+ 15 cópias 13/10

A GEOMETRIA PELAS TRANSFORMAÇÕES

Fonte bibliográfica: "A Geometria pelas Transformações - Vol.I- Topologia ,Geometria Projetiva e Afim -por Z.P.Dienes e E. W. Golding

Resumo elaborado pela prof. Zely Nunes

A Geometria é o estudo das propriedades do espaço. A melhor forma de explorarmos êste espaço é deslocarmo-nos nele ou observarmos o que acontece com os objetos deste espaço quando se efetua uma mudança, isto é, um tipo de transformação qualquer.

Nós nos deslocamos; mudamos a posição dos objetos no espaço; modificamos os próprios objetos, dobrando-os, esticando-os, deslocando-os no espaço. Estes são alguns exemplos de transformações

As transformações são a base do estudo da Geometria e as propriedades destas transformações constituem um ramo da Geometria, pois, cada vez mais esta é considerada como o estudo das propriedades das figuras que permanecem invariantes quando nelas se faz uma ou algumas transformações.

Os diferentes domínios da Geometria como a Topologia, à Geometria Projetiva, a Geometria Afim, a Geometria Euclidiana, estudam as propriedades das figuras que permanecem invariantes por estas transformações. O que determina o domínio de cada um dos ramos citados, é o tipo de transformação que se efetua com a figura ou objeto.

Exemplo I- TOPOLOGIA- A Topologia estuda as propriedades das figuras que permanecem invariantes por transformações bicontínuas, como os estiramentos, as torções e todas as deformações que não produzem nem dilaceramento, nem rutura da figura. São transformações mais gerais, que não conservam nem as distâncias nem os ângulos.

O que então é conservado, ou o que permanece invariante, ou que propriedades são mantidas, numa transformação topológica?

- o interior e o exterior

- pontos que eram vizinhos se conservam vizinhos.

Por exemplo, consideremos um balão de borracha oco. Façamos nele uma depressão, sem furá-lo. Pontos que eram vizinhos permanecem vizinhos, o interior e o exterior permanecem os mesmos. É impossível passarmos de dentro para fora do balão, sem atravessarmos sua superfície(película de borracha). Tal transformação (depressão) é uma transformação contínua. Há, entretanto, uma transformação inversa desta: a transformação que faz desaparecer a depressão e restitue ao balão sua forma primitiva. Nesta transformação inversa, pontos vizinhos são ainda vizinhos; conservam-se ainda o mesmo interior e o mesmo exterior. Assim, a transformação é bi-contínua.

Se fizéssemos, entretanto, um furo no balão, que aconteceria?

- Não mais se conservaria o interior. Não haveria nem interior, nem exterior. Pontos que eram vizinhos, não mais o seriam, particularmente os pontos que ficassem de um e do outro lado do furo. Por isso, "furar" não é uma transformação contínua; não é uma transformaç~o topológica, pois não ficam invariantes as propriedades topológicas : interior, exterior, vizinhança.

Exemplo II-GEOMETRIA PROJETIVA - A Geometria Projetiva é o estudo das propriedades das figuras que permanecem invariantes por projeções, a partir de uma fonte puntiforme (projeção central) e compreende, particularmente o estudo da perspectiva. Na Geometria Projetiva estudamos uma espécie muito simples de transformação - a transformação de uma figura em sombra; a transformação projetiva.

A projeção é também uma transformação contínua.

- Quais as propriedades projetivas, ou melhor, que propriedades permanecem invariantes pela projeção?

Se tomarmos uma folha de cartolina, nela fizermos uma fenda retilínea e a iluminarmos, a projeção desta fenda será um segmento de reta. Se fizermos uma fenda (B) cortando a primeira (A), num ponto X, as projeções das fendas A e B serão segmentos de reta que se cortam em um ponto que é a sombra do ponto X. Se projetarmos uma reta L que passa por 2 pontos M e N, a sombra da reta L passará pela sombra dos pontos M e N.

<u>Retas</u> e <u>intersecções</u> são invariantes em Geometria Projetiva.

<u>Ordem</u> também é propriedades projetiva: se marcarmos sôbre uma reta 3 pontos A, B, C, nesta ordem, verificamos que a projeção do ponto B se encontra entre a projeç~o do ponto A e do ponto C. Assim, a ordem dos pontos A,B,C, se conserva.

<u>Convexidade</u> é uma noção projetiva. Dizemos que uma figura fechada é convexa, se todo segmento de reta que une dois pontos de sua fronteira

+15 cópias 13/10

semelhanças. De fato, as noções de Geometria Projetiva e Geometria Afim estão a meio caminho entre a Topologia e a Geometria Euclidiana.

Exemplo IV- GEOMETRIA EUCLIDIANA- A Geometria Euclidiana é o estudo das propriedades das figuras que se mantém invariantes em um deslocamento no espaço, conservando as distâncias, os ângulos, as posições relativas dos pontos linhas e superfícies das figuras.

Assim, distância e ângulos são noções ou propriedades euclidianas. Os teoremas de congruência são pedras angulares da maior parte das demonstrações clássicas de Geometria Euclidiana.

É importante entender que a Geometria Euclidiana baseia-se em axiomas que são relações entre retas paralelas e ângulos. Não há razão para se acreditar que essas relações continuem verdadeiras, quando se trata de grandes distâncias. Os gregos, com os instrumentos de que dispunham, não podiam medir senão pequenas distâncias. Por isso, para distâncias astronômicas, os teoremas Euclidianos sobre retas paralelas não são mais verdadeiros. Daí porque, certos teoremas e idéias chamadas topológicas, projetivas e afins são independentes das noções euclidianas.

É claro que quanto mais liberdade tivermos para construir figuras, menos elas serão conservadas nas transformações.

Nas transformações topológicas, em que podemos torcer, dobrar ou esticar a figura, poucas propriedades são conservadas, porque nos permitimos coisas demais, com as figuras. Nas transformações projetivas, menos coisas são permitidas, e, por isso, maior número de propriedades se mantém. P.ex; as linhas retas em transformação projetiva são conservadas, enquanto que em Topologia não o são. Dentro da Geometria Afim, em que afastamos o centro de projeção para muito longe, de modo que os raios luminosos se tornam quase paralelos, Noções de razão entre dois segmentos sôbre uma reta e de paralelismo são conservadas aí.

As noções de ângulos e distâncias são propriedades apenas da Geometria Euclidiana, em que as transformações consistem apenas em tomar uma figura e fazê-la repousar em outro lugar.

Quanto maior número de coisas nos permitimos na transformação de nossa figura, menos relações verdadeiras teremos, enquanto que, se nos permitimos poucas coisas, mais relações verdadeiras teremos.

É por isso que a Geometria Euclidiana é a mais rica de todas as geometrias, enquanto que as relações topológicas são as mais gerais.

Tudo o que é verdadeiro em Toplogia , é verdadeiro em Geometria Projetiva e Geometria Afim e em Geometria Euclidiana. Entretanto, o que é verdadeiro em Geometria Euclidiana não é necessariamente verdadeiro nas outras geometrias. Pode sê-lo ou não.

+15 cópias 13/10

está inteiramento situado no interior da figura. A noção de convexidade implica, pois, na de segmento de reta e na de interior e exterior. As noções de reta e de interior e exterior são projetivas. Um ponto interior de uma figura projeta-se em um ponto interior da figura projetada (interior e exterior são propriedades invariantes em projeção). Por outro lado, a projeção de uma segmento de reta que une dois pontos interiores de uma figura é um segmento de reta quese encontra no interior da figura projetada. Daí, a projeção de uma figura convexa, é convexa.

Retas, intersecções, ordem, interior, vizinhança, convexidade são propriedades projetivas.

Vejamos agora, que propriedades não são invariantes pela projeção.

Recortemos um quadrado de madeira e o apresentemos à luz. Veremos que a sombra do quadrado é uma figura de 4 lados(a menos que coloquemos o quadrado numa posição tal, que sua sombra fique reduzida a uma linha). A igualdade dos lados dependerá do modo como segurarmos o quadrado e ainda do ponto em que se encontra a fonte de luz. Sendo esta puntiforme, cujos raios divergem em todas as direções, os lados do quadrado na projeção, nem sempre serão paralelos, tornando-se mais paralelos a medida que a fonte de luz puntiforme se afasta do quadrado.

Consequentemente, a medida, o paralelismo, e os ângulos não são propriedades projetivas. Se observarmos as portas de uma casa, veremos que elas estão sempre em ângulo reto em relação ao assoalho; numa fotografia, entretanto, elas quase nunca aparecem retos êsses ângulos, embora sejam a projeção de um ângulo reto , na realidade.

Exemplo III- GEMETRIA AFIM- A transformação afim é um caso particular da transformação projetiva. É o estudo das propriedades invariantes, por projeções a partir do infinito (projeções paralelas). Tomando como fonte o Sol, obtemos uma idéia aproximada da projeção de uma fonte puntiforme que cada vez mais se distancia. O sol está tão longe que seus raios chegam a nós praticamente paralelos.

Em uma projeção desse tipo, retas paralelas são transformadas em retas paralelas. Outra propriedade que se mantem, em uma projeção paralela é a relação entre os comprimentos de dois segmentos situados sôbre duas retas paralelas, De fato, se a razão entre dois segmentos paralelos for dois (i.é, se um for o dobro do outro) a razão entre os comprimentos das respectivas sombras será dois.

O paralelismo e a proporcionalidade(permanência de razão) são propriedades afins.

O caso particular mais importante da Geometria Afim é o estudo das