Exercícios

1. Calcule a distância entre os pontos A e B:

a. A(2, 6) e B(5, 10)

Resolução:

$d = \sqrt{(5-2)^2 + (10-6)^2} \rightarrow d = \sqrt{9+16} \rightarrow$

$\rightarrow \boxed{d = 5}$

b. A(−1, 7) e B(−7, −1)

c. A(6, 2) e B(−6, −3)

d. A($2\sqrt{6}$, 5) e B(0, 0)

e. A($3\sqrt{5}$, 0) e B(0, 6)

f. A(3, 0) e B(−8, 0)

g. A(7, 0) e B(15, 0)

h. A(−10, 0) e B(−4, 0)

i. A(0, 8) e B(0, 16)

j. A(0, 1) e B(0, −7)

l. A(0, −3) e B(0, −9)

m. A(7, 3) e B(7, 3)

n. A(5, −6) e B(5, 4)

o. A(−5, 7) e B(8, 7)

p. A(2, 2) e B(9, 9)

2. Calcule o perímetro do triângulo ABC:

a. A(−4, 0), B(2, 8) e C(6, 0)

b. A(1, 1) , B(2, 3) e C(5, −1)

c. A(2, 2) , B(−1, 6) e C(−5, 3)

3. O centro de uma circunferência é o ponto C(4, −7). Calcule o raio dessa circunferência, sabendo que ela passa pelo ponto A(−5, 5).

4. Os pontos M(10, −3) e N(−2, 13) são as extremidades de um diâmetro de uma circunferência. Quanto mede o raio da circunferência?

5. Verifique se o triângulo ABC é retângulo:

a. A(−4, 0), B(2,8) e C(6, 0)

b. A(1, 1) , B(2, 3) e C(5, −1)

c. A(2, 2) , B(−1, 6) e C(−5, 3)

Obs.: Um triângulo é retângulo se o quadrado da medida do maior lado é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros dois.

6. Verifique se são isósceles os triângulos cujos vértices são os pontos:

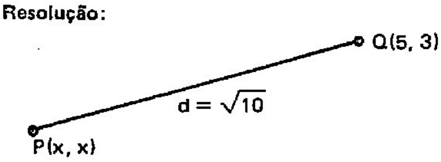
a. A(2, −2), B(−3, −1) e C(1, 6)

b. A(2, 4) , B(5, 1) e C(6, 5)

c. A(−2, 2), B(6, 6) e C(2, −2)

7. Calcule as coordenadas do ponto P(x, x), sabendo que a distância de **P** até o ponto Q(5, 3) é $\sqrt{10}$.

Resolução:



$d = \sqrt{10}$ (1)

$d = \sqrt{(x-5)^2 + (x-3)^2}$ (2)

Comparando-se (1) e (2), temos:

$\sqrt{(x-5)^2 + (x-3)^2} = \sqrt{10}$

$(x-5)^2 + (x-3)^2 = 10$

$x^2 - 8x + 12 = 0$

$x = 6$ ou $x = 2$

Logo: P(6, 6) ou P(2, 2)

8. Se a distância de P(x −x) ao ponto A(0, 0) é o triplo da distância de **P** ao ponto B(8, −8), quais as coordenadas de **P**?

9. Seja P(x, 2x) um ponto igualmente distante dos pontos R(1, 2) e S(5, 10). Calcule as coordenadas do ponto **P**.

10. Seja **P** um ponto do eixo das abscissas. Quais as coordenadas do ponto **P** se a distância de **P** ao ponto Q(9, 8) é de 10 unidades?

Obs.: Um ponto do eixo das abscissas tem ordenada zero.

11. Seja **P** um ponto do eixo das ordenadas. Quais as coordenadas de **P** se a distância de **P** ao ponto Q(12, 2) é de 15 unidades?

Obs.: Um ponto do eixo das ordenadas tem abscissa zero.

12. Dados os pontos P(2, 2) e Q(5, −2), ache um ponto **R** do eixo das abscissas tal que o triângulo PQR seja retângulo em **R**.

13. Calcular a medida das diagonais do quadrilátero ABCD sabendo que A(1, 1), B(4, 1), C(4, 5) e D(1, 5).

Exercícios

1. Calcule as coordenadas do ponto médio M do segmento $\overline{AB}$.

a. A(5, 1) e B(9, 3)

Resolução

$$\left.\begin{aligned} x_M &= \frac{5+9}{2} \rightarrow x_M = 7 \\ y_M &= \frac{1+3}{2} \rightarrow y_M = 2 \end{aligned}\right\} M(7, 2)$$

b. A(3, 2) e B(13, 8)

c. A(5, −1) e B(3, 11)

d. A(−4, 7) e B(−6, 5)

e. A(−10, −4) e B(−8, 4)

f. A(−1, 2) e B(1, −2)

g. A(−5, −9) e B(−11, −3)

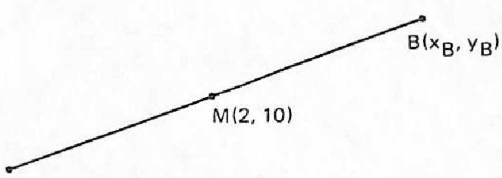
h. A(1, 3) e B(2, 1)

i. $A(\sqrt{2}, -\sqrt{3})$ e $B(3\sqrt{2}, \sqrt{3})$

j. $A(2\sqrt{2}, -5)$ e $B(-6\sqrt{2}, -2)$

2. Calcule as coordenadas do extremo B do segmento $\overline{AB}$, sabendo que A é o ponto (3, 7) e M(2, 10) é o ponto médio de AB.

Resolução:



Tomando as coordenadas do ponto médio, podemos escrever:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \quad \text{e} \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

Substituindo as coordenadas conhecidas, obtemos:

$$\left.\begin{aligned} 2 &= \frac{3 + x_B}{2} \rightarrow x_B = 1 \\ \text{e} \quad 10 &= \frac{7 + y_B}{2} \rightarrow y_B = 13 \end{aligned}\right\} B(1, 13)$$

3. Calcule as coordenadas do extremo B do segmento $\overline{AB}$, sabendo que A é o ponto (−3, 0) e M(−6, 4) é o ponto médio de $\overline{AB}$.

4. O ponto M(−7, 2) é médio do segmento $\overline{AB}$, em que A(p − 1, 6) e B(−6, q + 2). Calcule **p** e **q**.

5. Para quais valores de a e b o ponto M(−3, 2) é médio do segmento $\overline{AB}$, sabendo que A(1, a + 1) e B(b, 3)?

6. Dados A(−8, 3) e M(−6, 5), determine as coordenadas do ponto B, simétrico de A em relação a M.

7. Determine as coordenadas do ponto A simétrico de B(5, 3) em relação a M(−1, 2).

8. Determine as coordenadas do ponto A', simétrico de A em relação à origem:

a. A(3, 5)

b. A(−2, 4)

c. A(−5, −6)

d. $A\left(6, -\frac{1}{2}\right)$

e. A(0, 7)

f. A(8, 0)

9. Calcule as coordenadas dos pontos **M**, **N** e **P**, médios dos lados $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ do triângulo ABC, sabendo que A(1, 5), B(7, −1) e C(3, 7).

10. Com relação aos dados do exercício anterior, mostre que $MN = \frac{BC}{2}$.

11. Sendo M, N e P os pontos médios dos lados do triângulo ABC, e sabendo que A(0, 0), B(6, 0) e C(0, 8), mostre que:

a. o perímetro do triângulo MNP é a metade do perímetro do triângulo ABC.

b. a área do triângulo MNP é a quarta parte da área do triângulo ABC.

12. O segmento $\overline{AB}$ é um diâmetro da circunferência λ. Calcule as coordenadas do centro da circunferência, sendo A(10, −2) e B(−2, 6).

13. Calcule a medida da mediana $\overline{AM}$, relativa ao lado BC do triângulo ABC, sendo A(5, 7), B(−5, 1) e C(−1, 1).

Obs.: A mediana relativa ao lado $\overline{BC}$ é o segmento cujas extremidades são o vértice A e o ponto M, médio do lado $\overline{BC}$.

14. Dados três vértic
A(3, −5), B(5, −3)
quarto vértice D, opos
Obs.: O ponto de inters
ralelogramo é pont

15. Dados A(−3, 5) e
de um paralelogramo,
secção das suas diag
dois vértices.

4 Coo
de u

O baricentro (
suas três medianas:

B

É bom lembra
do triângulo ao po

Propriedade

O baricentro (
de 2 para 1, isto é:

ə a e b o ponto M(−3, 2)
nto $\overline{AB}$, sabendo que

I(−6, 5), determine as co-
simétrico de A em rela-

ənadas do ponto A simé-
:ão a M(−1, 2).

enadas do ponto A', si-
ı à origem:

las dos pontos M, N e P,
Ɔ e $\overline{BC}$ do triângulo ABC,
(7, −1) e C(3, 7).

los do exercício anterior,

pontos médios dos lados
ndo que A(0, 0), B(6, 0)

ingulo MNP é a metade
ngulo ABC.

MNP é a quarta parte da
C.

n diâmetro da circunfe-
ɔrdenadas do centro da
0, −2) e B(−2, 6).

a mediana $\overline{AM}$, relativa
ɔ ABC, sendo A(5, 7),

ıo lado $\overline{BC}$ é o segmento
ɔ o vértice A e o ponto M,

14. Dados três vértices de um paralelogramo, A(3, −5), B(5, −3) e C(−1, 3), determine o quarto vértice D, oposto a B.

Obs.: O ponto de intersecção das diagonais de um paralelogramo é ponto médio dessas diagonais.

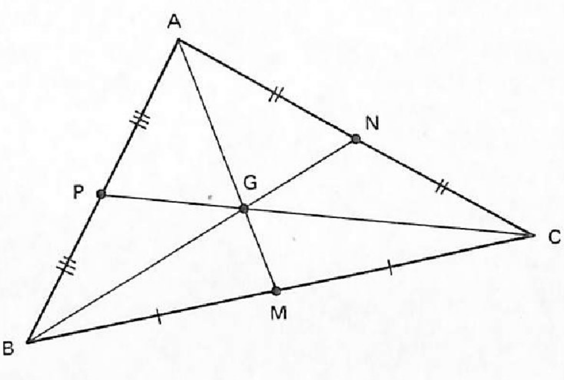
15. Dados A(−3, 5) e B(1, 7), vértices adjacentes de um paralelogramo, e M(1, 1), ponto de intersecção das suas diagonais, determine os outros dois vértices.

16. Dados três vértices de um paralelogramo ABCD, A(2, 3), B(4, −1) e C(0, 5), determine o quarto vértice D.

17. Os vértices de um triângulo são A(1, 4), B(3, −9) e C(−5, 2). Determine a medida da mediana relativa ao lado $\overline{AC}$.

4 Coordenadas do baricentro de um triângulo

O baricentro G de um triângulo ABC é o ponto de encontro das suas três medianas:



É bom lembrar que mediana é um segmento que liga um vértice do triângulo ao ponto médio do lado oposto.

Propriedade do baricentro

O baricentro G de um triângulo ABC divide cada mediana na razão de 2 para 1, isto é:

$$AG = 2GM \quad \text{ou} \quad \frac{AG}{GM} = 2$$

$$BG = 2GN \quad \text{ou} \quad \frac{BG}{GN} = 2$$

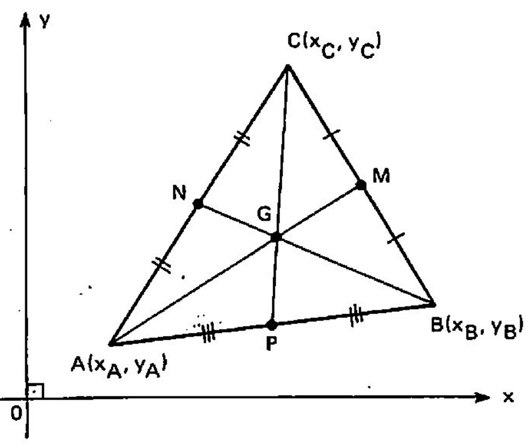
$$CG = 2GP \quad \text{ou} \quad \frac{CG}{GP} = 2$$

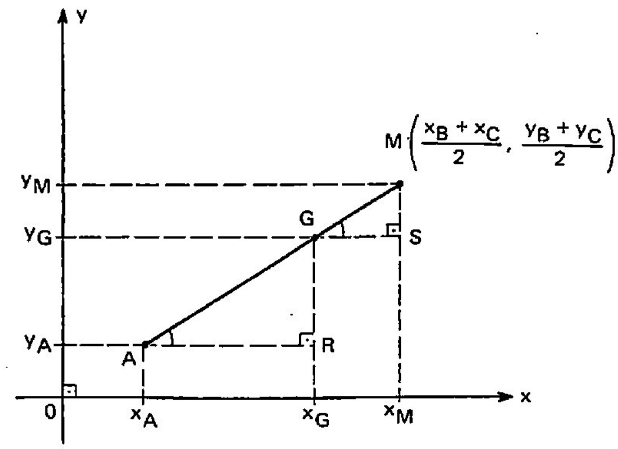
Note que a abscissa (ordenada) do baricentro é a média aritmética das abscissas (ordenadas) dos vértices do triângulo ABC, ou seja:

$$x_G = \frac{4+6+8}{3} = \frac{18}{3} = 6$$

$$\text{e} \quad y_G = \frac{5+9+7}{3} = \frac{21}{3} = 7$$

Repetindo-se o raciocínio para um triângulo cujos vértices sejam os pontos genéricos $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$, obtemos as coordenadas do baricentro de um triângulo ABC.





$$\left.\begin{array}{l} \Delta AGR \sim \Delta GMS \\ \text{e} \quad \dfrac{AG}{GM} = 2 \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}} \quad \text{e} \quad \boxed{y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}}$$

Assim, as coordenadas do baricentro de um triângulo são a média aritmética das coordenadas dos vértices.

Exercícios

1. Calcule as coordenadas do baricentro do triângulo ABC:

a. $A(2, 3)$, $B(3, 5)$ e $C(4, 1)$

Resolução:

$$\left.\begin{array}{l} x_G = \dfrac{2+3+4}{3} \rightarrow x_G = 3 \\ y_G = \dfrac{3+5+1}{3} \rightarrow y_G = 3 \end{array}\right\} G(3, 3).$$

b. $A(-2, 3)$, $B(4, 8)$ e $C(10, -8)$.

c. $A\left(\frac{1}{2}, 5\right)$, $B\left(\frac{9}{2}, -\frac{1}{3}\right)$ e $C\left(4, \frac{4}{3}\right)$

d. $A(\sqrt{2}, -2)$, $B(2\sqrt{2}, 10)$ e $C(0, 7)$.

2. Sejam $A(6, 7)$, $B(8, 9)$ e $C(4, -7)$ os vértices do triângulo ABC e M, N, P os pontos médios dos lados $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ respectivamente. Demonstre que os triângulos ABC e MNP possuem o mesmo baricentro.

3. $G(1, 2)$ é o baricentro do triângulo ABC. Sabendo que $A(2, 3)$ e $B(8, 4)$, calcule as coordenadas do vértice **C**.

4. Calcule a distância entre os baricentros dos triângulos ABC e MNP, sabendo que $A(2, 3)$, $B(3, 5)$, $C(4, 1)$, $M(-2, 3)$, $N(4, 8)$ e $P(10, -8)$.

$$m = \operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = \frac{-\,y_B - y_A}{x_A - x_B} =$$

$$= \frac{y_B - y_A}{-(x_A - x_B)} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

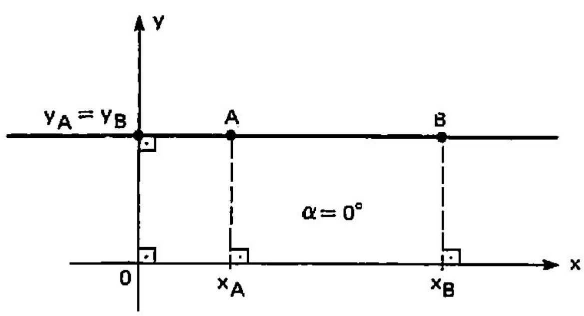
$$\boxed{m = \operatorname{tg}\alpha = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}$$

Agora m é negativo, pois $y_B - y_A$ e $x_B - x_A$ têm sinais diferentes.

Observe que o coeficiente angular independe do ponto A ou B. De fato, temos:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-(y_A - y_B)}{-(x_A - x_B)} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$$

Esta caracterização do coeficiente angular pode ser usada também quando a reta é paralela ou perpendicular ao eixo x. Se a reta for paralela ao eixo x ($\alpha = 0^\circ$), teremos:



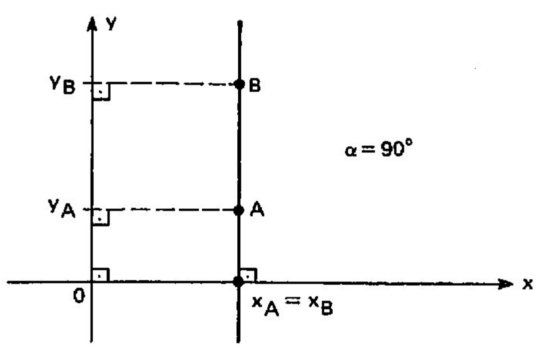
A e B têm ordenadas iguais, ou seja, $y_A = y_B$.

Assim:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0}{x_B - x_A}$$

$$\boxed{m = 0}$$

Finalmente, quando a reta for perpendicular ao eixo x ($\alpha = 90^\circ$), teremos:



2. Demonstre que os pontos A(1,3), B(3,5) e C(15,16) não estão alinhados.

3. Para que valor de K os pontos A(K,3), B(8,6) e C(−1, −3) estarão alinhados?

Resolução:
Basta aplicarmos a condição $m_{AB} = m_{AC}$

$$m_{AB} = \frac{6-3}{8-K} = \frac{3}{8-K}$$

$$m_{AC} = \frac{-3-3}{-1-K} = \frac{-6}{-1-K} = \frac{6}{1+K}$$

$$\frac{3}{8-K} = \frac{6}{1+K} \rightarrow 3(1+K) = 6 \cdot (8-K) \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{K = 5}$$

4. Para que valor de K os pontos A(−3,7), B(5,K + 1) e C(1,8) estarão alinhados?

5. Para que valor de K os pontos A(−3,4), B(5,K) e C(−2,2K + 3) estarão alinhados?

6. Considerando a reta r que passa pelos pontos A(4,−3) e B(−1,−18), determine:

a. o ponto C em que a reta r corta o eixo x.
Obs.: O ponto C está alinhado com A e B.

b. o ponto D em que a reta r corta o eixo y.

7. Considerando a reta r que passa pelos pontos A(7,−12) e B(3,−4), determine:

a. o ponto C onde a reta r corta o eixo x.

b. o ponto D onde a reta r corta o eixo y.

Critério do determinante

Outra forma de se verificar se três pontos distintos, A, B e C, estão alinhados é a seguinte:

Os pontos $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ estão alinhados se e somente se:

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Vamos considerar dois casos para a demonstração dessa condição de alinhamento.

Primeiro caso

Os pontos A, B e C são tais que $x_A \neq x_B \neq x_C \neq x_A$.

Calculando o determinante, obtemos:

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff$$

$$\iff x_Ay_B + x_Cy_A + x_By_C - x_Cy_B - x_By_A - x_Ay_C = 0 \iff$$

$$\iff x_Cy_B - x_Cy_A - x_Ay_B = x_By_C - x_By_A - x_Ay_C \iff$$

$$\iff x_Cy_B - x_Cy_A - x_Ay_B + x_Ay_A = x_By_C - x_By_A - x_Ay_C + x_Ay_A \iff$$

$$\iff (y_B - y_A)x_C - (y_B - y_A)x_A = (y_C - y_A)x_B - (y_C - y_A)x_A \iff$$

$$\iff (y_B - y_A)(x_C - x_A) = (y_C - y_A)(x_B - x_A) \iff$$

$$\iff \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} \iff$$

$$\iff m_{AB} = m_{AC} \iff$$

$\iff$ A, B e C estão alinhados.

Segundo caso

Os pontos A, B e C são tais que $x_A = x_B = x_C = k$

$$\begin{vmatrix} k & y_A & 1 \\ k & y_B & 1 \\ k & y_C & 1 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} 1 & y_A & 1 \\ 1 & y_B & 1 \\ 1 & y_C & 1 \end{vmatrix} = k \cdot 0 = 0$$

Neste caso, os pontos A, B e C pertencem a uma reta perpendicular ao eixo x.

Exercícios

8. Verifique se os pontos A, B e C estão alinhados:

a. A(1,4), B(−3,−8) e C(3,10)

Resolução:
Para ver se os pontos A, B e C estão alinhados é só verificar se o determinante $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -3 & -8 & 1 \\ 3 & 10 & 1 \end{vmatrix}$ é igual a zero. Usando a regra de Sarrus, temos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -3 & -8 & 1 \\ 3 & 10 & 1 \end{vmatrix} = -8 + 12 - 30 + 24 + 12 - 10 = 0$$

Logo, os pontos A, B e C estão alinhados.

b. A(−4,−2), B(0,2) e C(1,4)

Resolução:

$$\begin{vmatrix} -4 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -8 - 2 + 0 - 2 - 0 + 16 = 4$$

Logo, os pontos A, B e C não estão alinhados.

c. A(4, 3) , B(−2, 0) e C(0, 1)

d. A(2, 6) , B(4, 4) e C(−1, 9)

e. A(−3, 11), B(0, 8) e C(1, 6)

f. A(−2, 1) , B(0, 5) e C(2, 9)

9. Para que valores de k os pontos A(k, 2), B(4, k) e C(0, 2) estão alinhados?

10. Encontre o ponto do eixo x alinhado com A(2, 3) e B(6, 7).

11. Considere a reta $\overleftrightarrow{AB}$, em que A(1, 8) e B(−3, 4). Determine as coordenadas do ponto em que a reta $\overleftrightarrow{AB}$ corta o eixo y.

12. Considere os pontos A(12, 6), B(−1, 2) e C(7, 4). Demonstre que o ponto médio do segmento $\overline{BC}$, o baricentro do triângulo ABC e o ponto A estão alinhados.

13. Considere os pontos C(−5, −3), D(0, 2), $E\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$, $F\left(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right)$ e $G\left(\sqrt{2}, \sqrt{2} + 2\right)$.
Demonstre que todos estes pontos pertencem à reta que passa por A(1, 3) e B(2, 4).

10 Equação de uma reta

A equação de uma reta r é uma relação que existe entre a abscissa e a ordenada de cada um dos pontos P(x, y) que pertencem a essa reta. Tal relação pode ser obtida de duas formas:

a. Quando conhecemos dois pontos A e B da reta r.

Comparando ① e ②, obtemos:

$$\frac{y-8}{x-2} = 3$$

$$y - 8 = 3(x - 2) \rightarrow \boxed{3x - y + 2 = 0}$$

Note que a equação está satisfeita, também, pelo ponto Q(2, 8).

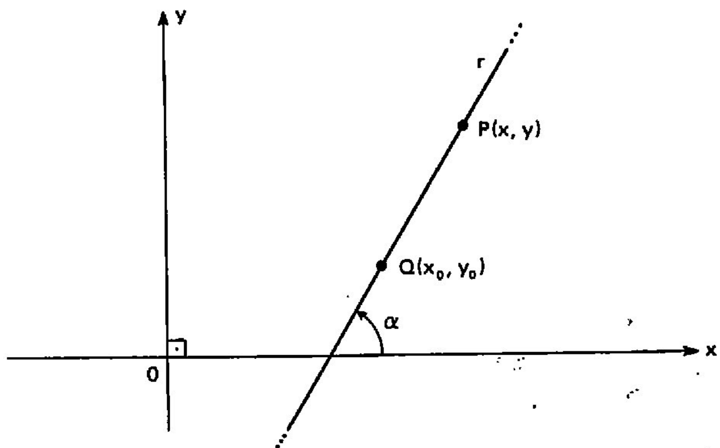
Sintetizando as duas formas, temos:

- Dados dois pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ da reta r.
  Se P(x, y) é um ponto qualquer de r, então sua equação é dada pela seguinda condição:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{ax + by + c = 0}$$

onde $a = y_A - y_B$, $b = x_B - x_A$ e $c = x_A y_B - x_B y_A$.

- Dados um ponto $Q(x_0, y_0)$ de r e o seu coeficiente angular m.
  Se P(x, y) é um ponto qualquer de r distinto de Q, então sua equação é dada pela seguinte condição:



$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

$$\text{ou} \quad \boxed{y - y_0 = m(x - x_0)}$$

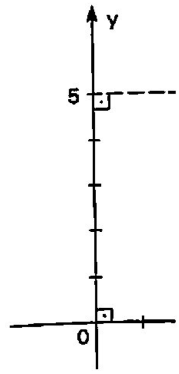
Note que a equação $y - y_0 = m(x - x_0)$ é satisfeita, também, pelo ponto $Q(x_0, y_0)$.

Atenção: No caso em que a reta r é vertical, isto é, perpendicular ao eixo x, todos os seus pontos têm a mesma abscissa, digamos, k. Então, se o ponto P(x, y) pertence à reta r, temos:

$$\boxed{x = k}$$

Esta é a equação de r neste caso.

Exemplo:
Se r é vertical



Exercíci

1. Escreva, na form
da reta r que passa p

a. A(−3, 5) e B('

Resolução:
Para todo ponto
temos:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -3 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

b. A(0, 3) e E
c. A(−4, 0) e E
d. A(5, 1) e E
e. A(−2, 2) e E
f. A(3, 2) e E
g. A(5, 0) e E
h. A(−3, −4) e I
i. A(5, 1) e I
j. A(−4, −2) e
l. A(0, 3) e

Nos exercícios
na forma ax +

2. Escreva a equaç
to Q, cujo coeficie

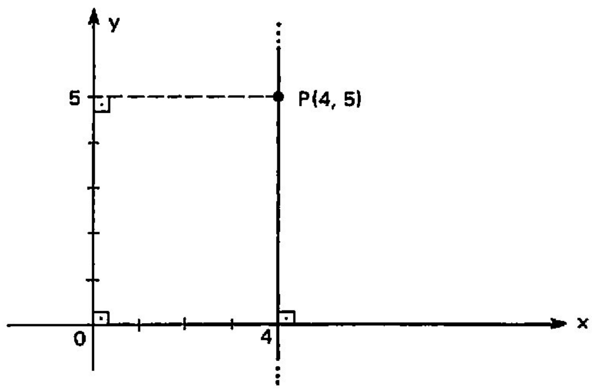
a. Q(4, −3) e m

Resolução:
Utilizando a exp
y − (−3) = 2(x
y + 3 = 2x − 8

$\boxed{2x - y - 11 =}$

Exemplo:

Se r é vertical e P(4, 5) está em r, a sua equação será:



$$\boxed{x = 4}$$

Exercícios

1. Escreva, na forma $ax + by + c = 0$, a equação da reta r que passa pelos pontos A e B:

a. A(−3, 5) e B(1, 1)

Resolução:

Para todo ponto P(x, y) alinhado com A e B, temos:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -3 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow 5x + y - 3 - 5 + 3y - x = 0 \Longleftrightarrow \boxed{4x + 4y - 8 = 0}$$

b. A(0, 3) e B(−2, 1)

c. A(−4, 0) e B(0, −3)

d. A(5, 1) e B(−1, −4)

e. A(−2, 2) e B(−1, −5)

f. A(3, 2) e B(6, 2)

g. A(5, 0) e B(−5, 0)

h. A(−3, −4) e B(4, −4)

i. A(5, 1) e B(5, 10)

j. A(−4, −2) e B(−4, 5)

l. A(0, 3) e B(0, −2)

Nos exercícios de 2 a 7, escreva as equações na forma $ax + by + c = 0$.

2. Escreva a equação da reta que passa pelo ponto Q, cujo coeficiente angular é **m**:

a. Q(4, −3) e m = 2

Resolução:

Utilizando a expressão $y - y_0 = m(x - x_0)$, temos:

$y - (-3) = 2(x - 4)$

$y + 3 = 2x - 8$

$\boxed{2x - y - 11 = 0}$

b. Q(1, −1) e m = 1

c. Q(−2, 3) e m = 3

d. Q(4, 0) e m = −2

e. Q(5, 0) e $m = \frac{1}{5}$

f. Q(−2, −3) e m = −3

g. Q(0, 0) e $m = \frac{1}{2}$

h. Q(3, 2) e m = 0

i. Q(−2, −3) e m = 0

j. Q(5, 4) e m = −1

l. Q($\sqrt{2}$, 1) e $m = \sqrt{2}$

3. Escreva a equação da reta que passa pelo ponto Q(7, −2) e tem inclinação de 45°.

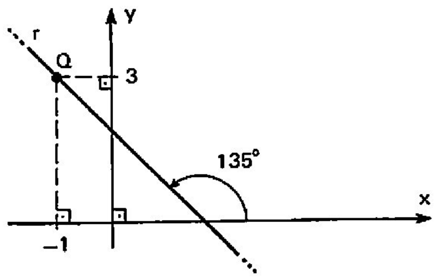
4. Escreva a equação da reta que passa pelo ponto Q(−5, 3) e é perpendicular ao eixo **x**.

5. Dados A(−1, 1), B(2, 5) e C(3, 7), determine as equações das retas que contêm os lados do triângulo ABC.

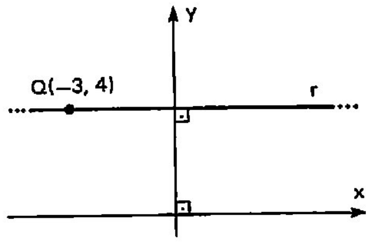
6. Dados A(−3, 2), B(1, −6) e C(5, 4), determine as equações das retas que contêm as medianas do triângulo ABC.

7. Determine as equações da reta r:

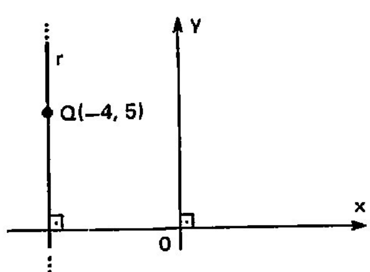
a.



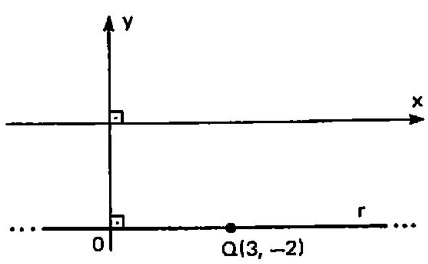
b.



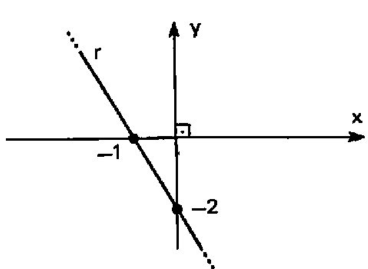
c.



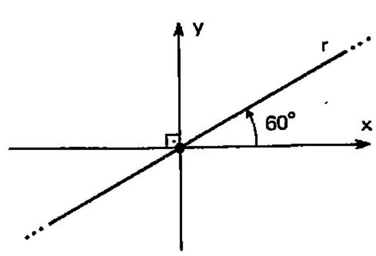
d.



e.



f.



8. Considerando a reta da equação $x + 2y - 3 = 0$, determine:

a. as coordenadas do ponto desta reta que tem abscissa 7.

Resolução:
Substituindo x por 7 na equação, obtemos:
$7 + 2y - 3 = 0 \rightarrow y = -2$
O ponto procurado é $(7, -2)$.

b. as coordenadas do ponto desta reta que têm abscissa −9.

c. as coordenadas do ponto desta reta que têm ordenada 4.

Resolução:
Substituindo y por 4 na equação, obtemos:
$x + 2 \cdot 4 - 3 = 0 \rightarrow x = -5$
O ponto procurado é $(-5, 4)$.

d. as coordenadas do ponto desta reta que têm ordenada −6.

e. as coordenadas do ponto desta reta que têm abscissa 0.

f. as coordenadas do ponto desta reta que têm ordenada 0.

9. Considerando uma reta que passa pelos pontos $A(6, 4)$ e $B(1, 2)$, determine:

a. o ponto desta reta que tem abscissa 6;
b. o ponto desta reta que tem ordenada 8;
c. o ponto desta reta que tem abscissa 0;
d. o ponto desta reta que tem ordenada 0.

10. Considerando uma reta que passa pelos pontos $M(5, 2)$ e $N(-4, -7)$, determine:

a. o ponto de encontro desta reta com o eixo x;
b. o ponto de encontro desta reta com o eixo y.

11. Determine o ponto de encontro das retas $x + y - 3 = 0$ e $2x - y + 12 = 0$.

Resolução:
Basta resolver o sistema:

$$\begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ 2x - y + 12 = 0 \end{cases}$$

Somando as equações membro a membro, obtemos:
$x = -3$ e $y = 6$
O ponto de encontro é $(-3, 6)$.

12. Determine o
dadas:
a. $x + 3y - 1 =$
b. $-x + y - 10 =$
c. $3x + 5y + 6 =$

13. Dados A(−3
D(−2, −6), dete
das diagonais do

14. Verifique se o
a. P(1, 3) e x −

Resolução:
Substituindo as
obtemos uma se
1 − 3 + 2 = 0 −
Isto significa qu

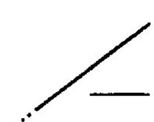
b. P(2, 7) ε x +

Resolução:
Substituindo a
obtemos uma se
2 + 7 − 1 = 0 −
Isto significa qu

c) P(−2, 2) e
d. P(3, 11) e
e. P(−3, 2) e
f. P(−3, −1) e

11

O coeficier
é a ordenada n



12. Determine o ponto de encontro das retas dadas:

a. $x + 3y - 1 = 0$ e $3x - 3y + 5 = 0$

b. $-x + y - 10 = 0$ e $x + 4y - 15 = 0$

c. $3x + 5y + 6 = 0$ e $x - y + 2 = 0$

13. Dados A(−3, 1), B(3, 9), C(7, 6) e D(−2, −6), determine o ponto de encontro das diagonais do quadrilátero ABCD.

14. Verifique se o ponto P pertence à reta dada:

a. P(1, 3) e $x - y + 2 = 0$

Resolução:
Substituindo as coordenadas de P na equação, obtemos uma sentença verdadeira:

$1 - 3 + 2 = 0 \rightarrow 0 = 0$

Isto significa que o ponto pertence à reta.

b. P(2, 7) e $x + y - 1 = 0$

Resolução:
Substituindo as coordenadas de P na equação, obtemos uma sentença falsa:

$2 + 7 - 1 = 0 \rightarrow 8 = 0$

Isto significa que o ponto não pertence à reta.

c) P(−2, 2) e $x + 3y - 4 = 0$

d. P(3, 11) e $4x - y - 1 = 0$

e. P(−3, 2) e $x + y + 4 = 0$

f. P(−3, −1) e $-x - y - 4 = 0$

15. Determine o valor de k, de tal forma que o ponto P(2, 1) pertença à reta $x + y + k = 0$.

16. Verifique se a reta $3x + y = 0$ passa pela origem do sistema de eixos cartesianos.

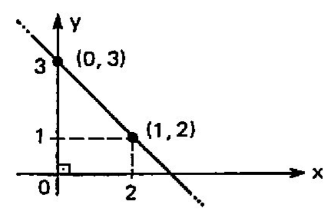
17. Verifique se a origem do sistema de eixos cartesianos pertence à reta $x + 3y - 1 = 0$.

18. Desenhe no plano cartesiano a reta cuja equação é $x + y - 3 = 0$.

Resolução:
Para desenharmos a reta no plano cartesiano, basta encontrarmos dois de seus pontos:

$x = 2 \rightarrow y = 1 \rightarrow (2, 1)$ pertence à reta
$x = 0 \rightarrow y = 3 \rightarrow (0, 3)$ pertence à reta

Localizando estes pontos no plano, temos a reta:



19. Desenhe no plano cartesiano as retas dadas:

a. $2x - y + 1 = 0$

b. $x - y - 3 = 0$

c. $3x + y - 1 = 0$

d. $x + y + 3 = 0$

e. $2x - y = 0$

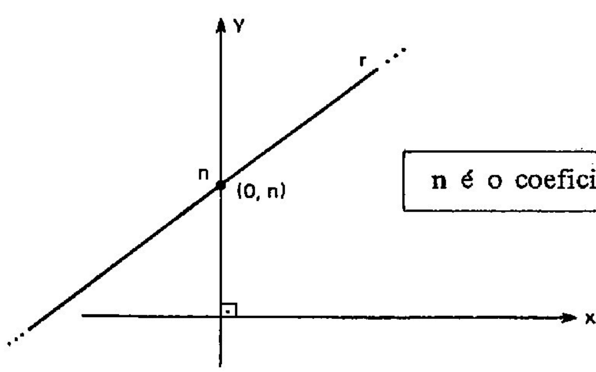
f. $x - 3 = 0$

g. $x + 8 = 0$

h. $y - 1 = 0$

11 Coeficiente linear de uma reta

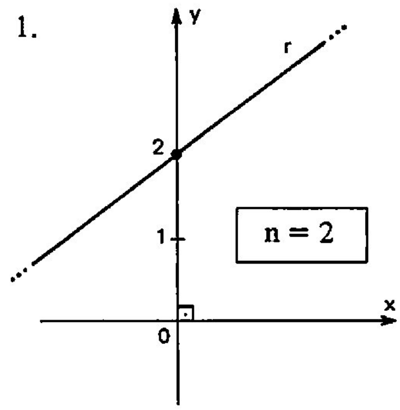
O coeficiente linear de uma reta r, não perpendicular ao eixo x, é a ordenada n do ponto em que esta reta corta o eixo y.



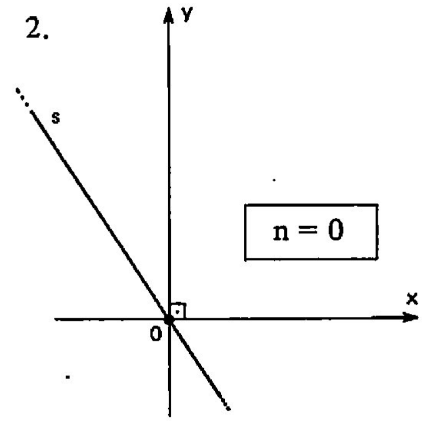
n é o coeficiente linear de r.

Exemplos:

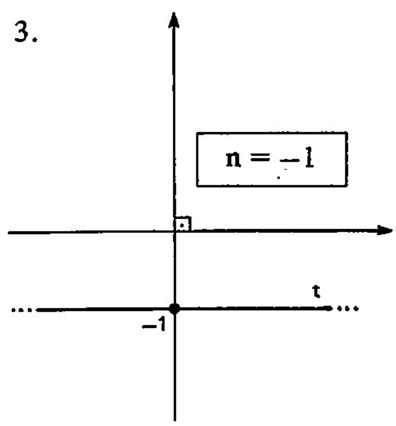
1.



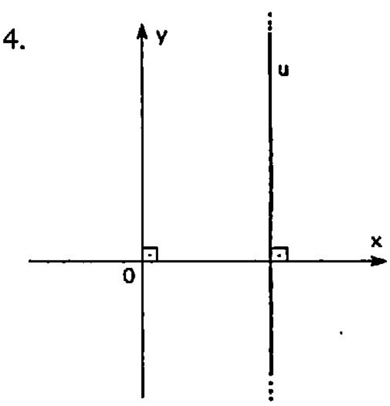
2.



3.



4.



Uma reta perpendicular ao eixo x não tem coeficiente linear.

Exercícios

1. Determine o coeficiente linear das retas dadas:

a. $x - 3y + 6 = 0$

Resolução:
Para obter o coeficiente linear da reta, basta obter o ponto em que a reta encontra o eixo y. Para isto, substituímos x por 0 na equação:

$x = 0 \rightarrow 0 - 3y + 6 = 0 \rightarrow y = 2$

O ponto procurado é (0, 2). Logo, o coeficiente linear é $\boxed{n = 2}$.

b. $x + y - 1 = 0$

c. $4x + 3y - 12 = 0$

d. $2x - y - 5 = 0$

e. $4x - 3y = 0$

f. $y - 5 = 0$

g. $x + 5 = 0$

2. Para que valor de k o coeficiente linear da reta $3x + y + 2k = 0$ é igual a 5?

3. Qual o coeficiente linear da reta que passa pelos pontos A(7, 2) e B(1, −10)?

12 A
e

Uma reta pod

Equação red

Toda reta nã
escrita na forma:

conhecida como e

Vimos que a
através da express

Isolando y n
obtemos:

O número y_0
x por 0 (zero), ob

Portanto, sen
forma:

Observe que r
- o coeficiente
- o coeficiente
do 2º membr

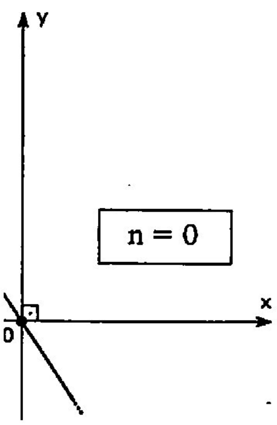
Assim temos:

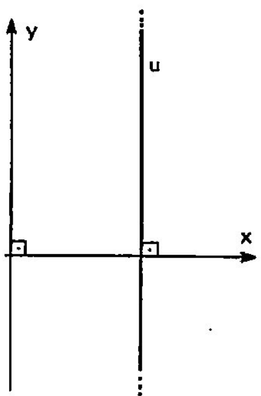
y

Exercíci

1. Escreva, na forr
que passa pelo pon
é m:

a. Q(3, 5), m = 4





rpendicular ao eixo x
ciente linear.

coeficiente linear da reta
5?

inear da reta que passa
(1, −10)?

12 As diversas equações da reta

Uma reta pode ter a sua equação escrita sob várias formas:

Equação reduzida da reta

Toda reta não perpendicular ao eixo x, pode ter a sua equação escrita na forma:

$$\boxed{y = mx + n}$$

conhecida como equação reduzida da reta.

Vimos que a equação de uma reta não vertical pode ser obtida através da expressão:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Isolando y no primeiro membro e distribuindo m no segundo, obtemos:

$$y = mx + y_0 - mx_0 \qquad (1)$$

O número $y_0 - mx_0$ é o coeficiente linear da reta, pois substituindo x por 0 (zero), obtemos:

$$y = y_0 - mx_0$$

Portanto, sendo $n = y_0 - mx_0$, a equação (1) pode ser escrita na forma:

$$\boxed{y = mx + n}$$

Observe que nesta forma ficam evidentes:

- o coeficiente angular m da reta, que é o coeficiente de x;
- o coeficiente linear n da reta, que é o termo independente de x do 2º membro.

Assim temos:

$$y = \underbrace{m}_{\text{coeficiente angular}}x + \underbrace{n}_{\text{coeficiente linear}}$$

Exercícios

1. Escreva, na forma reduzida, a equação da reta que passa pelo ponto Q, cujo coeficiente angular é m:

a. Q(3, 5), m = 4

Resolução:
$y - 5 = 4(x - 3) \rightarrow y - 5 = 4x - 12 \rightarrow$
$\rightarrow \boxed{y = 4x - 7}$

b. $Q(-3, 2)$, $m = 3$

c. $Q(5, -3)$, $m = -2$

d. $Q(6, 0)$, $m = \frac{1}{3}$

e. $Q(0, 4)$, $m = -\frac{1}{2}$

f. $Q(1, 1)$, $m = \sqrt{3}$

2. Escreva, na forma reduzida, a equação da reta que passa pelos pontos A e B:

a. $A(3, -2)$ e $B(1, 4)$

Resolução:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -2x + y + 12 + 2 - 3y - 4x = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow -6x - 2y + 14 = 0 \rightarrow$$

$$-2y = 6x - 14 \rightarrow y = \frac{6x - 14}{-2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{y = -3x + 7}$$

b. $A(2, 4)$ e $B(-6, 0)$

c. $A(1, -6)$ e $B(0, 1)$

d. $A(3, 4)$ e $B(-6, -8)$

e. $A\left(\frac{1}{3}, 2\right)$ e $B\left(0, \frac{2}{3}\right)$

f. $A(3, 5)$ e $B(-4, 5)$

3. Qual é o coeficiente linear das retas do exercício anterior?

4. Qual deve ser o valor de n para que o ponto $P(2, 5)$ pertença à reta $y = 2x + n$?

5. Qual deve ser o valor de m para que o ponto $P(-3, 9)$ pertença à reta $y = mx + 3$?

6. Sabendo que os pontos $A(2, 7)$ e $B(-1, 1)$ pertencem à reta cuja equação é $y = mx + n$, determine os valores de m e n.

Equação geral da reta

Toda reta pode ter a sua equação escrita na forma:

$$\boxed{ax + by + c = 0}$$

Esta equação é conhecida como **equação geral da reta.**

Já tivemos a oportunidade de escrever equações de retas na forma geral. Vamos mostrar agora que toda equação da forma $ax + by + c = 0$, com **a** e **b** não simultaneamente nulos, é uma equação de reta.

Primeiro caso: $\boxed{a = 0 \text{ e } b \neq 0}$

Substituindo **a** por 0 (zero) na equação $ax + by + c = 0$, obtemos:

$0x + by + c = 0 \rightarrow \boxed{y = -\frac{c}{b}}$ Reta paralela ao eixo **x**

Segundo caso: $\boxed{a \neq 0 \text{ e } b = 0}$

Substituindo **b** por 0 (zero) na equação $ax + by + c = 0$, obtemos:

$ax + 0b + c = 0 \rightarrow \boxed{x = -\frac{c}{a}}$ Reta perpendicular ao eixo **x**

Terceiro caso: $\boxed{a \neq 0 \text{ e } b \neq 0}$

Isolando **y** no primeiro membro, obtemos:

$ax + by + c = 0 \rightarrow \boxed{y = -\frac{b}{a}x - \frac{c}{a}}$ Reta com coeficiente angular $m = -\frac{b}{a}$ e coeficiente linear $n = -\frac{c}{a}$

Exemplos:

1. $2x - 2y + 6$
$m = 1$ e coefic

$2x - 2y + 6 =$

2. $4y - 8 = 0$ é
e coeficiente li

$4y - 8 = 0 \rightarrow$

Esta reta é par

3. $2x - 6 = 0$ é
passa pelo pon

$2x - 6 = 0 \rightarrow$

Exercíci

7. Obtenha o coefic
ciente linear **n** das ret

a. $5x + y + 10 = 0$

Resolução:
Basta colocar a equ
$5x + y + 10 = 0 \rightarrow$
Temos, então: $m =$

b. $4x - 2y + 9 = 0$

Resolução:
$4x - 2y + 9 = 0 \rightarrow$
$\rightarrow y = \frac{-4x - 9}{-2} \rightarrow$

Logo: $m = 2$ e n

c. $3x + y - 8 = 0$

d. $-x + 2y + 6 = 0$

e. $4x - 2y + 16 = ($

8. Escreva a equação
te angular é $m = -$
$P(2, -3)$.

9. Escreva a equação
los pontos $A(-1, 1)$

10. Escreva a equaç
pelos pontos A e B:

a. $A(1, 7)$ e $B(-5,$

b. $A(3, 1)$ e $B(3, 8$

c. $A(0, 0)$ e $B(1, 5$

6, 0)
1)
6, −8)
, $\frac{2}{3}$)
4, 5)
ıte linear das retas do exer-
ılor de n para que o ponto
y = 2x + n?
lor de m para que o ponto
ta y = mx + 3?
ıontos A(2, 7) e B(−1, 1)
a equação é y = mx + n,
e m e n.
ırma:
l da reta.
;ões de retas na forma
forma ax + by + c = 0,
ação de reta.
by + c = 0, obtemos:
ıralela ao eixo x
by + c = 0, obtemos:
ːa perpendicular ao
ɔ x
ːta com coeficiente
gular $m = -\frac{b}{a}$ e coe-
iente linear $n = -\frac{c}{a}$

Exemplos:

1. $2x - 2y + 6 = 0$ é a equação da reta que tem coeficiente angular $m = 1$ e coeficiente linear $n = 3$. De fato, podemos escrever:

$$2x - 2y + 6 = 0 \rightarrow 2y = 2x + 6 \rightarrow \boxed{y = x + 3}$$

2. $4y - 8 = 0$ é a equação da reta que tem coeficiente angular $m = 0$ e coeficiente linear $n = 2$. De fato, temos:

$$4y - 8 = 0 \rightarrow 4y = 8 \rightarrow \boxed{y = 2}$$

Esta reta é paralela ao eixo x.

3. $2x - 6 = 0$ é a equação da reta que é perpendicular ao eixo x e passa pelo ponto (3, 0). De fato, podemos escrever:

$$2x - 6 = 0 \rightarrow 2x = 6 \rightarrow \boxed{x = 3}$$

Exercícios

7. Obtenha o coeficiente angular **m** e o coeficiente linear **n** das retas dadas:

a. $5x + y + 10 = 0$

Resolução:
Basta colocar a equação na forma reduzida:
$5x + y + 10 = 0 \rightarrow y = -5x - 10$
Temos, então: $m = -5$ e $n = -10$

b. $4x - 2y + 9 = 0$

Resolução:
$4x - 2y + 9 = 0 \rightarrow -2y = -4x - 9 \rightarrow$
$\rightarrow y = \frac{-4x - 9}{-2} \rightarrow y = 2x + \frac{9}{2}$

Logo: $m = 2$ e $n = \frac{9}{2}$

c. $3x + y - 8 = 0$
d. $-x + 2y + 6 = 0$
e. $4x - 2y + 16 = 0$
f. $4x - 2y = 0$
g. $3y - 9 = 0$
h. $6x + 12 = 0$

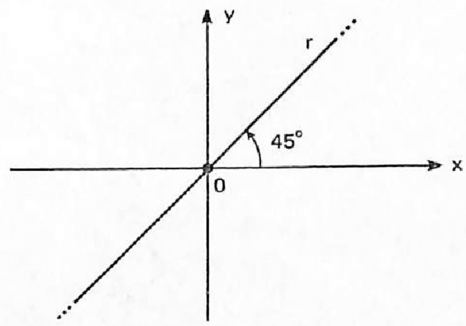
8. Escreva a equação geral da reta cujo coeficiente angular é $m = -7$ e que passa pelo ponto P(2, −3).

9. Escreva a equação geral da reta que passa pelos pontos A(−1, 1) e $B\left(1, -\frac{1}{3}\right)$.

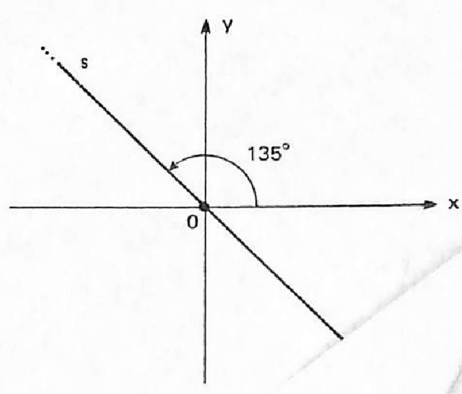
10. Escreva a equação geral da reta que passa pelos pontos A e B:

a. A(1, 7) e B(−5, 7)
b. A(3, 1) e B(3, 8)
c. A(0, 0) e B(1, 5)

11. Escreva a equação geral e reduzida das bissetrizes dos quadrantes pares e dos quadrantes ímpares.



A reta r é a bissetriz dos quadrantes ímpares.



A reta s é a bissetriz dos quadrantes pares.