é uma bijeção.

Ex. $\# A = 3$ Quantas funções?
$\# B = 3$ Quantas injeções?
Quantas bijeções?

funções $= 3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$

injeções $= A = 3 \times 2 \times 1 = 6$

bijeções $= 3! = 6$

Bijeção - quando a permutação é dada pelo fatorial indicado pelo cardinal do conjunto.

$\# A = 3$ $P_3 = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ [illegible]

[illegible]

Arranjos [illegible]

Permutação [illegible]

Combinação [illegible]

[illegible]

$\# A = m$ $\# B = n$

$A_m \rightarrow$ [illegible]

Ex: $\# A = 3$ $\# B = 3$

$A_3^3 \rightarrow$ [illegible]

$\times (\ldots - 1)$

[illegible]

Permutação [illegible]

Combinação [illegible]

Fórmula $C = \frac{A}{P}$ [illegible]

Ex: $\# A = 3$ $\# B = 3$

$P = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

$A_3 = 3 \times 2 \times 1 = 6$

$3 \times (\ldots - 1) \times (\ldots) = 6$

$C = \frac{A}{P_3} = \frac{3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1} = \frac{6}{6} = 1$

Ex: $\# A = 3$

$\# B = 7$

$C_7^3 = \frac{A}{P_3} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = \frac{210}{6} = 35$