Maria Iára

Vera Lucia

Náira Maria

Curso de Matemática Reformulada
I.E. "General Flores da Cunha"
- 1970 -

C O N C E I T O   D E   O P E R A Ç Ã O :

CONSIDERAÇÕES GERAIS SÔBRE OPERAÇÕES:

O homem foi levado a abandonar a contagem um a um, à medida que as necessidades matemáticas aumentaram. Êste homem, pouco a pouco, precisou "contar em grupos" e terminou chegando às operações aritméticas.

Da operação elementar de contagem um a um o homem caminhou, naturalmente, para a adição. Êle passou a reunir conjuntos ao invés de acrescentar um elemento sucessivamente a um conjunto básico.

No momento em que o homem reunia as frutas de sua colheita ou os peixes de uma pescaria, êle estava operando (trabalhando) concretamente, não sendo necessário saber as técnicas da adição para fazer isso. É justamente nessas atividades que a adição foi buscar suas bases concretas. Estas atividades foram fornecendo a base concreta sôbre a qual o homem deveria firmar as noções matemáticas que - aos poucos vão se tornando cada vez mais abstratas.

A base concreta de uma operação não é a operação em si. Esta é sempre abstrata : é um ato do pensamento.

Certas atividades como que inspiram as operações matemáticas. Por exemplo: ao reunir dois conjuntos, o homem adiciona ; quando retira de um conjunto um subconjunto, êle subtrai ; reunindo vários conjuntos equivalentes (mesma cardinalidade), estaria multiplicando; e, finalmente, se decompusesse um conjunto em vários subconjuntos de mesma cardinalidade, estaria dividindo.

Porém, para a Matemática, não é necessário realizar a ação. Basta pensar. Teremos, então, a ação imaginada. Na maioria das vêzes, quando o homem resolve um problema, é a ação imaginada que orienta o seu raciocínio.

As ações (quer sejam realmente executadas, quer simplesmente imaginadas), que o homem pratica com os objetos físicos do mundo que o rodeia, apenas sugerem as operações matemáticas, mas ainda não são as operações tais como o matemático as entende.

Quando deitamos na cama estamos realizando uma operação. É uma operação direta. Mas se a partir dessa, realizarmos a operação de levantarmos da cama, estamos realizando a operação inversa.

A mesma idéia de sentido na operação existe nas operações matemáticas : umas compõem, outras decompõem.

Existem atividades que, à custa de conjuntos dados, compõem um conjunto resultado. São as chamadas operações diretas. Porém, as atividades que desmancham um conjunto dado em subconjuntos, são as operações inversas.

Assim, enquanto a idéia aditiva é de compor um conjunto, a subtrativa é de retirar um subconjunto, separando um conjunto dado em dois subconjuntos que, se forem reunidos, reconstituem o conjunto primitivo.

A ação de subtrair pode desmanchar o que havia sido composto pela ação de adicionar.

A idéia multiplicativa é de compor um conjunto pela reunião de conjuntos da mesma cardinalidade, e a idéia de dividir é a de obter conjuntos equivalentes, retirados de um mesmo conjunto dado. Logo, a ação de dividir pode desmanchar o que havia sido composto pela ação de multiplicar.

Obedecendo ao que as atividades com os conjuntos sugerem, adição e multiplicação são operações diretas, enquanto subtração e divisão são as inversas correspondentes.

OS GRAUS DE DIFICULDADE QUE O HOMEM FOI ULTRAPASSANDO :

Da simples contagem um a um, o homem teria passado a "contar em grupos". Aprendeu a reunir dois conjuntos, ao invés de ir acrescentando sucessivamente um elemento a um conjunto básico : adicionava. Ao mesmo tempo, realizava o mecanismo inverso : subtraia. Estava vencida uma primeira etapa : construiu "suas tábuas de somar", que lhe permitiam igualmente subtrair. Essas duas operações estão no <u>primeiro gráu de dificuldade</u>. Após, reunindo conjuntos iguais (ou equivalente), o homem dominou a idéia <u>multiplicativa</u> e sua inversa : <u>a de dividir</u>. Construiu as tábuas de multiplicar, com as quais também podia dividir e venceu o <u>segundo gráu de dificuldade</u>.

A OPERAÇÃO MATEMÁTICA : conceituação.

Fizemos várias considerações a respeito de operações. O que faremos agora será precisar o conceito de operação.

Quando reunimos conjuntos concretamente, ou quando simplesmente pensamos nas coisas que estamos reunindo, ainda não estamos dentro da <u>operação matemática pura</u>. Isto só acontece quando deixamos de pensar nas coisas e pensamos, só e únicamente, nas <u>quantidades</u>.

Por exemplo : quando temos "4 vêzes 8 botões, são 32 botões" e compreendemos que 4 vêzes 8 (qualquer que seja a quantidade do 8) é igual a 32, aí sim : estamos operando com cardinalidade pura.

O domínio das operações permite que você analise a situação - problema ; conheça os números dados e escreva seus numerais, ligados pelos sinais de operação ; opere com os números, obtendo um numeral - resposta ; interprete o número que êle representa, respondendo, assim, à questão proposta.

QUE É UMA OPERAÇÃO NO CONJUNTO Nº 0,1,2,3,4... ?

É uma lei (chamada lei de composição) ou regra que permite associar a dois números naturais um terceiro número natural. Os dois números dados chamam-se têrmos e o terceiro número obtido, resultado da operação.

Logo, por exemplo, dados os números 10 e 2,

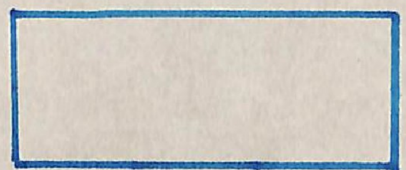
- a operação adição associa, mediante certa lei, o número 12 ;
- a operação subtração associa, mediante certa lei, o número 8 ;
- a operação multiplicação associa, mediante certa lei, o número 20 ;
- a operação divisão associa, mediante certa lei, o número 5.

Um outro exemplo que serve para ilustrar o conceito de operação matemática é o que consiste em achar a área de um retângulo dado.

Assim, sendo o retângulo de lados 2 cm e 5 cm, a operação em fóco nos leva à determinação da sua área: 2×5 ou 10 cm^2.

Simbòlicamente,

2 cm



5 cm

(2,5) 10

Isto é, ao par de números (2,5), que são as medidas dos lados do retângulo, associamos o número 10, área do retângulo.

Adição	+
Subtração	−
Multiplicação	x
Divisão	÷ ou :

1. A D I Ç Ã O

1.1. FUNDAMENTAÇÃO E CONCEITO

Dados 2 conjuntos A e B

A tem 3 elementos

B tem 6 elementos

? A   B =   , isto é, A e B não tem elementos comuns.

Por exemplo :

A = $\{ \triangle , \square , \bigcirc \}$

B = $\{a, b, c, d, e, f\}$

Efetuando a reunião A e B, obtém-se

? A $\cup$ B = $\triangle$, a, $\square$, b, $\bigcirc$, c, d, e, f

? Quantos elementos tem A   B ?

A   B = $\{\triangle, a, \square, b, \bigcirc, c, d, e, f, \}$

N = $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 \ldots\}$

O número de elementos de A $\cup$ B é 9.

O número 9 é chamado soma de 3 e 6 e indica-se assim: 3 + 6 = 9

Adotamos a seguinte lei como operação ADIÇÃO :

a que associa ao par (3,6), formado pelo número de elementos dos conjuntos dados, o número de elementos do conjunto <u>reunião</u>, isto é, 9 .

? 3,6 $\longrightarrow$ 9

3,6   I x I $\longrightarrow$ 9 $\in$ I

Dado (a,b) um elemento qualquer de $\overset{N}{I} \times \overset{N}{I}$, a êle associamos um elemento S de $\overset{N}{I}$, obtido do seguinte modo :

constrói-se um conjunto A com a elementos,
constrói-se um conjunto B com b elementos,

e tais que $A \cup B = \phi$

Calcula-se $A \cup B$

S é o número de lementos de $A \cup B$

S chama-se a soma de <u>a</u> e <u>b</u> e é indicada

a + b = S

Como:

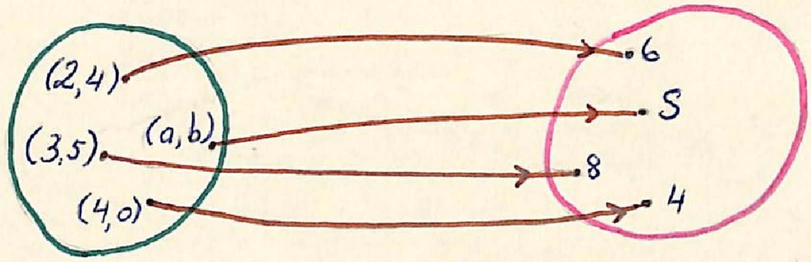
(2,4) $\longrightarrow$ 6

(3,5) $\longrightarrow$ 8

(4,0) $\longrightarrow$ 4

2

Representando no diagrama



Conjunto $\overset{N}{I} \times \overset{N}{I}$ é infinito e não é possível representar no diagrama todos os pares ordenados que pertencem a êle : mas sabemos que qualquer que seja o par (a,b) I x I, existe sempre um único número S $\in$ I, tal que

$$a + b = S$$

Temos, portanto, uma aplicação de $\overset{N}{I} \times \overset{N}{I}$ em $\overset{N}{I}$.

A esta aplicação damos o nome de operação de adição ; a e b recebem o nome de parcelas.

+ é o sinal da adição

S é o resultado da operação, denominado SOMA.

Assim, chegamos à definição :

> operação de adição é a aplicação de $\overset{N}{I} \times \overset{N}{I}$ em $\overset{N}{I}$, que, ao par ordenado (a,b) de $\overset{N}{I} \times \overset{N}{I}$, associa-se S $\overset{N}{I}$, de tal maneira que a, b e S sejam, respectivamente, os números de elementos de A,B e A $\cup$ B, sendo A e B dois conjuntos disjuntos quaisquer.

1.2. PROPRIEDADES DA ADIÇÃO

1.2. 1) Propriedade Comutativa

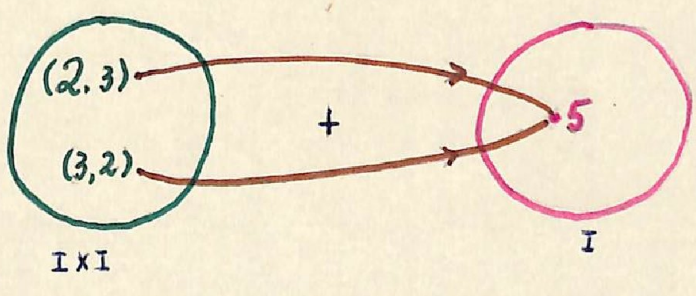
$2 + 3 = 5$

$3 + 2 = 5$

(como a igualdade é simétrica e transitiva)

$2 + 3 = 3 + 2$

A ordem das parcelas não altera a soma



A adição goza da propriedade comutativa ou seja - qualquer que seja (a, b) ? I x I, tem-se sempre

$$a + b = b + a$$

1.2. 2) Propriedade Associativa

$$(2 + 3) + 6 = 5 + 6 = 11$$

e

$$2 + (3 + 6) = 2 + 9 = 11$$

Portanto,

$$(2+3)+6 = 2+(3+6)$$

A adição goza da propriedade <u>associativa</u> quaisquer que sejam os números inteiros <u>a</u>, <u>b</u> e <u>c</u> temos sempre :

$$(a+b)+c = a+(b+c)$$

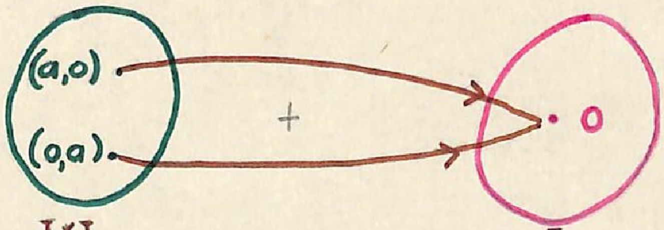
1.2. 3) Existência de Elemento Neutro. (zero)

$$2+0 = 0+2 = 2$$

$$3+0 = 0+3 = 3$$

Zero é o número que, adicionado (à esquerda ou à direita) a qualquer número, reproduz êsse número.

O zero é o elemento neutro da adição.



N N

Qualquer que seja $\in$ I, existe o $\in$ I e

$1 \in$ I tais que a+o = o+a = a

N

1.2. 4) Fechamento

A soma de dois números naturais é sempre um número natural.

Adicionando 2 (dois) números quaisquer o resultado será também um número natural.

Exemplo : 3 + 4 = 7

nº natural nº natural nº natural

De um modo geral

? ? ?

$(a + b) \in N$ para qualquer $a \in N$ e $B \in N$
e diz-se que o conjunto N é fechado para a operação adição (p.f.a - propriedade fechamento da adição)

1.3. TÁBUA DA ADIÇÃO

A tábua da adição é usada para obtenção da soma de dois números naturais quaisquer.

$N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \ldots\}$

Procura-se o resultado (soma) no cruzamento das linhas horizontais e verticais que passam pelos números operados.

+	0	1	2	3	4	5	6	7 ...
0	0	1	2	3	4	5	6	
1	1	2	3	4	5	6	7	8
2	2	3	4	5	6	7	8	9
3	3	4	$\boxed{5}$	6	7	8	9	10
4	4	5	6	7	8	9	10	11
5	5	6	7	8	9	10	12	13
6	6	7	8	9	10	11	13	14
7	7	8	9	10	11	12	14	15
⋮								

2. M U L T I P L I C A Ç Ã O

2.1. FUNDAMENTAÇÃO, CONCEITO

Consideremos dois conjuntos finitos A e B :

$A = \{a, b, c\}$ onde $n(A) = 3$

$B = \{x, y\}$ onde $n(B) = 2$

Através do Produto Cartesiano dêsses conjuntos teremos :

$P = A \times A = \{(a,x)\ (a,y)\ (b,x)\ (b,y)\ (c,x)\ (c,y)\}$

onde $n(P) = 6$

Agora, consideremos o número de elementos (que é um número natural) de cada um dêsses conjuntos.

$(A, B) \longrightarrow P$

$\downarrow \quad \downarrow$

$3, 2 \longrightarrow 6$ (Os elementos do conjunto P são pares).

Adotemos a seguinte lei como operação Multiplicação a que associa ao par (3,2), formado pelos números de elementos dos conjuntos dados, o número de elementos do conjunto produto cartesiano, isto é, 6

Indicando :

$(3,2) \longrightarrow 3 \times 2 = 6$

3 e 2 são os têrmos da operação e se chamam FATÔRES.

x ou • São os Sinais da multiplicação

6 é o resultado da operação, chamado PRODUTO

É importante dizer também que a multiplicação também é uma operação binária porque atua sôbre dois números naturais e produz sempre um terceiro número natural (resultado).

2.2. PROPRIEDADES DA MULTIPLICAÇÃO

2.2. 1) Propriedade Comutativa

Na multiplicação a ordem dos fatôres não altera o produto.

De fato :

$4 \times 3 = 12$

donde $4 \times 3 = 3 \times 4$

$3 \times 4 = 12$

A multiplicação goza da propriedade comutativa porque qualquer que seja

$(a,b) \in \overset{N}{I} \times \overset{N}{I}$ tem sempre

$$a \times b = b \times a$$

2.2. 2) Propriedade Associativa

A multiplicação goza desta propriedade porque quaisquer que sejam os números inteiros a,b,c temos sempre :

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

A multiplicação de três (3) números naturais pode ser feita associando-se os dois primeiros ou os dois (2) últimos fatôres.

Exemplo :

$$(4 \times 2) \times 3 = 4 \times (2 \times 3)$$

Isto é, pode-se sempre associar dois ou mais fatôres de uma multiplicação, substituindo-os pelo seu produto.

Generalizando :

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

2.2. 3) Propriedade Distributiva da Multiplicação em Relação à Adição ou Subtração.

Para multiplicar um número por uma soma indicada (ou diferença) pode-se multiplicar o número pelos têrmos da soma (ou diferença) e adicionar (ou subtrair) os produtos obtidos.

Veremos, então, que a multiplicação se distribui pelos têrmos de uma adição ou subtração.

Exemplo :

$$4 \times (5 + 3) = 4 \times 5 + 4 \times 3$$

$$4 \times (5 - 3) = 4 \times 5 - 4 \times 3$$

Como aplicação da propriedade temos :

1º A Multiplicação "distribui" a adição e a subtração ao mesmo tempo.

Exemplo :

$8 \times (5 + 3 - 1) = 8 \times 5 + 8 \times 3 - 8 \times 1$

2º Dá a regra para efetuarmos o produto de duas somas indicadas.

Exemplo :

$$(6 + 3) \times (2 + 5) = 6 \times (2 + 5) + 3 \times (2 + 5)$$
$$= 6 \times 2 + 6 \times 5 + 3 \times 2 + 3 \times 5$$

2.2. 4) Elemento Neutro - 1 (um)

No conjunto N existe 1, que é o único número que multiplicado por outro, em qualquer ordem, dá para produto êsse outro número.

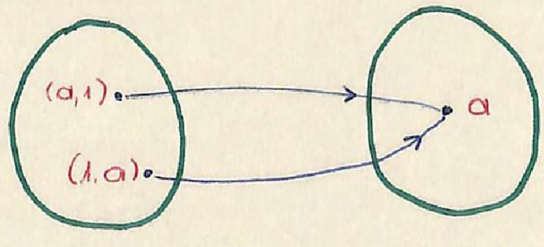
Exemplo :

$5 \times 1 = 1 \times 5 = 5$

$a \times 1 = 1 \times a = a$ para qualquer

$a \in N$

?



5

2.2. 5) Fechamento

O produto de dois números naturais é sempre um número natural.

Exemplo : $5 \times 3 = 15$

Tábua da Multiplicação

x	0	1	2	3	4	...
0	0	0	0	0	0	...
1	0	1	2	3	4	...
2	0	2	4	6	8	...
3	0	3	6	$\boxed{9}$	12	...
4	0	4	8	12	16	...
⋮						

OPERAÇÕES : A D I Ç Ã O

E

M U L T I P L I C A Ç Ã O

Trabalho realizado pela aluna :

VERA LÚCIA MEDEIROS FERNANDES

<u>Apreciação</u> :

Antes de realizar a parte escrita do trabalho reuni os livros indicados e li bastante.

Só após é que iniciei o trabalho escrito.

Gostei muito do trabalho porque além de ampliar os meus conhecimentos, enriqueceu e complementou a minha experiência como professôra primária.

A´

7

3. S U B T R A Ç Ã O

3.1. CONCEITO - Se considerarmos dois números naturais, 8 e 3, por exemplo, dados numa certa ordem, sendo o primeiro $\geqslant$ o segundo, a operação que permite que encontremos a diferença entre o primeiro e o segundo elemento chama-se subtração.

Ou :

Dado o par ordenado de números inteiros (a,b) sendo a $\geqslant$ b, nessa ordem, a operação que tem como objetivo a obtenção do número inteiro "c", que somado ao segundo, dê como resultado o primeiro, chama-se subtração.

Considerando o par (a,b) sabemos que c é a diferença porque : $a - b = c$ e

$$c + b = a$$

Quando estamos operando dois números naturais para determinarmos a diferença, estamos realizando a operação subtração. A indicação desta operação é feita pe lo sinal - (menos). Consideremos : a - b = c

Os têrmos : a e b, nessa ordem, recebem as designações de : minuendo e subtraendo. Podem ser chamados de aditivo e subtrativo, respectivamente.

O c, é o resultado da operação e, é sempre uma diferença. Pode também ser denominado de resto, falta, excesso, dependendo da situação que envolve o resultado.

A subtração é uma operação binária, pois atua com sòmente dois têrmos de cada vez.

Têmos pois :

minuendo - subtraendo = diferença

ou :

subtraendo + diferença = minuendo

Esta segunda igualdade, permite-nos "tirar" a prova da subtração.

3.2. POSSIBILIDADES :

Sendo a subtração a inversa da adição, têmos o primeiro têrmo (minuendo) que fôra uma soma. Sendo assim êle é $\geqq$ ao segundo têrmo (subtraendo).

Para que seja possível a operação subtração, é necessário que a afirmativa acima ocorra, caso contrário não haverá diferença entre êles.

Exemplo : 8 - 3 = 5

8 > 3

Se os dois números inteiros a serem operados forem iguais, acharemos como diferença zero :

8 - 8 = 0

Mas se tomarmos os têrmos nesta ordem : 3 - 8, não haverá diferença, pois não existe número natural que somado a 8, dê como resultado 3.

Não há pois possibilidade de operação.

Concluímos, pois, que nem sempre é possível a subtração com dois números naturais quaisquer.

3.3. APLICAÇÃO DO SÍMBOLO DE EQUIVALÊNCIA ENTRE A ADIÇÃO E SUA INVERSA A SUBTRAÇÃO.

Já ficou claro que :

8 - 3 = 5 porque

5 + 3 = 8

Podemos pois dizer que estas duas igualdades se equivalem.

O símbolo de equivalência é $\Longleftrightarrow$

Temos então : 8 - 3 = 5 $\Longleftrightarrow$ 5 + 3 = 8

ou minuendo - subtraendo = diferença $\Longleftrightarrow$ subtraendo + diferença = minuendo. A equivalencia permite-nos calcular qualquer dos têrmos de uma subtração usando a adição correspodente;

$$\square + \triangle = \star \iff \begin{cases} \square = \star - \triangle \\ \triangle = \star - \square \end{cases}$$

3.4. PROPRIEDADES.

Vamos verificar as propriedades de que goza a subtração.

3.4. 1) Comutativa.

A subtração não goza da propriedade comutativa, pois justamente impomos como condição para a existência da operação que : o minuendo seja $\geq$ subtraendo.

Então :

$8 - 3 = 5$ mas

$3 - 8$ não é possível no conjunto dos números naturais.

Na subtração a ordem dos têrmos interessa para a operação.

3.4. 2) Associativa.

A subtração também não goza da propriedade associativa, pois :

$(a - b) - c \neq a - (b - c)$

Tomemos por exemplo : 23 - 10 - 3.

Associando teríamos : (23 - 10)- 3 ou

23 - (10 - 3).

Verificamos que : 13 - 3 = 10 e

23 - 7 = 16

Logo : $(13 - 3) \neq (23 - 7)$

Não sendo associativa, não será também dissociativa.

3.4. 3) Elemento Neutro.

O elemento zero não altera o valor do minuendo 8 - 0 = 0

Não havendo a propriedade comutativa não teremos 0 - 8. Esta situação é exigida pela definição do elemento neutro. Assim $8 - \Delta = \Delta - 8 = 8$

Não há valor para Δ no conjunto dos números naturais. Concluímos que a subtração não goza da propriedade do elemento neutro. A condição de anulamento, que é a diferença igual a zero, é satisfeita quando :

minuendo = subtraendo: $\Delta - \Delta = 0$

3.4. 4) Propriedade de Fechamento :

Para o conjunto Nn ser fechado em relação à subtração, exigiria : $a \in Nn \wedge b \in Nn \Longrightarrow (a-b) \in Nn$.

Isto é, se a é um número natural e b é um número natural, (a-b) é necessàriamente um número natural.

Na subtração isto não se verifica. Nem tôdas as subtrações são possíveis no campo dos números naturais. Não podemos subtrair dois números naturais quaisquer, indiferente à ordem.

$8 - 3 = 5$ mas

$3 - 8$ não encontra resultado no conjunto dos naturais.

Podemos no entanto dizer que : tomando dois números naturais, a e b, se (a-b) fôr possível, então o resultado será um número natural.

3.5. TÁBUA DA SUBTRAÇÃO.

Podemos construir uma tabela operatória para a subtração. Escrevemos o minuendo na primeira coluna vertical e o subtraendo na primeira linha horizontal.

Subtraendo

Minuendo

-	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	3	2	1	0	0	0	0	0	0	0
4	4	3	2	1	0	0	0	0	0	0
5	5	4	3	2	1	0	0	0	0	0
6	6	5	4	3	2	1	0	0	0	0
7	7	6	5	4	3	2	1	0	0	0
8	8	7	6	$\boxed{5}$	4	3	2	1	0	0
9	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

3.6. ASSOCIAÇÃO DE ADIÇÕES E SUBTRAÇÕES.

3.6. 1) Propriedade Fundamental da Diferença de dois Números.

Somando ou subtraendo um mesmo número aos termos de uma subtração, a diferença não se altera:

7

$a - b = d$ com $a \geq b$, então

$(a+c) - (b+c) = a - b$

$(a-c) - (b-c) = a - b$

(se $a \geq c$ e $b \geq c$)

3.6. 2) Subtração de uma Soma Indicada.

Para subtrair de um número uma soma indicada de diversos números é suficiente subtrair sucessivamente cada um dos têrmos da soma. O resultado será o mesmo da subtração do mesmo pela soma indicada:

$20 - (2+3+5) = 20 - 2 - 3 - 5$

Ou generalizando:

$a - (b-c-d) = a - b - c - d$

3.6. 3) Tomemos : $\square = 5$

$\triangle = 10$ teremos $c = 5$

Se conservarmos $\triangle = 10$ e adicionarmos um inteiro a $\square$, veremos que c aumentará de valor conforme o valor de $\square$ aumenta. E se diminuirmos o valor de $\square$ o valor de c também diminuirá.

Conclusão - O valor da diferença varia diretamente com o valor do minuendo.

3.6. 4) Tomemos agora : $\square = 25$

$\triangle = 10$ e

$\square - \triangle = c$, conser-

vando-se o valor de $\square$ e aumentando o valor de $\triangle$ observa-se que à medida que $\triangle$ aumenta o valor, o valor de c diminui. Do mesmo modo quando $\triangle$ diminui de valor, c aumentará de valor.

Concluímos que :

O valor da diferença varia inversamente com o valor do subtraendo.

OPERAÇÃO : S U B T R A Ç Ã O

Trabalho realizado pela aluna :

MARIA IZAR HOMRICH

__Apreciação__ :

Tendo em vista a dificuldade de reunir-se o grupo para estudo, dividimos a tarefa.

Tocou-me a subtração.

O trabalho foi proveitoso, pois forneceu uma oportunidade de pesquisar o assunto em diversos livros, selecionar o material. Em alguns livros a operação Subtração, estava pouco clara, e em outros, quase não havia possibilidade de pesquisar, tão superficialmente era tratado.

Acredito que o trabalho esteja bom.

Nível B
Faltou basear a subtração
na complementação.

4. D I V I S Â O

4.1. CONCEITO.

Considerando dois números naturais, sendo por exemplo :

20 o primeiro dêles e

5 o segundo :

A operação que permite encontrar um terceiro número natural que, multiplicado pelo segundo, dê para resultado o primeiro é denominada divisão (exata).

A indicação da divisão é feita pelo sinal : (lê-se : "dividido por") e o terceiro número, resultado da operação, é chamado quociente (exato).

Representando êsse quociente por $\square$,

temos: $20 : 5 = \square$ tal que $\square \times 5 = 20$

Como 4 é o único número natural que, multiplicado por 5, resulta 20 (basta usar a tábua da multiplicação, seguindo caminho "inverso"), concluímos que

$\square = 4$. Logo :

$$20 : 5 = 4 \text{ porque } 4 \times 5 = 20$$

e, por isso, a divisão é considerada operação inversa da multiplicação.

Inicialmente, pois, a divisão será tomada como inversa da multiplicação e será, então, a operação inversa do segundo gráu. Assim entendida, a divisão "desmancha" o que a multiplicação compôs. Dêste modo, cada multiplicação dá origem a duas divisões :

$$4 \times 5 = 20 \Longrightarrow 20 : 5 = 4 \wedge 20 : 4 = 5$$

Notamos que o dividendo teria sido "produto" onde os fatôres eram "divisor" e "quociente". A inversão consistiria justamente em, conhecidos o produto e um dos fatôres, determinar o outro fator:

$$8 \times m = 40 \Longrightarrow = 40 : 8$$

$$m \times 7 = 28 \Longrightarrow = 28 : 7$$

Assim, como inversa da multiplicação, a divisão sempre é possível.

4.2. DIVISÃO PARTITIVA E DIVISÃO POR MEDIDA.

Suponhamos que um conjunto tem de ser separado em subconjuntos iguais. Nesta situação, como já vimos, é chamada <u>divisão</u>.

De início, o homem é levado a explorar

2

apenas a chamada "divisão por medida", chegando depois a estudar a "divisão partitiva".

4.2. 1) DIVISÃO POR MEDIDA :

Um dos tipos de situação de divisão é aquêle em que se conhece o tamanho dos subconjuntos e quer se saber quantos dêsses subconjuntos podem ser formados. Êsse tipo de ação, chamado de comparação ou de medida, é aconselhado para ensinar os fatos básicos da divisão.

Por exemplo : "10 lápis serão separados em subconjuntos de 2 lápis cada um. Quantos conjuntos serão feitos ?"

A situação é representada simbòlicamente por 10 : 2 e o processo pelo qual 10 : 2 é substituído por 5 Chama-se divisão.

4.2. 2) DIVISÃO PARTITIVA :

Outro tipo de situação de dividir é aquêle em que se conhece o número de subconjuntos a ser formado e o tamanho de cada um dêsses subconjuntos, precisa ser encontrado. Êsse tipo de ação é chamado repartição. Por exemplo: "10 lápis precisam ser separados em 5 subconjuntos iguais. Quantos lápis haverá em cada subconjunto ?"

3

Êsse tipo de ação é o que conhecemos pelo nome de " divisão partitiva ".

Para melhor fundamentarmos a " divisão por medida " e a " divisão partitiva ", trabalharemos com o seguinte exemplo :

A divisão de 15 por 3 pode surgir de duas situações diferentes.

1º) " Divisão Por Medida " : Quantos grupos de 3 balas há em 15 balas ? A resposta será 5 grupos.

2º) " Divisão Partitiva " : Mamãe quer distribuir 15 balas por 3 crianças. Quantas balas cada uma vai receber ? A resposta será 5 balas.

Como vemos a resposta é 5 em ambos os problemas, que exprimem, entretanto, situações diferentes. Na primeira, verificamos quantas vêzes 3 balas estão contidas em 15. Na segunda ela reparte as 15 balas pelas 3 crianças. É preciso que o professor conheça êsses dois aspectos porque êles serão importantes em futuras aprendizagens do aluno.

Para desenvolver a compreensão do significado de operação torna-se evidente a vantagem de usar a "divisão por medida".

O exemplo utilizado no estudo da multiplicação servirá agora para a divisão. Assim, reunindo-se 3 caixas com 5 balas cada uma, forma-se um grupo único.

Descrevemos a ação realizada com 3x5=15, sendo levados depois a observarmos que, se reunimos as caixas, podemos também separá-las percebendo então que há 3 grupos de 5 em 15, ou seja, 15 : 5 = 3.

Concluindo :

1º) determinar o número de elementos de cada um dos subconjuntos iguais que serão formados - é a partição.

2º) determinar quantos são os subconjuntos iguais em que um conjunto dado será dividido - é a divisão por medida.

4.3. DIVISÃO EXATA.

Bàsicamente, realiza-se a operação de divisão entre dois números - um chamado DIVIDENDO, e o outro, DIVISOR - para se determinar um terceiro - o resultado da divisão, chamado QUOCIENTE - que multiplicado pelo divisor reproduza o dividendo.

Ou seja, por exemplo : 20 : 4 = 5

5

No exemplo, o 20 é o dividendo (o número que se vai dividir), o 4 é o divisor (informa quantas partes se vai dividir o dividendo) e o 5 é o quociente. O resto desta divisão é o zero. Diz-se então que ela é uma divisão exata.

Numa divisão exata é necessário que o primeiro número seja múltiplo do segundo, que por sua vez é diferente de zero, para existir o quociente exato entre êles.

NA

4.4. FUNDAMENTAÇÃO DA PARTIÇÃO REGULAR :

Pode-se dizer que dois problemas motivaram o homem a imaginar a operação da divisão : um dêles se prendia ao fato de saber quantos subconjuntos com uma determinada quantidade de elementos podia êle encontrar num dado conjunto cujo número de elementos era também conhecido (por exemplo : quantos subconjuntos de 4 elementos podiam ser encontrados num conjunto de 20 elementos ?). O outro era saber, ao se formar com os elementos de um conjunto um número determinado de subconjuntos, todos com a mesma quantidade de elementos, quantos elementos teria cada um subconjunto (Se se quiser formar, com os 20 elementos de um conjunto, 5 subconjuntos, todos com a mesma quantidade de elementos, quantos

6

elementos terá cada um dêsses subconjuntos ?).

Tais problemas nem sempre conduziram a operações simples, porque nem sempre o homem encontrava um número, para quociente, que multiplicado pelo divisor reproduzisse o dividendo. Por exemplo, não existe um número inteiro que multiplicado por 4 reproduza para resultado o número 23.

Sabemos que :

$$5 \times 4 = 20 \quad \text{e} \quad 20 < 23$$

$$6 \times 4 = 24 \quad \text{e} \quad 24 > 23$$

Portanto, se dissermos que o quociente de 23 por 4 é 5, estamos cometendo um êrro por falta (faltam 3 unidades a 5x4 para ser igual ao dividendo 23); se dissermos que é 6, o êrro cometido é por excesso (o produto 6x4 excede de uma unidade o dividendo 23).

Para resolver êsse impasse na divisão de números inteiros, convencionou-se adotar para quociente o número que produz o menor êrro por falta - a êste êrro por falta, chama-se resto da divisão.

Quando o resto é igual a zero, diz-se que se trata de uma divisão exata; é, por exemplo, o caso de : 20 : 4 = 5

7

Diz-se, então, que o número do dividendo é divisível pelo número do divisor.

Diz-se também, que numa divisão exata, é necessário que o dividendo seja múltiplo do divisor, que por sua vez é diferente de zero, para existir o quociente exato entre êles.

4.5. DIVISÃO INEXATA :

Estudamos que a operação - divisão - inversa da multiplicação - só será possível no caso do dividendo ser múltiplo do divisor. Contudo, pode-se estender a noção de divisão, estudando as divisões por aproximação que permitem interpretar problemas da vida prática, tais como :

1 - Deseja-se distribuir igualmente 16 cavalos a 3 pessoas. Quantos cavalos receberá cada uma ?

2 - Tem-se 16 maçãs para serem distribuidas igualmente a 3 pessoas. Quanto receberá cada uma ?

Para o primeiro problema cada pessoa receberá 5 cavalos e sobrará 1 (um) cavalo, o qual, evidentemente, não pode ser dividido !

No segundo problema, cada pessoa receberá 5 maçãs e sobrará uma, que poderá ser dividida em 3 partes iguais. Isto é, cada uma receberá 5 maçãs, mais a terça parte de uma maçã. Aqui, nós já entramos nas frações do inteiro, por isso não vamos nos deter nêste último problema.

3 - Você quer repartir 53 figurinhas por 6 colegas. Quantas receberá cada um ?

Ora, não é possível encontrar um número inteiro que, multiplicado por 6 , dê 53, pois :

$8 \times 6 = 48$ é menor que 53

$9 \times 6 = 54$ é maior que 53

Então, se você der 8 figurinhas a cada colega, sobrarão 5 ($53 - 48 = 5$) e, dando 9, faltará 1 ($54 - 53 = 1$). Nestas condições, só cabe resolver o problema por aproximação, uma vez que o "quociente" procurado não é nem o número inteiro 8 nem o número inteiro 9.

O número 8, que é o maior número que multiplicado por 6 não ultrapassa 53, é denominado quociente aproximado por falta, a menos de uma unidade, porque o êrro que se comete, quando se toma o número 8 como quociente, é menor que uma unidade.

9

Da mesma forma, o 9 é o quociente aproximado por excesso, a menos de uma unidade.

Para as nossas aplicações, quando se fizer necessária a divisão aproximada, escolheremos o quociente aproximado por falta.

Tôda a divisão inexata é aquela que tem o resto diferente de zero. Nestes casos nós adotamos a divisão aproximada por falta.

Concluindo, divisão aproximada (por falta) de um número inteiro por outro (diferente de zero), dados numa certa ordem, é a operação que tem por fim determinar o maior número que, multiplicado pelo segundo, dê um resultado maior que o primeiro.

Os números dados continuam recebendo os nomes de dividendo (o primeiro) e divisor (o segundo).

Chama-se resto de uma divisão aproximada (por falta) a diferença entre o dividendo e o produto do divisor pelo quociente aproximado. A indicação de uma divisão aproximada é, geralmente, feita com a "chave da divisão":

dividendo	divisor
	quociente (aproximado)
resto	

/10

Para o exemplo estudado, temos :

$$\begin{array}{r|l} 53 & 6 \\ \hline 5 & 8 \end{array}$$

onde $53 = 8 \times 6 + 5$ e de um modo geral :

$\boxed{\text{dividendo} = \text{quociente} \times \text{divisor} + \text{resto}}$ que é a relação fundamental entre o dividendo, o quociente, o divisor e o resto, para as divisões aproximadas.

A divisão exata é aquela de resto nulo, pois para ela vale a relação:

$$\boxed{\text{dividendo} = \text{quociente} \times \text{divisor}}$$

O importante é observar que, para as divisões aproximadas o resto é sempre menor que o divisor. Indicando-se o dividendo, o divisor, o quociente e o resto, respectivamente, pelas letras D, d, q, r, temos :

$$\begin{array}{r|l} D & d \\ \hline r & q \end{array} \qquad \boxed{D = qxd+r} \quad \text{onde } r < d$$

Graças à relação fundamental estabelecida para as divisões aproximadas, pode-se efetuar a prova da operação : Basta multiplicar o quociente pelo divisor e somar o resultado com o resto. Se a operação estiver certa, deve-se encontrar o dividendo.

11

Exemplo : $\begin{array}{r|l} 53 & 6 \\ \hline 5 & 8 \end{array}$ Prova : $8 \times 6 + 5 = 53$

4.6. IMPOSSIBILIDADE DA DIVISÃO :

Vamos examinar o zero como dado operatório

4.6. 1) Suponhamos :

$$0 : b = c \quad \wedge \quad b \neq 0$$

A sentença equivalente seria $b \times c = 0$. Uma vez que $b \neq 0$, para satisfazer à condição do anulamento da multiplicação teríamos de ter $c = 0$.

Logo :

$$0 : 5 = 0, \quad 0 : 7 = 0, \quad 0 : \Lambda = 0$$

Assim, quando temos : zero dividido por qualquer número diferente de zero, o conjunto solução é :

$$S = \{0\}$$

Estamos frente a um problema determinado.

4.6. 2) Examinemos :

$$0 : 0 = c \iff c \times 0 = 0$$

Em virtude da condição de anulamento do produto, c poderá assumir qualquer valor, pois a presença de um fator nulo anula o produto.

Logo, quando temos : zero dividido por zero, o conjunto solução é :

$$S = \{0, 1, 2, 3 \ldots\}$$

e tem infinitos elementos ; estamos diante de um problema indeterminado.

4.6. 3) Vejamos, agora :

$$a : 0 = c \quad \wedge \quad a \neq 0$$

A sentença equivalente $c \times 0 = a$ é falsa, pois em virtude da condição de anulamento da multiplicação, não há valor diferente de Zero que, multiplicado por zero, dê um valor diferente de zero.

Assim, quando temos : um número diferente de zero dividido por zero, o conjunto - solução é vazio :

$$S = \{ \ \}$$

Dizemos que estamos diante de um problema impossível.

O divisor Zero arrasta a indeterminação ou a impossibilidade.

Em outras palavras : "dividir por zero" não é uma operação e "multiplicar por zero" não tem operação inversa ! Portanto, a divisão (exata), assim como a subtração, nem sempre é possível com dois números naturais quaisquer.

É necessário que o primeiro número seja múltiplo do segundo, que por sua vez é diferente de zero, para existir quociente (exato) entre êles.

<u>O "Zero" é o elemento, pois, impossível como divisor, na divisão</u>.

4.7. TÁBUA DA DIVISÃO :

elemento impossivel

:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	?	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	?	1	?	?	?	?	?	?	?	?	?
2	?	2	1	?	?	?	?	?	?	?	?
3	?	3	?	1	?	?	?	?	?	?	?
4	?	4	2	?	1	?	?	?	?	?	?
5	?	5	?	?	?	1	?	?	?	?	?
6	?	6	3	2	?	?	1	?	?	?	?
7	?	7	?	?	?	?	?	1	?	?	?
8	?	8	4	?	2	?	?	?	1	?	?
9	?	9	?	3	?	?	?	?	?	1	?
10	?	10	5	?	?	2	?	?	?	?	1

Nesta tábua da divisão o sinal " ? " indica que não existe quociente.

Observando esta tábua da divisão podemos verificar as propriedades da divisão (exata).

4.8. VERIFICAÇÃO DE PROPRIEDADES :

4.8. 1) Propriedade de Fechamento : não possui a propriedade de fechamento no conjunto N porque o quociente da divisão de dois números naturais nem sempre é um número natural.

Exemplo : $8 : 5 = ?$

$7 : 3 = ?$

4.8. 2) Propriedade Comutativa : não possui a propriedade comutativa conjunto N porque a ordem dos têrmos altera o quociente da divisão. Logo, a ordem dos têrmos interessa à operação.

Exemplo : $8 : 4 = 2$ $4 : 8 \neq 2$

$4 : 8 = ?$

Logo, $8 : 4 \neq 4 : 8$

4.8. 3) Propriedade Associativa : não possui a propriedade associativa porque a divisão de três números naturais não pode ser feita associando-se os dois primeiros têrmos ou os dois últimos têrmos.

Exemplo : $18 : 6 : 3$?

Poderia ser : $(18 : 6) : 3$ ou $18 : (6 : 3)$

Concluímos, pois, que estas duas expressões têm resultados diferentes : (a primeira vale 1 e a segunda vale 9) e, portanto :

$(18 : 6) : 3 = 18 : (6 : 3)$ é falso !

Isto é, a divisão não possui a propriedade associativa :

4.8. 4) Elemento Neutro : não possui a propriedade do Elemento Neutro porque no conjunto N não existe um número natural que dividido por outro número natural, em qualquer ordem, dê como quociente da divisão êste outro número natural.

Exemplo : $4 : 1 = 4$ e $1 : 4 = ?$

4.8. 5) Propriedade Distributiva da Divisão em Relação à Adição e à Subtração :

Esta propriedade só vale num sentido ! (à direita) .

Exemplo : $(15+18) : 3 = 15:3+18:3$ - é verdadeiro.

Ambas estas expressões valem 11.

A distributividade da divisão em relação à adição e à subtração não se faz nos dois sentidos, como foi visto na multiplicação, porque a divisão é " não - comutativa ". Assim, por exemplo :

$12 : (4+2) = 12 : 4 + 12 : 2$ - é falso !

A primeira expressão vale 2 e a segunda vale 9.

Completando, verificamos casos como : (50 + 30) : 5 ou (64 : 32) : 8 apresentam as duas parcelas da adição, ou os dois têrmos da subtração divisíveis por um mesmo número. Por enquanto, apenas tais casos podem ser tratados e êles mostram a presença da distributividade. Do mesmo modo :

$$(27 + 24) : 3 = (27 : 3) + (24 : 3),$$
$$(65 - 26) : 13 = (65 : 13) - (26 : 13).$$

Dizemos, então, que <u>a divisão distribui-se sôbre a adição e sôbre a subtração, desde que essas operações do primeiro gráu encerrem têrmos divisíveis pelo divisor em questão</u>.

4.9. PRINCÍPIOS :

Sendo : dividendo : divisor = quociente

dividendo = divisor x quociente

Tem-se que :

4.9. 1) Deixando o divisor fixo, e aumentando o dividendo, aumenta-se o quociente, e, diminuindo o dividendo, diminui-se o quociente.

17

4.9. 2) Se deixarmos o dividendo fixo e variarmos o divisor, o quociente variará também. Só que, agora, quando o divisor aumenta, o quociente diminui e quando o divisor diminui, o quociente aumenta.

Logo concluimos :

Variação do quociente - diretamente com o dividendo e inversamente com o divisor.

1º) Multiplicando o dividendo e o divisor por um mesmo número diferente de zero, verificamos que o quociente não se alterou, mas, que, se a divisão era inexata, o resto também ficou multiplicado pelo mesmo número.

Exemplo :

16 3		16 x 5 = 80		80 15
1 5		3 x 5 = 15		5 5

2º) Dividindo o dividendo e o divisor, numa divisão, pelo mesmo número natural, o quociente não se altera, mas se a divisão fôr inexata o resto ficará dividido pelo mesmo número natural.

27 6		27 : 3 = 9		9 2
3 4		6 : 3 = 2		1 4

- C O N C E I T O DE O P E R A Ç Ã O

- D I V I S Ã O

Trabalho realizado pela aluna :

NARA MARIA SOUZA DE MOURA

Apreciação :

Após um encontro para planejar o trabalho, foram debatidos os diversos aspectos, ficando determinado que cada uma das componentes do grupo realizassem uma parte do trabalho. Foi a maneira mais racional encontrada pelo grupo, para resolver o problema da realização do trabalho devido a impossibilidade de reunião, já que os horários não coincidem.

De acôrdo com a divisão do trabalho, ficou estabelecido que eu deveria fazer a parte de introdução, sôbre " o conceito de operação " e também sôbre a " divisão ".

Êste trabalho foi grandemente positivo pois enriqueceu minha experiência como professôra, e permitiu uma maior atualização de assuntos, que eram do meu conhecimento, mas que não me havia aprofundado.

19

Deu-me oportunidade de consultar uma bibliografia variada, enriquecendo desta maneira meu conhecimento sôbre o assunto.

Observação :

A dificuldade que o grupo encontrou foi com que diz respeito ao horário de reunião para realizar o trabalho.

A solução encontrada foi a seguinte :

- cada aluna do grupo realizou individual-- mente a sua parte ;

- após, tivemos dois encontros de todo grupo para leitura, comentário e integração do trabalho realizado.

Nível B → A

Não foram bem fundamentados a operação divisão, na partição a repartição de um conjunto!

20

Bibliografia :

1. LEITE, J. Andrade

Matemática - Curso Liceu - vol. I

Editora Liceu

2. SANGIORGI, Oswaldo

Matemática - Curso Moderno - vol. I

Cia. Editora Nacional - Rio

3. CAMPARELLI, Lídia

Matemática para o Ginásio - vol. I

Editora Edart - São Paulo

4. FERREIRA, Jorge da Costa

Matemática

5. VALLE, Magdalena Pinho Del

Experando a Matemática na Escola Primária

6. OSÓRIO, Norma Cunha

Matemática na Escola Primária Moderna

Editora Sulina - Pôrto Alegre

21