1º semestre de 1993

Revista do Professor de Matemática

23

Sociedade Brasileira de Matemática

ISSN 0102-4981

EXPEDIENTE

Impressão: Associação Palas Athena do Brasil. **Tiragem**: 20 000 exemplares. **Distribuição**: 2º semestre de 1993.

ASSINATURAS:
A RPM é enviada gratuitamente a todos os professores de Matemática que a solicitarem. Ao leitor que recebeu este número será enviado o próximo.

ALTERAÇÕES DE ENDEREÇO: Comuniquenos qualquer mudança de endereço – só assim a RPM chegará regularmente em suas mãos.

NÚMEROS ATRASADOS:
Cada exemplar atrasado custa 1/100 do salário mínimo em vigor na ocasião da compra. Os números 1, 2 e 5 estão esgotados. Pedidos devem ser dirigidos à RPM, acompanhados de um cheque em nome do Comitê Editorial da RPM. Para o envio de coleções completas, acrescentar Cr$80.000,00 para o envio pelo correio registrado. Não trabalhamos com reembolso ou vales postais.

SBM:
Como se tornar sócio da SBM. Como obter os livros publicados pela SBM. Como se tornar assinante da revista Matemática Universitária. Estas informações podem ser obtidas escrevendo para a Sociedade Brasileira de Matemática, no Rio de Janeiro.

GRUPO AMIGOS DA RPM:
Anuidade 93: 1/10 do salário mínimo em vigor na ocasião do pagamento. NÃO faça depósito no BANESPA. Envie um cheque em nome de Grupo Amigos da RPM. Graças aos Amigos, em 1992 foram lançados TRÊS números da RPM e o Caderno 3.

ENDEREÇO PARA CORRESPONDÊNCIA:
Revista do Professor de Matemática
Caixa Postal 20570
01452-990 São Paulo, SP.

A RPM é uma publicação semestral da Sociedade Brasileira de Matemática com apoio da Universidade de São Paulo.

EDITOR RESPONSÁVEL: Alciléa Augusto.

Este número foi financiado por:
SPEC/CAPES/MEC/PADCT e GRUPO AMIGOS DA RPM
e será postado no 2º semestre de 1993.

Revista do Professor de Matemática nº 23, 1º semestre de 1993.

O ENSINO DA MATEMÁTICA

Geraldo Ávila
IMECC-UNICAMP, Campinas, SP

A Crise do Ensino

É bem sabido que o ensino da Matemática na escola do 1º e 2º graus vive uma crise crônica há muitos anos. Deixando de lado os fatores sócio-econômicos e políticos, abordaremos aqui tãosomente as dificuldades ligadas diretamente ao ensino nas escolas. Essas dificuldades vêm se perpetuando desde o início da década de sessenta, quando o ensino da Matemática passou por uma reforma profunda, que deu origem ao que se convencionou chamar de *Matemática Moderna*. As características principais dessa reforma foram uma ênfase acentuada na utilização da linguagem de conjuntos e numa apresentação excessivamente formal das diferentes partes da Matemática. Foi uma reforma radical.

Os reformistas contaram, desde o primeiro instante, com adeptos fervorosos e poucos opositores. A maioria dos professores — e mesmo alguns eminentes matemáticos — apoiava as mudanças com entusiasmo. Mas, com o passar do tempo, a ineficácia da *Matemática Moderna* ia-se tornando mais e mais evidente. Os opositores do movimento foram aumentando em número e contando, cada vez mais, com o apoio de pesquisadores de grande prestígio. Em conseqüência disso, e das muitas críticas que então se faziam à *Matemática Moderna*, aliadas às evidências da ineficácia dessa orientação para o ensino, novas mudanças começaram a ser feitas,

no sentido de corrigir os rumos que vinham sendo seguidos. Na maioria dos países a crise da *Matemática Moderna* foi superada e já é coisa do passado. No Brasil, entretanto, não obstante os avanços que têm sido feitos nos últimos quinze anos aproximadamente, convivemos ainda com fortes resquícios daquelas idéias dos anos sessentas.

O Papel da Linguagem e do Simbolismo

O ensino de Matemática como era feito antes da reforma da *Matemática Moderna* dos anos sessentas realmente continha muitas deficiências. Não levava em conta aspectos importantes da psicologia do aprendizado que, felizmente, vêm recebendo, hoje em dia, mais atenção. Mas a reforma trouxe inovações desastrosas, algumas das quais persistem, não obstante as mudanças salutares dos últimos anos. Assim é que os livros do 1º e 2º graus continuam carregados de simbolismo e linguagem de conjuntos que mais atrapalham do que ajudam o aluno em seu esforço de aprendizagem.

É preciso ter presente que o objetivo de todo ensino, seja de Matemática, seja de qualquer outra disciplina, é transmitir idéias, estimular o pensamento independente e a criatividade.

A Matemática, em particular, depende muito de sua linguagem e simbolismo específicos. Mas é também a linguagem e o simbolismo próprios da Matemática que a fazem tão inacessível, principalmente ao leigo, mesmo ao "leigo erudito". Assim, podemos dizer, em certo sentido, que a linguagem e o simbolismo da Matemática são um "mal necessário". (Aliás, é interessante notar que demorou muito para que esses elementos tão decisivos no progresso da Matemática se desenvolvessem com toda força. Isso só veio a acontecer a partir do século XVI, com o desenvolvimento da notação e do formalismo da Álgebra.) Por causa mesmo dessas dificuldades inerentes à linguagem e ao simbolismo é que se torna tão necessário o devido cuidado na boa utilização desses instrumentos,

para que eles exerçam seu desejado papel no aprendizado, e não o prejudiquem.

Linguagem e simbolismo são muito úteis e indispensáveis enquanto ajudam na transmissão e na agilização das idéias. Infelizmente, o que acontece no ensino elementar é que a linguagem de conjuntos e o excesso de simbolismo e terminologia, além de não ajudarem, só atrapalham. Por exemplo, não há benefício algum em insistir com as crianças na distinção entre "número" e "numeral". Ao contrário, isto só traz prejuízos, criando uma preocupação desnecessária na mente do aluno. Do mesmo modo, para introduzir a idéia de "função" não é preciso apelar para produto cartesiano de conjuntos, muito menos para a noção de relação, como costuma ser feito; isto nada tem de motivador. Em situações como essas, o excesso de linguagem obstrui o mais importante, que são as idéias. Por exemplo, é muito mais natural e mais fácil dizer

"2 e 5 são as raízes da equação $x^2 - 7x + 10 = 0$" do que

"o conjunto verdade da sentença $x^2 - 7x + 10 = 0$ é $V = \{2, 5\}$".

Aliás, nenhum matemático profissional diz isso. O natural é seguir o costume dos matemáticos profissionais, e não ficar inventando pedantismos artificiais como esse.

E é importante observar que linguagem não motiva ninguém, idéias sim. Nenhum aluno pode se interessar por qualquer coisa onde não veja algum elemento que lhe satisfaça ou aguce a curiosidade. O mesmo é verdade no caso dos matemáticos que contribuíram para o desenvolvimento de sua ciência. Eles estavam sempre interessados nas idéias e nos métodos e técnicas delas resultantes. Foram introduzindo linguagem e simbolismo por necessidade prática. O mesmo devemos fazer no ensino: só introduzir esses elementos quando eles se fizerem necessários para auxiliar no aprendizado de coisas verdadeiramente relevantes.

A Responsabilidade por Mudanças

Há um certo consenso, entre professores, em que realmente a linguagem de conjuntos quase nada tem a ver com o que se deve ensinar. No entanto, as desejadas mudanças não se operam, e isto por várias razões. Os cursos de licenciatura das universidades e faculdades nem sempre estão bem estruturados para preparar devidamente seus alunos para as tarefas de ensino no 1º e 2º graus. Os próprios professores que lecionam nesses cursos de licenciatura muitas vezes não estão devidamente motivados para essas tarefas. As provas de muitos concursos públicos e de vários exames vestibulares continuam apresentando questões sobre conjuntos, linguagem e formalismo inconseqüente. Finalmente, os autores e editores de livros-textos também são responsáveis pela presente situação, pois são eles que põem no mercado o instrumental básico do professorado de todo o país. É evidente, pois, que não haverá mudanças no ensino enquanto não houver mudanças nos livros-textos. Como se vê, depende desses profissionais, mais que de quaisquer outros, a possibilidade das mudanças desejadas. Possam eles tomar consciência das melhorias possíveis, eliminando dos livros os elementos negativos e prejudiciais no ensino-aprendizagem da Matemática, abrindo assim o caminho para o trânsito livre e fácil das idéias.

A Reestruturação dos Programas

Um aspecto importante a ser notado nas sucessivas reformas do ensino é a preservação de coisas antigas, não obstante a insistência em "modernidade". Fala-se muito em "modernizar" o ensino, mas essas "modernizações" não se livram de verdadeiros esqueletos cuidadosamente preservados intactos nos novos programas... Um exemplo disso é o tópico *razões e proporções*, que continua sendo apresentado hoje como o era há cem ou duzentos anos. Não mudou, não evoluiu.

Continuamos atrelados a conceitos arcaicos, insistindo ainda em terminologia anacrônica,

como *antecedente, conseqüente*, e em outras coisas inúteis como a famigerada *regra de três composta*. Em dois artigos na Revista do Professor de Matemática (RPM 8 e 9) tratamos essa questão detalhadamente, mostrando que tudo não passa de constatar uma relação de dependência funcional entre duas ou mais grandezas, nada mais; o resto é resolução de equações simples. Procuramos

mostrar, nesses artigos, que o ensino dessa dependência é uma boa oportunidade para uma primeira introdução do conceito de função e de trabalho com gráficos, já no 1º grau.

Regra de extração da raiz quadrada, sistemas lineares e equações de um modo geral são tópicos cujo ensino não se modernizou e que continua sendo feito de maneira anacrônica e desatenta para a realidade das calculadoras de bolso, já bastante disseminadas e acessíveis. É mais que tempo de ensinarmos métodos de aproximação no 2º grau, adequados a cálculos aproximados. (Sobre sistemas lineares, veja-se, a propósito, o artigo do Professor Elon Lages Lima, neste mesmo número da RPM.) A propósito da raiz quadrada, o que se devia ensinar é a seqüência recorrente $a_{n+1} = (a_n + 1/a_n)/2$. (Veja RPM 2, p. 27; RPM 4, pp. 25-27; RPM 9, pp. 65-66; RPM 21, pp. 11-17.) Como se vê, o estudo dessa seqüência situa-se muito bem num estudo geral de *seqüências recorrentes e aproximações numéricas*, incorporando o que atualmente leva o nome de *P.A.* e *P.G.*

Trigonometria é outro tópico que ocupa indevidamente uma grande parte dos programas, muitas vezes incluindo tratamento numérico de *resolução de triângulos*, hoje superado pela facilidade de cálculos com a utilização de calculadoras eletrônicas.

O ensino de logaritmos também não se modernizou e continua sendo feito num espírito arcaico, quando não tem mais a importância que teve por vários séculos, de instrumento de cálculo numérico.

Hoje em dia, com a disseminação das calculadoras eletrônicas, seria um despropósito ensinar a utilização das tábuas de logaritmos.

É preciso mudar a ênfase no ensino do logaritmo, adequando-o às necessidades de hoje. O logaritmo decimal, tão importante no antigo cálculo numérico manual, perdeu muito desse papel. Muito importante a ensinar hoje em dia é a função *logaritmo natural* e sua inversa, a exponencial e^x, a função mais importante da Matemática, que ocorre na descrição de uma variedade de fenômenos, como o crescimento de uma cultura de bactérias, de uma população, de juros compostos, do decaimento radiativo, etc. (Veja, por exemplo, nosso livro *Cálculo 1*, Seções 4.10, 4.11 e 5.6.) Ao leitor interessado numa apresentação do logaritmo para o professor do 2º grau, recomendamos o livro *Logaritmos*, do Prof. Elon Lages Lima, publicado pela Sociedade Brasileira de Matemática.

Funções, Cálculo e Geometria Analítica

Os problemas relacionados com o ensino de funções merecem considerações numa seção à parte.

O que a *Matemática Moderna* fez com o ensino de funções redundou num desenvolvimento excessivamente formal, abstrato e longo desse tópico do programa, ocupando toda a primeira série do 2º grau, e afastado das aplicações que podem se constituir em boa motivação. Atualmente gasta-se muito tempo explicando as operações de união, interseção e produto cartesiano de conjuntos, para se chegar à definição de *função* como um caso particular de *relação*. Isto nada tem de motivador para o aluno e é irrelevante nos exemplos de funções que são discutidos nesse estágio do aprendizado, todos eles dados por fórmulas simples.

Para bem entendermos o contra-senso do ensino atualmente praticado na escola do 2º grau nesse domínio da Matemática,

devemos lembrar que os matemáticos profissionais lidaram com funções por quase dois séculos antes de chegarem à definição geral de função.

E se aí chegaram, foi porque tiveram *necessidade* desse conceito geral para resolverem delicadas questões surgidas no trato de importantes problemas de convergência. Mais especificamente, os problemas tratados levavam à consideração de séries infinitas de funções, sobretudo as séries trigonométricas. (Isso está explicado em nosso livro *Introdução à Análise Matemática*, publicado pela Editora Edgard Blücher. Veja as "Notas Complementares" no fim dos capítulos, sobretudo as pp. 104 a 107.) Ora, se essas sutilezas da Análise estão fora do alcance do aluno do 2º grau, por

que perturbá-lo com uma idéia tão geral e abstrata de função, num momento em que ele está tão despreparado para apreciar sua importância?

As coisas devem vir a seu devido tempo. Do mesmo modo que na evolução das idéias, também no ensino os conceitos só devem ser introduzidos à medida que vão sendo solicitados no desenvolvimento dos tópicos ensinados, à medida que o aluno esteja em condições de apreciar criticamente a importância do que está aprendendo. Ao contrário, o que vemos no ensino de funções é a introdução de diversos conceitos novos, como *função injetiva, sobrejetiva, inversa, composta*, etc., sem utilização adequada desses conceitos, e, portanto, sem revelar sua real importância. O resultado é negativo, pois, ao invés de estimular os alunos, produz neles o efeito contrário de gerar desinteresse pela Matemática.

Conclusão

Concluímos reafirmando nossa crença na viabilidade de várias mudanças no ensino da Matemática. Isso passaria por um verdadeiro "enxugamento" dos atuais programas, com a conseqüente abertura de espaço bastante para acomodar o ensino de elementos de Cálculo, tão enriquecedor no estudo das funções e muito relevante como auxiliar no ensino da Física. (Já falamos sobre isso na **RPM 18**. Veja também os artigos do Professor Duclos e da Professora Gravina na **RPM 20**.)

BALCÃO DO MESTRE

Como posso adquirir?

Matemática (Ginasial, 4 vols.) de *Osvaldo Sangiorgi* e Matemática (Colegial, 3 vols.) de *Ary Quintella*, usados na década de 70.

Escrever para *Vander F. de Almeida*
Rua Salvador Borges, 26
36632-030 Betim, MG.

Softwares Educacionais

Gostaria de receber softwares educacionais e matemáticos de colegas que já tenham experiência na área.

Escrever para *Jorge B. de Abreu*
Setor D, Q. 16, C. 12, Valparaíso I
72870-000 Luziânia, GO.

SOBRE O ENSINO DE SISTEMAS LINEARES

Elon Lages Lima
IMPA, RJ

Os sistemas de equações lineares constituem um tópico de grande interesse prático. Seu estudo é acessível aos estudantes, pois não requer o emprego de conceitos sutis ou complicados. Além disso, pode servir como ponto de partida para diversas teorias matemáticas relevantes e atuais. Por estes três motivos, é mais do que justa sua inclusão nos currículos escolares. Entretanto, sua abordagem nos compêndios adotados em nossas escolas é, na maioria das vezes, obsoleta, árida e desmotivada. Em certos casos, até mesmo contém erros matemáticos de fato.

Esta nota visa dar aos professores que ensinam sistemas lineares algumas sugestões para ilustrar suas aulas e ajudá-los a situar adequadamente a matéria dentro do contexto dos seus conhecimentos. A limitação de espaço obriga a uma brevidade maior do que a desejada. Para maiores detalhes, ver o livro *Coordenadas no Espaço*, publicado na Coleção do Professor de Matemática da SBM.

1. Um problema

O curso de Matemática no semestre passado teve três provas. As questões valiam um ponto cada uma, mas os pesos das provas eram diferentes. Jorge, que acertou 6 questões na primeira prova, 5 na segunda e 4 na terceira, obteve no final um total de 47 pontos. Fernando acertou 3,

6 e 6, totalizando 54 pontos. Por sua vez, Marcos acertou 2, 7 e 5 questões, atingindo a soma de 50 pontos no final. Já Renato fez 5 questões certas na primeira prova, 8 na segunda e 3 na terceira. Qual foi o total de pontos de Renato?

Chamando de x, y e z respectivamente os pesos da primeira, segunda e terceira provas, as pontuações de Jorge, Fernando e Marcos nos fornecem as equações:

$$\begin{aligned} 6x + 5y + 4z &= 47 \\ 3x + 6y + 6z &= 54 \\ 2x + 7y + 5z &= 50. \end{aligned}$$

Com isso, determinamos x, y e z e, a partir daí, a nota final de Renato.

Não é difícil imaginar muitas outras situações que conduzem a sistemas de equações lineares como o acima. Os próprios alunos podem ser instados a fornecer tais exemplos, sendo então levados a concluir que os sistemas lineares não foram inventados apenas por capricho dos professores.

2. Observações gerais

No que se segue, faremos referências ao sistema (S) abaixo:

$$(S) \qquad \begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3. \end{aligned}$$

Uma *solução* de (S) é um terno ordenado (x, y, z) de números reais que, substituídos no primeiro membro de cada uma das equações acima, torna-o igual ao segundo membro. Por exemplo, $(2,3,5)$ é uma solução do sistema do §1: escreve-se $x = 2$, $y = 3$, $z = 5$.

O sistema (S) pode ter uma única solução, uma infinidade de soluções ou nenhuma solução. No primeiro caso, diz-se que o sistema é *determinado*, no segundo, *indeterminado* e, no terceiro, *impossível*.

Os sistemas lineares obedecem ao princípio geral (e um tanto vago) de que para determinar 3 números são necessárias 3 informações distintas sobre esses números. O sistema é indeterminado quando uma (ou duas) dessas informações é (ou são) conseqüência(s) das demais. Por exemplo, se nos propusermos a determinar x, y, z sabendo que $2x-4y+6z=8$, $x-2y+3z=4$ e $3x-6y+9z=12$, teremos aí um sistema indeterminado, pois na realidade é-nos dada apenas uma informação sobre esses números, a saber, que $x-2y+3z=4$. As outras duas afirmações resultam desta. Em cursos elementares, os sistemas indeterminados são deixados de lado sem maior atenção, mas essa atitude não é correta. A indeterminação significa que o problema expresso pelo sistema (S) possui infinitas soluções, cabendo-nos em cada caso escolher a que melhor se adapta às nossas conveniências.

Já o sistema impossível ocorre quando as informações que nos são fornecidas para calcular x, y e z são incompatíveis. Por exemplo, se uma das equações do sistema é $x-2y+3z=4$, outra equação não pode ter a forma $2x-4y+6z=7$. (Multiplicando a primeira por 2 e subtraindo a segunda, chegaríamos ao absurdo $0=1$.)

3. Diferentes interpretações

O sistema (S) pode ser encarado sob diversos pontos de vista. Essa variedade de interpretações enriquece a gama de aplicações que tem seu estudo e, por outro lado, permite a utilização de diferentes instrumentos para resolvê-lo. As três interpretações que apresentamos a seguir têm nível elementar e estão ao alcance do aluno da escola média.

A) INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA

Cada solução (x,y,z) do sistema (S) pode ser olhada como um ponto P do espaço tridimensional, dado por suas coordenadas cartesianas: $P=(x,y,z)$. Sob este ponto de vista, cada uma das equações do sistema é a equação de um plano nesse espaço e as soluções do sistema são os pontos comuns a esses planos. Mais precisamente, se π_1, π_2 e π_3 são os planos definidos pelas três equações de (S), então as soluções de (S) são os pontos $P=(x,y,z)$ que pertencem à interseção $\pi_1\cap\pi_2\cap\pi_3$ desses planos.

Assim, por exemplo, se pelo menos dois desses planos são paralelos, ou se dois deles intersectam o terceiro segundo retas paralelas, a interseção $\pi_1\cap\pi_2\cap\pi_3$ é vazia e o sistema é impossível. Noutro exemplo, podemos ter uma reta r formando uma espécie de eixo, contido simultaneamente nos três planos. Então $\pi_1\cap\pi_2\cap\pi_3=r$ e o sistema é indeterminado: suas soluções são os pontos de r. O sistema é determinado quando os três planos se encontram num só ponto, como duas paredes adjacentes e o teto.

Há ao todo 8 posições relativas possíveis para os planos π_1, π_2, e π_3. Quatro dessas posições correspondem aos sistemas impossíveis; nas outras quatro, o sistema tem solução. É importante observar que se pode concluir em qual das 8 posições se encontram os planos de (S) examinando os coeficientes a_i, b_i, c_i e d_i que nele comparecem. (Ver o livro *Coordenadas no Espaço*, já citado.)

B) INTERPRETAÇÃO MATRICIAL

O sistema (S) põe em destaque as matrizes

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad D=\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}.$$

Fazendo uso da multiplicação de matrizes, esse sistema pode ser escrito sob a forma

$$A\cdot X=D.$$

A multiplicação de matrizes, que já foi tratada na **RPM 21**, funciona assim: o produto de uma linha, digamos $[a_1,\ b_1,\ c_1]$, por uma coluna como X é, por definição, igual a $a_1x+b_1y+c_1z$. O produto de uma matriz A, de m linhas e n colunas, por uma matriz B, de n linhas e p colunas, é a matriz AB, de m linhas e p colunas, cujo elemento da i-ésima linha e j-ésima coluna é o produto da i-ésima linha de A pela j-ésima coluna de B.

C) INTERPRETAÇÃO VETORIAL

Na interpretação geométrica foram levadas em conta as linhas do sistema (S), as quais representam planos. Agora, olharemos para as *colunas* de (S), que são os vetores $a=(a_1,a_2,a_3)$,

$b = (b_1, b_2, b_3)$, $c = (c_1, c_2, c_3)$, e $d = (d_1, d_2, d_3)$, do espaço numérico $\mathbb{R}^3$.

Como se sabe, a *soma* de dois vetores $u = (\alpha, \beta, \gamma)$ e $v = (\alpha', \beta', \gamma')$ em $\mathbb{R}^3$ é definida como $u+v = (\alpha+\alpha', \beta+\beta', \gamma+\gamma')$ e o *produto* do vetor u pelo número real x é o vetor $x.u = (\alpha x, \beta x, \gamma x)$. Dado um terceiro vetor $w = (\alpha'', \beta'', \gamma'')$ e os números reais y, z, a combinação linear $x.u + y.v + z.w$ é portanto o vetor

$$x.u + y.v + z.w = (\alpha x + \alpha' y + \alpha'' z,\ \beta x + \beta' y + \beta'' z,\ \gamma x + \gamma' y + \gamma'' z).$$

Assim, afirmar que (x, y, z) é uma solução do sistema (S) significa dizer que vale a igualdade vetorial

$$x.a + y.b + z.c = d. \qquad (*)$$

Noutras palavras, dar o sistema (S) significa dar os vetores a, b, c e d em $\mathbb{R}^3$ e resolver o sistema significa exprimir d como combinação linear dos vetores a, b e c, na forma $(*)$. As incógnitas x, y, z são os coeficientes numéricos dessa combinação.

Se os vetores-coluna a, b, c forem não-coplanares, todo vetor d em $\mathbb{R}^3$ se exprime, de modo único, como combinação linear de a, b e c. Neste caso, o sistema (S) possui uma única solução, não importa qual seja o segundo membro d.

Se, entretanto, os vetores a, b, c estiverem no mesmo plano, o sistema não terá solução, a menos que d esteja nesse mesmo plano. E se a, b, c forem colineares, d lhes deve ser colinear também para que (S) possua solução.

4. Métodos de solução

A) ESCALONAMENTO

O método de escalonamento consiste em substituir o sistema (S) por outro (S') que lhe seja equivalente (isto é, que possua as mesmas soluções), no qual a matriz A' seja escalonada. Uma matriz diz-se *escalonada* quando o primeiro elemento não nulo de cada linha situa-se à direita do primeiro elemento não nulo da linha

anterior. Diz-se então que (S') é um sistema escalonado. O sistema seguinte é escalonado:

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 5z &= 1 \\ 2y + 3z &= 2 \\ 4z &= 8. \end{aligned}$$

Um sistema escalonado resolve-se facilmente de baixo para cima: a última equação dá o valor de z. Substituindo esse valor na segunda equação, encontra-se y, etc.

Para passar do sistema (S) para um sistema escalonado equivalente, substitui-se a segunda equação por a_2 vezes a primeira equação menos a_1 vezes a segunda. Isso elimina o termo em x na segunda equação. De modo análogo, elimina-se o termo em x da terceira equação. Deixando em paz a primeira equação, usa-se o mesmo processo nas duas últimas (nas quais x já foi eliminado) para eliminar y na terceira equação e obter um sistema escalonado.

Por exemplo, se aplicarmos escalonamento ao sistema do §1, obteremos o sistema escalonado

$$\begin{aligned} 6x + 5y + 4z &= 47 \\ 21y + 24z &= 183 \\ 153z &= 765, \end{aligned}$$

o qual, resolvido de baixo para cima, dá $z = 5$, $y = 3$, $x = 2$.

B) RESOLUÇÃO MATRICIAL

A interpretação matricial, que consiste em escrever o sistema (S) sob a forma $A \cdot X = D$, praticamente impõe a solução $X = A^{-1} \cdot D$. Esta solução exige que exista a inversa A^{-1} da matriz A. Por definição, A^{-1} é a matriz que multiplicada por A dá como resultado a "matriz identidade" I, cujas linhas são (1 0 0), (0 1 0) e (0 0 1). Para que A^{-1} exista, é necessário e suficiente que o determinante Δ da matriz A seja diferente de zero. Se isto ocorre, então

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & -A_{21} & A_{31} \\ -A_{12} & A_{22} & -A_{32} \\ A_{13} & -A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

onde o "determinante menor" A_{ij} é o determinante da matriz obtida de A pela supressão da i-ésima linha e da j-ésima coluna.

Com esta fórmula para A^{-1}, pode-se efetuar imediatamente a multiplicação $A^{-1} \cdot D$, obtendo assim expressões explícitas para as incógnitas x, y, z. Tais expressões coincidem com as dadas pela Regra de Cramer, a qual será deduzida a seguir por meio de um raciocínio elementar, que não depende da teoria das matrizes.

C) REGRA DE CRAMER

Usaremos a notação $\det[u,v,w]$ para indicar o determinante da matriz cujas colunas são os vetores $u = (\alpha,\beta,\gamma)$, $v = (\alpha',\beta',\gamma')$ e $w = (\alpha'',\beta'',\gamma'')$. Se (x,y,z) é solução do sistema (S), isto é, se $d = x.a + y.b + z.c$, de acordo com a interpretação vetorial, então as propriedades elementares do determinante nos permitem escrever

$$\begin{aligned}\det[d,b,c] &= \det[x.a + y.b + z.c,\ b,\ c] = \\ &= x \det[a,b,c] + y \det[b,b,c] + z \det[c,b,c] = \\ &= x \det[a,b,c] + y.0 + z.0 = x \det[a,b,c]\,.\end{aligned}$$

Analogamente se tem

$$\det[a,d,c] = y \det[a,b,c] \quad \text{e} \quad \det[a,b,d] = z \det[a,b,c]\,.$$

Se supusermos $\det[a,b,c] \neq 0$, obteremos

$$x = \frac{\det[d,b,c]}{\det[a,b,c]}, \quad y = \frac{\det[a,d,c]}{\det[a,b,c]}, \quad z = \frac{\det[a,b,d]}{\det[a,b,c]}\,.$$

O conjunto dessas fórmulas é conhecido como a *Regra de Cramer*.

5. Custo operacional

Tradicionalmente, a Regra de Cramer é o método consagrado para a resolução dos sistemas lineares. Vejamos se essa tradição se justifica.

Examinaremos inicialmente os três métodos acima sob o ponto de vista do que chamaremos *custo operacional*. Admitindo que as

operações de adição e subtração tenham custo insignificante, vejamos quantas multiplicações e divisões são necessárias para aplicar cada um desses métodos.

A) CUSTO DO ESCALONAMENTO

São necessárias $(4+4)+(4+4) = 16$ multiplicações para eliminar x, $3+3=6$ multiplicações para eliminar y, uma divisão para obter z, uma multiplicação e uma divisão para achar y e duas multiplicações mais uma divisão para encontrar x. Ao todo, usam-se 28 operações de multiplicação ou divisão para resolver um sistema linear 3 por 3 pelo método de escalonamento.

B) CUSTO MATRICIAL

Tem-se primeiro que determinar a inversa da matriz A. Isto começa com o determinante de A. Desenvolvendo segundo uma linha ou coluna, tem-se 9 multiplicações para achar $\Delta = \det A$. Em seguida vêm os 9 determinantes menores A_{ij}. Três deles já foram calculados na expansão de Δ. Sobram 6, cada um dos quais requer 2 multiplicações. Até agora são $9+12=21$ multiplicações. Depois divide-se cada menor A_{ij} por Δ: são 9 divisões. Assim, o cálculo de A^{-1} tem custo $21+9=30$. Finalmente, o produto $A^{-1} \cdot D$ requer mais 9 multiplicações. Custo total: $30+9=39$.

Como veremos a seguir, esse é o mesmo custo da Regra de Cramer, o que é natural pois, como já observamos, a expressão $X = A^{-1} \cdot D$ coincide com a Regra de Cramer.

C) CUSTO DA REGRA DE CRAMER

Para resolver um sistema 3 por 3 pela Regra de Cramer, devem-se calcular 4 determinantes. Usando a expansão segundo linhas ou colunas, cada um desses determinantes requer 9 multiplicações. Custo parcial: $4 \times 9 = 36$. Em seguida, vêm 3 divisões. Custo total da Regra de Cramer: $36+3=39$.

CONCLUSÃO:

Para sistemas 3 por 3, o método do escalonamento tem custo 28, enquanto o método matricial e a Regra de Cramer têm ambos custo 39.

Convém observar que o caso 3 por 3, que estamos analisando, não é típico. Em muitas aplicações da Matemática encontram-se sistemas de equações lineares com dezenas, centenas, ou mesmo milhares de incógnitas. Quando o número de incógnitas cresce, a diferença de custo entre a Regra de Cramer (ou o método matricial) e o método de escalonamento cresce muito rapidamente, atingindo cifras quase inacreditáveis.

Não é difícil constatar que o cálculo de um determinante $n \times n$ pelo desenvolvimento segundo uma linha ou uma coluna custa aproximadamente $n!(e-1)$ multiplicações ($e = 2,71828$). Logo, o custo da Regra de Cramer num sistema de n equações a n incógnitas é $(n+1)!(e-1)+n$, aproximadamente.

Por outro lado, o custo do mesmo sistema $n \times n$ no processo de escalonamento, da maneira como o apresentamos, é de $2n^3/3 + 3n^2/2 - 7n/6$. (Nesta nota, usamos o dobro das multiplicações que seriam necessárias. Isso foi feito para os alunos não lidarem com frações.)

Essas fórmulas mostram que a resolução de um sistema de n equações lineares com n incógnitas pode tornar-se, para valores grandes de n, extremamente mais laboriosa pela Regra de Cramer do que pelo método do escalonamento.

Para estabelecer um confronto entre os dois métodos, imaginemos um computador capaz de efetuar um milhão de multiplicações ou divisões por segundo.

Usando o método do escalonamento, esse computador resolveria um sistema 10×10 em 0,8 milésimo de segundo; pela Regra de Cramer ele levaria 1 minuto e 8 segundos.

Vejamos um sistema 15×15. Por escalonamento, o computador o resolveria em 2,5 milésimos de segundo. Pela Regra de Cramer, ele levaria 1 ano, 1 mês e 16 dias.

Consideremos agora um sistema de 20 equações com 20 incógnitas. Nosso computador o resolveria por escalonamento em 6 milésimos de segundo. Pela Regra de Cramer, ele levaria 2 milhões, 754 mil e 140 anos para resolvê-lo!

Isso mostra claramente como a Regra de Cramer é inadequada para sistemas de grande porte. Para encerrar as comparações, observemos que, no computador que estamos considerando, um sistema de mil equações com mil incógnitas seria resolvido em 11 minutos pelo método do escalonamento. O tempo necessário para resolvê-lo pela Regra de Cramer é simplesmente inimaginável.

6. Considerações finais

O baixo custo operacional já seria razão suficiente para a superioridade do método do escalonamento sobre os outros dois. Mas tem mais. A solução $X = A^{-1} \cdot D$ e a Regra de Cramer só se aplicam no caso em que $\det A \neq 0$, ou seja, no caso em que o sistema possui uma única solução. Já vimos que são oito as posições relativas de três planos no espaço. A posição em que esses planos se intersectam num único ponto é apenas uma das oito. O método do escalonamento não depende de nenhuma hipótese sobre o determinante de A. Se o sistema for impossível, chega-se a uma terceira equação da forma $0.z = m$, com $m \neq 0$, e, se for indeterminado, à equação $0.z = 0$.

Infelizmente, vários livros adotados em nossas escolas cometem o grave erro de aplicar a Regra de Cramer em casos nos quais $\det[a,b,c] = 0$. Dizem esses livros que se $\det[d,b,c] = \det[a,d,c] = \det[a,b,d] = \det[a,b,c] = 0$ então, como a Regra de Cramer (mal aplicada) fornece $x = 0/0$, $y = 0/0$ e $z = 0/0$, o sistema é indeterminado. Isto é falso. Se os vetores a, b, c forem múltiplos um do outro mas o vetor d não for múltiplo deles, os 4 determinantes acima são nulos mas o sistema é impossível. Para os autores desses livros, o sistema

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 1 \\ 2x + 4y + 6z &= 2 \\ 3x + 6y + 9z &= 4 \end{aligned}$$

é indeterminado, isto é, possui infinitas soluções. Seria o caso de pedir a tais autores que dessem exemplos de uma sequer dessas soluções.

Não se deve porém imaginar que o método matricial e a Regra de Cramer são desprovidos de qualquer interesse. Para terminar, direi algumas palavras em defesa deles.

Em primeiro lugar, quando o número de equações e incógnitas é 3, como supusemos aqui, a economia operacional com o uso do escalonamento não é tão assustadora assim.

Em segundo lugar, quanto ao método matricial, a expressão $X = A^{-1} \cdot D$ sugere um tratamento algébrico das quantidades que ocorrem num sistema linear. Essa Álgebra Matricial tem grande interesse matemático, sua utilidade indo bem mais além do que foi esboçado aqui. E, quanto à Regra de Cramer, as fórmulas que dão explicitamente x, y e z em termos dos coeficientes a_i, b_i, c_i e d_i têm importância teórica pois permitem, entre outras coisas, avaliar o grau de mudança dessas respostas x, y, z quando se perturbam, ou se cometem erros nas medidas que fornecem, os coeficientes a_i, b_i, c_i, d_i.

Para concluir, cabe ressaltar que o advento dos computadores veio abrir caminho para novas técnicas de resolução dos sistemas lineares, além das mencionadas aqui. Entre elas destacam-se os métodos iterativos, cuja aplicação abrange também os sistemas não-lineares.

OBSERVAÇÃO

Segundo me informou *Eduardo Wagner*, o seguinte processo misto é freqüentemente empregado para resolver sistemas 3×3: usa-se a Regra de Cramer para determinar uma das incógnitas, digamos x. Em seguida, substitui-se em duas equações o valor encontrado, obtendo um sistema em y e z, o qual pode ser resolvido facilmente por um dos métodos conhecidos.

Este processo é mais rápido do que a Regra de Cramer pois nele se calculam apenas dois determinantes 3×3 , em vez de quatro. Na realidade, como se constata facilmente, sua aplicação requer 28 multiplicações ou divisões, número igual ao que necessita o processo de escalonamento. Deve-se contudo observar duas desvantagens deste processo misto em relação ao escalonamento. Em primeiro lugar, como a Regra de Cramer, ele requer que o determinante do sistema seja diferente de zero. Em segundo lugar, para sistemas com um número n de incógnitas maior do que 3, seu custo operacional, que tem a mesma ordem de grandeza de $n!$, torna-se tão proibitivo quanto o da Regra de Cramer.

NOTA

A idéia de escrever sobre o ensino de sistemas lineares remonta a uma carta enviada à RPM, em 1989, pelo Professor Paulo Argolo, do Rio de Janeiro, alertando para o emprego errôneo da Regra de Cramer em alguns textos de uso corrente.

As coisas que ensinamos

SOBRE FRAÇÕES PRÓPRIAS, IMPRÓPRIAS E APARENTES

Seiji Hariki
IME-USP, São Paulo, SP

Nesta nota trataremos de um assunto pouco explorado nos artigos sobre ensino de Matemática, a saber, a divergência de autores de livros didáticos quanto às definições e categorizações de objetos matemáticos. Aqui focalizaremos a divergência quanto à classificação de frações.

Aproveitaremos o ensejo para sugerir uma construção significativa do conceito de fração imprópria.

1. Classificação de frações

Vamos comparar as classificações de frações de três grupos de autores de livros didáticos:

O grupo A de autores classifica as frações em:

- fração própria: o numerador é menor do que o denominador;
- fração imprópria: o numerador é maior ou igual ao denominador;
- fração aparente: o numerador é um múltiplo do denominador.

Esta classificação tem um aspecto positivo e dois negativos. Por um lado, ela faz uma dicotomia, contrapondo fração própria a fração imprópria: dada uma fração, ou ela é própria, ou ela é imprópria. Tal oposição está conforme a linguagem comum, na qual *imprópria* significa precisamente a negação de *própria*.

Por outro lado, essa divisão das frações em 3 classes não é perfeita, pois a classe das frações aparentes tem interseção com a das frações impróprias. Por exemplo, 19/19 é uma fração ao mesmo tempo aparente (19 é múltiplo de si mesmo) e imprópria (o numerador e o denominador são iguais a 19).

Finalmente, segundo essa classificação, a fração 0/1 é, ao mesmo tempo, uma fração própria (o numerador é menor do que o denominador) e uma fração aparente (o numerador é múltiplo do denominador).

O grupo B de autores classifica as frações em:

- fração própria: o numerador é menor do que o denominador;
- fração imprópria: o numerador é maior do que o denominador;
- fração aparente: o numerador é um múltiplo do denominador.

Esta classificação tem, a nosso ver, três defeitos:

(a) ela não dicotomiza *própria* e *imprópria*, pois, em Matemática, ao contrário do que ocorre na linguagem comum, a negação de *menor* é *maior ou igual* a; (b) a classe de frações aparentes não é disjunta da classe das impróprias; (c) a classe das frações aparentes intersecta a classe das frações próprias.

O grupo C de autores apresenta a seguinte classificação:

- fração própria: o numerador é menor do que o denominador;
- fração imprópria: o numerador é maior do que o denominador mas não é múltiplo do mesmo;
- fração aparente: o numerador é um múltiplo do denominador.

Esta é uma classificação aparentemente tricotômica: o conjunto das frações é dividido em 3 classes disjuntas. No entanto, este grupo também não consegue atentar para as frações em que o numerador é zero, que seriam tanto próprias como aparentes. Além disso, o problema da nomenclatura permanece: uma fração que não é própria não é, segundo esta classificação, necessariamente imprópria.

Observamos que os três grupos concordam quanto às definições de fração própria e aparente; no demais, elas divergem entre si. Por exemplo, para o grupo A, 5/5 é uma fração imprópria, enquanto para os grupos B e C, ela não é. Quanto à fração 10/5, os grupos A e B concordam que ela é imprópria, mas o grupo C diz que não.

E aí, como é que fica? Qual classificação se deve escolher? Qual delas é correta? Ou será que tanto faz?

Do meu ponto de vista, deveríamos dividir as frações em próprias e impróprias. Frações próprias são aquelas que são maiores do que

0 e menores do que 1. Todas as outras frações são consideradas impróprias. Julgando-se conveniente, podem-se destacar, dentre as impróprias, as frações aparentes, que são aquelas que representam números naturais.

Em termos de representação (numerador e denominador), as definições ficariam sendo as seguintes:

- fração própria: o numerador é menor do que o denominador e é diferente de zero;
- fração imprópria: o numerador é maior ou igual ao denominador ou igual a zero.

  Como caso particular de fração imprópria, teríamos:
- fração aparente: o numerador é múltiplo do denominador.*

2. Como ajudar os alunos a construir significativamente o conceito de fração imprópria?

A fração própria refere-se ao conceito usual de fração: para a maioria das pessoas, fração é uma parte do todo; o *Dicionário Aurélio* cita como exemplo *fração de segundo* (que seria uma parte do segundo, algo menor que um segundo). Isto quer dizer que fração no sentido usual corresponde ao que, em Matemática, chamamos de fração própria.

Um problema didático difícil é o da apresentação aos alunos do conceito de fração imprópria: que sentido atribuir, por exemplo, à fração 5/2?

Em certas situações, 5/2 significa 5 vezes 1/2. Por exemplo, um glutão comeu 5/2 de torta, isto é, 5 metades de torta, que, do ponto de vista matemático, é igual a 2 tortas e meia.

Em outras situações, 5/2 significa metade de 5. Por exemplo, dona Maria quer distribuir equitativamente 5 pedaços de pizza para seus dois filhos. Ela certamente vai dar, para cada um, 2 pedaços

* **NR:** O uso dos nomes "própria", "imprópria", "aparente", no início do aprendizado, decorre da necessidade de enfatizar a diferença entre o significado de "fração" na língua corrente e o seu significado em Matemática, porém os nomes em si não merecem muito destaque, uma vez que, passada a fase inicial do aprendizado, eles deixam de ser usados. O fato de um número racional ser maior, menor ou igual a um nada tem de especial (salvo em problemas específicos).

inteiros e mais a metade do quinto pedaço. Assim, cada filho recebe 5/2 pedaços de pizza.

Em resumo, 5/2 pode, de acordo com o contexto, significar uma das duas coisas:

5 vezes 1/2 (5 metades) ou 1/2 vezes 5 (metade de 5).

3. Frações e medidas

Uma conexão que se poderia fazer, mas quase nunca é feita nos livros didáticos de hoje, é entre frações impróprias e a questão da comensurabilidade de segmentos. Mais precisamente, o conceito de fração imprópria pode ser construído a partir do problema da comparação entre segmentos (segmentos comensuráveis).

O problema geral seria o seguinte: sejam dados dois segmentos AB e CD, tais que AB é mais comprido do que CD. É possível medir AB, utilizando CD como unidade de medida?

Em caso afirmativo, CD caberia um número exato de vezes em AB. Em caso negativo, perguntaríamos: é possível dividir CD num número finito de partes iguais, de modo que uma dessas partes coubesse um número exato de vezes no segmento AB?

Em caso afirmativo, veríamos o aparecimento de uma fração imprópria m/n, com m maior do que n (m/n representaria neste caso m vezes $1/n$).

É claro que se mudarmos a escala do eixo numérico, utilizando $1/n$ como uma nova unidade, obteríamos os números da forma m/n, com m variando no conjunto dos números naturais, e assim apareceriam, de modo natural, as frações aparentes (quando m é um múltiplo de n).

Uma questão que ficaria "pendurada" é a da existência ou não de segmentos não-comensuráveis, um mistério a ser desvendado em cursos mais avançados (v. RPM 5, pp. 6-11).

Desse modo, seria dada uma interpretação geométrica aos conceitos de fração imprópria e fração aparente. O que a maioria dos autores de livros didáticos faz é introduzir tais frações num processo de classificação, levando em conta apenas a sua representação simbólica, ou a relação puramente aritmética de um número ser múltiplo do outro, ou então propondo uma operação fisicamente impossível como a de dividir uma pizza em 5 pedaços iguais e comer 8 deles ...

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS E LEIS DA TRIGONOMETRIA

Wu-yi Hsiang
Universidade da Califórnia, Berkeley

APRESENTAÇÃO

Wu-yi Hsiang é um conceituado matemático de origem chinesa, porém radicado nos Estados Unidos, onde é professor titular da Universidade da Califórnia, em Berkeley.

Há 15 anos, Wu-yi e sua esposa Mirtle voltaram à China. Lá procuraram o ministro da Educação e lhe propuseram um ambicioso projeto de reforma do ensino da Matemática visando, em primeiro lugar, organizar um currículo adaptado à escola secundária chinesa do próximo século e, em última análise, uma reforma geral do ensino de Matemática na China.

Tendo recebido o apoio imediato e entusiástico do ministro, o projeto de Wu-yi Hsiang começou experimentalmente com uma equipe de matemáticos e professores secundários de oito escolas e floresceu, tornando-se uma atividade nacional, envolvendo centenas de participantes e escolas.

Wu-yi e Mirtle têm visitado a China durante três meses por ano, desde 1978. Durante esse período, os textos contendo o novo currículo foram escritos e reescritos diversas vezes, a partir da concepção original de Wu-yi, com base em seu uso nas escolas.

Wu-yi já esteve algumas vezes no Brasil, em visita ao IMPA. Numa dessas ocasiões, traduziu do chinês para o inglês um capítulo de seu livro e o ofereceu especialmente para ser publicado na RPM.

A presente versão para o português, feita pelo Professor Alberto Azevedo, é apresentada aos nossos leitores, para que tenhamos conhecimento dessa renovação pedagógica que resulta da colaboração harmoniosa, na grande república da China, entre matemáticos profissionais e professores secundários.

Elon Lages Lima

1. Introdução

Neste breve artigo discutiremos a origem e o significado de duas funções trigonométricas básicas: a função seno e a função cosseno, e duas leis fundamentais da trigonometria: a lei do seno e a lei do cosseno. Historicamente, o seno e o cosseno foram introduzidos como *razões* entre lados de um triângulo retângulo. Entretanto, de um ponto de vista *funcional* moderno, é mais natural considerar as funções seno e cosseno como as *funções definidas no círculo unitário.*

No sistema de coordenadas cartesianas do plano, o círculo unitário é descrito usualmente pela equação

$$x^2 + y^2 = 1 . \qquad (1)$$

Por outro lado, se um ponto P parte de $A(1,0)$ e caminha sobre o círculo unitário com velocidade unitária, é claro que suas coordenadas x e y são funções do tempo t e são exatamente o par de funções trigonométricas, a saber:

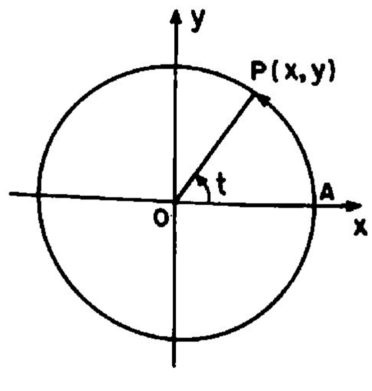


FIGURA 1

$$x = \cos t \quad \text{e} \quad y = \operatorname{sen} t . \qquad (2)$$

A equação (1) pode ser considerada como uma descrição *estática* do círculo unitário, enquanto que o par de equações (2) fornece uma representação *dinâmica* do círculo unitário, ou melhor, do *movimento circular fundamental.* De qualquer maneira, a representação dinâmica acima fornece uma maneira natural de introduzir as funções seno e cosseno definindo-as como o par de *funções circulares fundamentais.*

Na Geometria Plana, *círculos* e *triângulos* são objetos geométricos básicos, simples, dos mais fundamentais. Veremos (§2) que o par de funções seno e cosseno fornece as ferramentas analíticas adequadas para o estudo de várias propriedades do círculo. Já as leis do seno e do cosseno (§3) mostram que estas funções também fornecem as ferramentas básicas para a análise quantitativa das diversas propriedades geométricas dos triângulos. Assim, as duas

funções trigonométricas e as duas leis da trigonometria constituem um *alicerce único* que engloba tanto a geometria dos círculos quanto a dos triângulos, fornecendo uma base firme para toda a Geometria Analítica.

2. As propriedades geométricas básicas do círculo e as propriedades funcionais básicas do seno e do cosseno

As funções seno e cosseno são, por definição, um *par harmonioso*; em conjunto elas representam um dos movimentos periódicos mais fundamentais, a saber, o movimento circular com velocidade unitária*. Conseqüentemente, é bastante natural que as propriedades *funcionais* básicas do seno e do cosseno sejam como que uma *tradução* (i.e., correlação direta) das propriedades geométricas básicas do círculo unitário. Daremos a seguir um sumário conciso da correlação existente entre as propriedades geométricas do círculo unitário e as propriedades funcionais do seno e do cosseno.

(i) $\quad x^2 + y^2 = 1 \quad \leftrightarrow \quad \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1.$

(ii) A simetria por rotação do círculo unitário $\leftrightarrow$ os teoremas de adição das funções seno e cosseno.

Sejam t_1, t_2, t'_1, t'_2, os *parâmetros angulares* de $B(x_1, y_1)$, $C(x_2, y_2)$, $B'(x'_1, y'_1)$ e $C'(x'_2, y'_2)$, respectivamente.

Com esta notação, os triângulos OBC e $OB'C'$ podem coincidir por uma rotação conveniente, isto é, serão *congruentes*, se, e somente se, $(t_2 - t_1) = (t'_2 - t'_1)$. Assim, tanto o comprimento BC como a área orientada do triângulo OBC *dependem somente da diferença entre seus parâmetros angulares*, ou, em outras palavras, estes dois invariantes geométricos são *funções* de $(t_2 - t_1)$ *somente!* Portanto, é conveniente calculá-los considerando o caso especial em que $B'' = A(1,0)$ e $C''(x''_2, y''_2)$ com $t''_1 = 0$, $t''_2 = t_2 - t_1$. Temos:

* É interessante notar que os movimentos circulares são também os mais úteis, como o movimento periódico das rodas do qual a civilização industrial moderna depende constantemente.

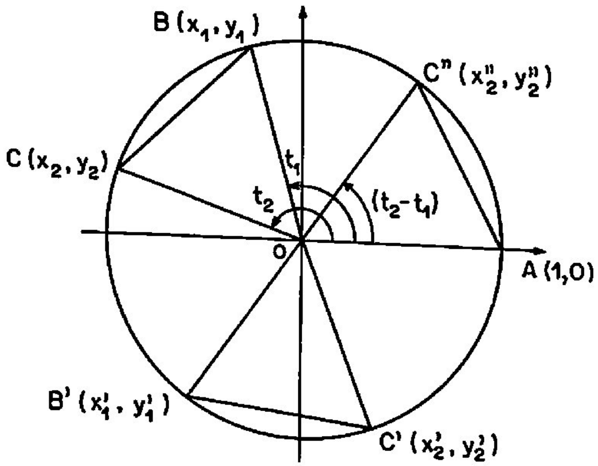


FIGURA 2

$$
\begin{aligned}
BC^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \\
&= (\cos t_2 - \cos t_1)^2 + (\operatorname{sen} t_2 - \operatorname{sen} t_1)^2 \\
&= 2 - 2(\cos t_2 \cos t_1 + \operatorname{sen} t_2 \operatorname{sen} t_1) \\
AC''^2 &= (\cos(t_2 - t_1) - 1)^2 + (\operatorname{sen}(t_2 - t_1) - 0)^2 \\
&= 2 - 2\cos(t_2 - t_1),
\end{aligned} \tag{3}
$$

o que demonstra a fórmula de adição para a função cosseno:

$$\cos(t_2 - t_1) = \cos t_2 \cos t_1 + \operatorname{sen} t_2 \operatorname{sen} t_1 . \tag{3'}$$

Analogamente, pela fórmula usual para a área dos triângulos, se indicarmos a área do triângulo ABC por $\mathcal{A}_{ABC}$, teremos:

$$\mathcal{A}_{OBC} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \cos t_1 & \cos t_2 \\ \operatorname{sen} t_1 & \operatorname{sen} t_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(\cos t_1 \operatorname{sen} t_2 - \cos t_2 \operatorname{sen} t_1)$$

$$\mathcal{A}_{OAC''} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & \cos(t_2 - t_1) \\ 0 & \operatorname{sen}(t_2 - t_1) \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(t_2 - t_1), \tag{4}$$

o que demonstra a fórmula de adição para a função seno:

$$\operatorname{sen}(t_2 - t_1) = \operatorname{sen} t_2 \cos t_1 - \cos t_2 \operatorname{sen} t_1 . \tag{4'}$$

A breve discussão acima mostra que, tanto para o seno quanto para o cosseno, os teoremas fundamentais de adição são conseqüências diretas das definições e da *simetria por rotação do círculo unitário.*

(iii) A simetria por reflexão do círculo unitário $\leftrightarrow$ as fórmulas que "convertem somas em produtos":

$$
\begin{cases}
\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2} \\
\cos\alpha - \cos\beta = -2\operatorname{sen}\dfrac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{sen}\dfrac{\alpha-\beta}{2} \\
\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 2\operatorname{sen}\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2} \\
\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{sen}\dfrac{\alpha-\beta}{2}.
\end{cases} \tag{5}
$$

Embora as fórmulas acima possam ser facilmente deduzidas de (3') e (4') por manipulações algébricas, a demonstração geométrica que daremos a seguir mostra que elas estão diretamente relacionadas à simetria por reflexão, tanto do círculo quanto do triângulo isósceles.

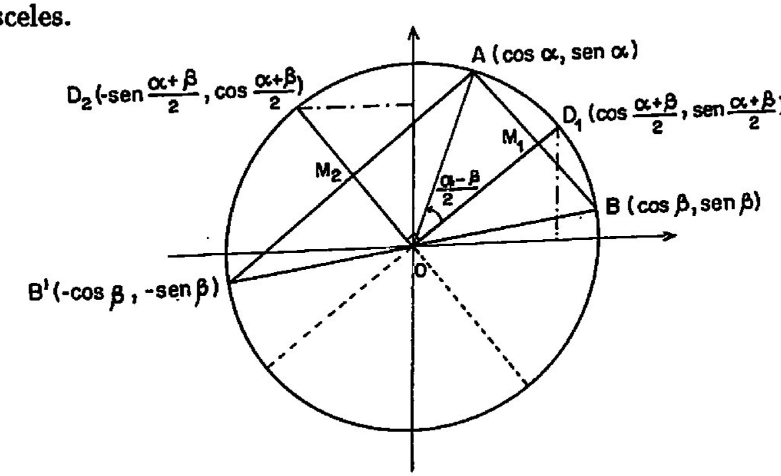


FIGURA 3

Como indicado na Figura 3, o triângulo OAB (respec. triângulo OAB') e o círculo unitário são ambos simétricos relativamente à reflexão em torno do diâmetro OM_1 (respec. OM_2). As coordenadas do ponto médio M_1 (respec. M_2) de AB (respec. AB') são dadas por $\frac{1}{2}(\cos\alpha+\cos\beta)$ e $\frac{1}{2}(\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta)$ (respec. $\frac{1}{2}(\cos\alpha-\cos\beta)$ e $\frac{1}{2}(\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}\beta)$). Por outro lado, o comprimento de OM_1 (respec. OM_2) é igual a $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ (respec. $\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}$). Conseqüentemente, suas coordenadas são também iguais a $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ (respec. $\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}$) vezes as coordenadas de D_1 (respec. D_2). Isto fornece as equações:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(\cos\alpha+\cos\beta) = \cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \\ \frac{1}{2}(\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta) = \cos\frac{\alpha-\beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2} \\ \frac{1}{2}(\cos\alpha-\cos\beta) = -\operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta}{2} \\ \frac{1}{2}(\operatorname{sen}\alpha-\operatorname{sen}\beta) = \operatorname{sen}\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}. \end{cases} \tag{5'}$$

A demonstração acima mostra claramente o significado geométrico das fórmulas (5).

(iv) O significado geométrico das fórmulas do ângulo-metade.

No caso especial em que $\beta=0$, a primeira e terceira equações de (5') ficam:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(\cos\alpha+1)=\cos^2\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \\ \frac{1}{2}(1-\cos\alpha)=\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}. \end{cases}$$

Como indicado na Figura 4, o triângulo OAC é isósceles e, portanto, $\widehat{A}=\widehat{C}=\frac{\alpha}{2}$. Ademais,

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{AH}{CH}=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{1+\cos\alpha}. \tag{6'}$$

Usando (6') e a identidade $\cos^2\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha=1$, deduzimos facilmente as fórmulas:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\alpha &= \frac{2\operatorname{tg}(\alpha/2)}{1+\operatorname{tg}^2(\alpha/2)} \quad \text{e} \\ \cos\alpha &= \frac{1-\operatorname{tg}^2(\alpha/2)}{1+\operatorname{tg}^2(\alpha/2)}. \end{aligned} \tag{6''}$$

que são de grande utilidade no cálculo das integrais de funções racionais de $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$.

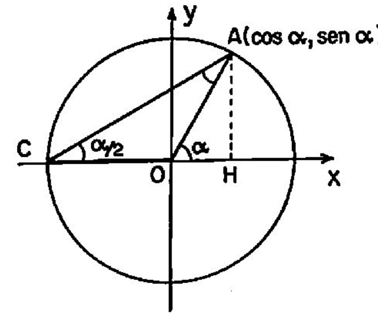


FIGURA 4

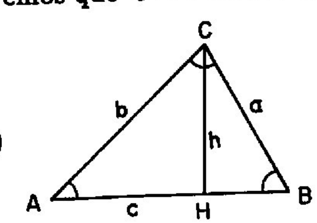
3. As leis da trigonometria e a análise quantitativa dos invariantes geométricos básicos dos triângulos

Um triângulo tem três ângulos e três lados, usualmente conhecidos como os seis elementos do triângulo. Indicaremos os três ângulos do triângulo ABC pelas letras A, B, C e por a, b, c os comprimentos dos respectivos lados opostos.

(i) A LEI DO COSSENO

As condições de congruência tais como L.A.L. (lado, ângulo, lado) e L.L.L. (lado, lado, lado) mostram claramente que os seis elementos de um triângulo estão relacionados funcionalmente. Por exemplo, L.L.L. implica que os três ângulos são funções dos três lados. A lei do cosseno fornece expressões explícitas dos *cossenos dos ângulos como funções dos lados.* Considerando a *projeção ortogonal* de AC e de BC sobre AB, vemos que $c=b\cos A+a\cos B$. De modo análogo, obtemos:

$$\begin{cases} c=b\cos A+a\cos B \\ b=a\cos C+c\cos A \\ a=b\cos C+c\cos B \end{cases} \tag{7}$$



(versão primitiva da lei do cosseno).

FIGURA 5

Considerando o sistema de equações acima como um sistema de três equações lineares nas variáveis $\cos A$, $\cos B$ e $\cos C$ e coeficientes a, b e c, obtemos a seguinte solução, que é a *versão explícita da* *lei do cosseno*:

$$\begin{cases} \cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \\ \cos B = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac} \\ \cos C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\,. \end{cases} \tag{7'}$$

(ii) A LEI DO SENO

Como indicado na Figura 5, a área do triângulo ABC, que indicaremos por $\mathcal{A}$, é igual a $\frac{1}{2}\,AB\cdot CH$, isto é,

$$\mathcal{A} = \frac{c\cdot h}{2} = \frac{c\cdot b\cdot \operatorname{sen} A}{2} \quad \text{e, daí,} \quad \frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{2\mathcal{A}}{abc} \tag{8}$$

e, portanto, obtemos a *lei do seno*:

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c} = \frac{2\mathcal{A}}{abc}\,. \tag{8'}$$

Daremos, a seguir, duas outras demonstrações da lei do seno.
Segunda demonstração:

Podemos expressar $\operatorname{sen}^2 A\,/\,a^2$, em função dos lados, da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sen}^2 A}{a^2} &= \frac{1-\cos^2 A}{a^2} = \frac{4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2}{4\,a^2b^2c^2} \\ &= \frac{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4)}{4\,a^2b^2c^2}\,. \end{aligned} \tag{8''}$$

Como a expressão acima é simétrica em relação a a, b, c, é claro que

$$\frac{\operatorname{sen}^2 A}{a^2} = \frac{\operatorname{sen}^2 B}{b^2} = \frac{\operatorname{sen}^2 C}{c^2}$$

e, portanto, visto que $\operatorname{sen} A$, $\operatorname{sen} B$ e $\operatorname{sen} C$ são todos positivos:

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$$

Terceira demonstração:
Como indicado na Figura 6, BA' é um diâmetro do círculo circunscrito ao triângulo ABC. Conseqüentemente, $\widehat{A} = \widehat{A'}$ e o triângulo $A'BC$ é retângulo. É claro que

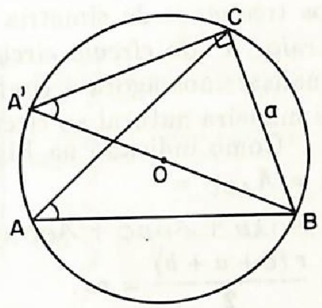


FIGURA 6

$$\operatorname{sen} A = \operatorname{sen} A' = \frac{a}{2R}\,,$$

onde R é o raio do círculo circunscrito. Logo,

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c} = \frac{1}{2R}\,.$$

Observação: As três demonstrações dadas fornecem três significados geométricos distintos para a razão $\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$, a saber:

$$\frac{2\mathcal{A}}{abc},\quad \frac{[\,2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4)\,]^{1/2}}{2abc} \quad \text{e} \quad \frac{1}{2R}\,.$$

Conseqüentemente, estes três invariantes geométricos são iguais e obtemos assim, como subproduto, a fórmula de Heron que expressa a área em função dos lados e a fórmula para o raio R do círculo circunscrito:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^2 &= \frac{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4)}{16} \\ &= s\,(s-a)(s-b)(s-c) \quad \text{onde} \quad s = \frac{a+b+c}{2}\,. \end{aligned} \tag{9}$$

$$R = \frac{abc}{4\mathcal{A}}\,. \tag{10}$$

(iii) AS FÓRMULAS DO ÂNGULO-METADE E O CÍRCULO INSCRITO

Os círculos circunscrito e inscrito são os dois círculos que podem ser associados ao triângulo de uma maneira natural. O circuncentro é a intersecção comum dos três eixos de simetria dos lados, enquanto que o centro do círculo inscrito é a intersecção comum dos três eixos de simetria dos ângulos. A fórmula (10) expressa o *raio* R *do círculo circunscrito* em termos dos lados e da área. Analisaremos agora a configuração geométrica que está associada de maneira natural ao círculo inscrito.

Como indicado na Figura 7,

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{ABC} =$$
$$= \mathcal{A}_{OAB} + \mathcal{A}_{OBC} + \mathcal{A}_{OCA}$$
$$= \frac{r\,(c+a+b)}{2} = rs\,.$$

Segue-se que

$$r = \frac{\mathcal{A}}{s} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} \tag{11'}$$

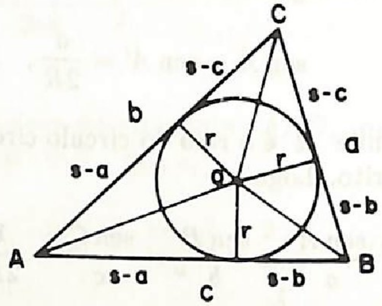


FIGURA 7

Ademais, se indicarmos por x (respec. y, z) o comprimento das duas tangentes ao círculo inscrito, traçadas a partir de A (respec. B, C), teremos:

$$\begin{cases} x+y=c \\ y+z=a \\ z+x=b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=s-a \\ y=s-b \\ z=s-c \end{cases} \tag{12}$$

Portanto,

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\dfrac{A}{2} = \dfrac{r}{s-a} = \sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} \\[2ex] \operatorname{tg}\dfrac{B}{2} = \dfrac{r}{s-b} = \sqrt{\dfrac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}} \\[2ex] \operatorname{tg}\dfrac{C}{2} = \dfrac{r}{s-c} = \sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}} \end{cases} \tag{13}$$

A partir deste ponto é fácil deduzir as fórmulas para o seno e o cosseno do ângulo-metade; por exemplo,

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(A/2)}} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

Obtemos:

$$\begin{cases} \cos\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{s(s-a)}{bc}} \\[2ex] \cos\dfrac{B}{2} = \sqrt{\dfrac{s(s-b)}{ac}} \\[2ex] \cos\dfrac{C}{2} = \sqrt{\dfrac{s(s-c)}{ab}} \end{cases} \qquad \begin{cases} \operatorname{sen}\dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{bc}} \\[2ex] \operatorname{sen}\dfrac{B}{2} = \sqrt{\dfrac{(s-a)(s-c)}{ac}} \\[2ex] \operatorname{sen}\dfrac{C}{2} = \sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)}{ab}} \end{cases}.$$

4. Observações finais

Ao concluir esta breve discussão sobre funções trigonométricas e leis da trigonometria, faremos algumas observações adicionais.

(i) Geometricamente, $\cos t$ é o *comprimento orientado* de $\overrightarrow{OX}$ que, por sua vez, é a *projeção ortogonal* de $\overrightarrow{OP}$; já $\operatorname{sen} t$ é o dobro da *área orientada* do triângulo OAP. Assim, é bastante natural que a demonstração da lei do cosseno tenha usado a projeção ortogonal de um triângulo sobre seus três lados (vide (7)), e a primeira demonstração da lei do seno, a fórmula da área de um triângulo.

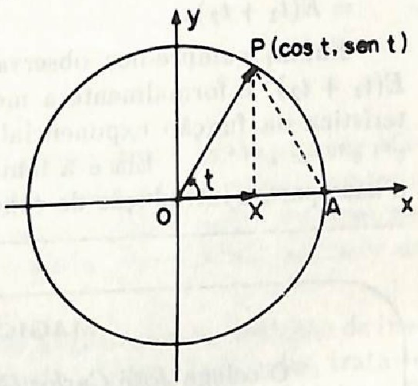


FIGURA 8

Analogamente, a demonstração do teorema de adição da função cosseno usou a decomposição ortogonal do comprimento, isto é, o teorema de Pitágoras, enquanto que a do teorema de adição da função seno, a fórmula da área de um triângulo.

(ii) A primeira demonstração que demos da lei do seno é a mais natural das três apresentadas. *Não é necessário* saber a forma final da lei do seno para descobrir o caminho da primeira demonstração; a expressão final para $\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$ simplesmente surge como a resposta natural para a abordagem mais natural. Por outro lado, se *já* se sabe que $\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$, então não há dificuldade em calcular, utilizando a lei do cosseno, o valor comum acima em termos apenas dos comprimentos dos três lados, e a resposta final deve ser uma função simétrica de a, b, c! Esta é precisamente a segunda demonstração.

(iii) Como já observamos no início, as funções seno e cosseno formam um par harmonioso pois juntas representam o movimento periódico mais fundamental: a rotação circular com velocidade unitária. A rigor, podemos até formalizar este casamento matemático do seno e cosseno dentro do contexto dos números complexos. Se $E(t) = \cos t + i \,\mathrm{sen}\, t$, as fórmulas de adição das funções seno e cosseno podem ser unificadas numa fórmula simples e precisa:

$$
\begin{aligned}
E(t_1)\,E(t_2) &= (\cos t_1 + i\,\mathrm{sen}\,t_1)(\cos t_2 + i\,\mathrm{sen}\,t_2)\\
&= (\cos t_1 \cos t_2 - \mathrm{sen}\,t_1 \mathrm{sen}\,t_2) - i\,(\cos t_1 \mathrm{sen}\,t_2 + \cos t_2 \mathrm{sen}\,t_1)\\
&= E(t_1 + t_2).
\end{aligned}
$$

Enfim, cumpre-nos observar que a fórmula $E(t_1)\,E(t_2) = E(t_1 + t_2)$ é formalmente a mesma que dá a propriedade característica da função exponencial, a saber, a regra dos expoentes $e^{x_1} e^{x_2} = e^{x_1+x_2}$. Ela é a famosa fórmula de Euler e é também a base para a introdução do conceito de expoentes complexos.

MAGICÁLCULO

O colega *José Carlos Gomes de Oliveira*, de Jacarezinho, PR, abordando o uso da calculadora em sala de aula, propõe a seguinte atividade:

- Solicite aos seus alunos que digitem numa calculadora um número qualquer de 3 algarismos. Em seguida, que digitem novamente os mesmos 3 algarismos, obtendo um número de 6 algarismos.
- A seguir, peça que eles dividam o número obtido, sucessivamente, por 7, por 11 e por 13.

Todas as divisões serão "exatas" e o resultado final, surpreendente. Será um magicálculo... até que algum aluno consiga desvendar o mistério. Aí a Matemágica se transforma em Matemática.

INEQUAÇÕES-PRODUTO
(o método da "marcha a ré")

Abram Bloch
Anglo Vestibulares, SP

1. Introdução

Dedico e ofereço este artigo aos meus colegas, professores de Matemática do 2º grau. Pretendo, deste modo, prestar minha modesta homenagem a este grupo de denodados e sacrificados lutadores em prol do Saber, grupo ao qual me orgulho de pertencer há mais de cinqüenta anos!

Pretendo apresentar um método simples para a resolução de inequações-produto e inequações-quociente. *Apesar* de simples, trata-se de uma proposta bem fundamentada do ponto de vista lógico. O nome adotado – método da "marcha a ré" – deixou de ser relevante após as primeiras generalizações, mas *emplacou*, e por isso foi conservado.

De modo genérico, pode-se afirmar que a justificação dos métodos para a resolução de inequações-produto se baseia essencialmente em propriedades de funções contínuas (mudança de sinal ao *atravessar* uma raiz). Pois bem, essa explicação ou justificação, que é legítima no plano intuitivo, está *condenada* a permanecer nesse plano: sua demonstração usa recursos de análise por demais refinados para um curso de Matemática em escolas do 2º grau. Ao contrário, a demonstração de validade do método que venho propor está baseada unicamente em propriedades algébricas elementares (baseia-se nas propriedades do conceito de ordem no corpo $\mathbb{R}$ dos números reais).

Sobre a vantagem em *agilidade* do método proposto, comparado ao método tradicional, não me parece haver dúvida. Pelo método tradicional, resolve-se a inequação $A \cdot B \cdot C \cdot D > 0$ analisando o sinal de cada fator em cada intervalo determinado por duas raízes reais *consecutivas* (que poderão ser em número de oito, quando os fatores A, B, C e D forem funções quadráticas), enquanto que, pelo método aqui proposto, estuda-se o sinal do produto $A \cdot B \cdot C \cdot D$ num único intervalo.

O prof. Glenn Albert Jacques Van Amson, do Anglo Vestibulares, e eu mesmo publicamos uma apresentação didática do método, dirigida a alunos do segundo grau.

2. Sinais de um polinômio real cujas raízes são todas reais e simples

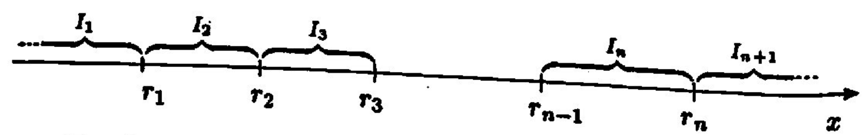
Consideremos uma função polinomial $f(x)$ definida em $\mathbb{R}$ da forma e do tipo seguintes:

$$f(x) = a_0(x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_n),$$

onde $a_0 \in \mathbb{R}^*$, x é uma variável real e as raízes $r_1, r_2, \ldots r_n$ são números reais, distintos dois a dois.

As funções polinomiais $f(x)$ descritas acima serão chamadas *polinômios reais com todas suas raízes reais e simples*.

Podemos supor que $r_1 < r_2 < \ldots < r_n$ sem perda de generalidade. Então, as n raízes (com $n \in \mathbb{N}^*$) determinam $n + 1$ intervalos abertos, como segue:



Um dos *segredos* para *agilizar* a demonstração consiste em representar esses intervalos de maneira prolixa; em vez de $I_1 = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x < r_1\}$, que é uma maneira correta, usamos a seguinte notação, também correta, mas redundante:

$$I_1 = \{x \in \mathbb{R} \,|\, (x < r_1) \wedge (x < r_2) \wedge \cdots \wedge (x < r_n)\}.$$

De forma análoga, o intervalo I_p, com $2 \le p \le n$, não será indicado como se faz comumente, $I_p = \{x \in \mathbb{R} \,|\, r_{p-1} < x < r_p\}$, porém será denotado como segue:

$$I_p = \{x \in \mathbb{R} \,|\, (x > r_1) \wedge (x > r_2) \wedge \cdots \wedge (x > r_{p-1}) \wedge$$
$$(x < r_p) \wedge (x < r_{p+1}) \wedge \cdots \wedge (x < r_n)\}.$$

O último intervalo, I_{n+1}, será expresso assim:

$$I_{n+1} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, (x > r_1) \wedge (x > r_2) \wedge \cdots \wedge (x > r_n)\}.$$

Com essas considerações, deste ponto em diante, usaremos o termo *raízes consecutivas* para indicar qualquer par de raízes $\{r_p, r_{p+1}\}$. Também usaremos o termo *intervalos consecutivos* para indicar qualquer par de intervalos $\{I_p, I_{p+1}\}$.

Encerrando estas preliminares, vamos observar que as inequações $x < r$ e $x - r < 0$ são equivalentes e, do mesmo modo, as inequações $x > s$ e $x - s > 0$ são equivalentes. Assim, fica estabelecido que o intervalo I_p, com $1 < p \le n$, pode ser descrito como segue:

$$I_p = \{x \in \mathbb{R} \,|\, (x - r_1 > 0) \wedge (x - r_2 > 0) \wedge \cdots \wedge (x - r_{p-1} > 0) \wedge$$
$$(x - r_p < 0) \wedge (x - r_{p+1} < 0) \wedge \cdots \wedge (x - r_n < 0)\}.$$

3. O sinal de $f(x)$ no intervalo I_p

Vamos retomar o polinômio descrito no § 2,

$$f(x) = a_0(x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_n),$$

e atribuir a x dois valores u e v, ambos num mesmo intervalo I_p. Analisemos, agora, o produto $f(u) \cdot f(v)$:

$$f(u) = a_0 \cdot \prod_{i=1}^{n}(u - r_i) \quad \text{e} \quad f(v) = a_0 \cdot \prod_{i=1}^{n}(v - r_i).$$

Empregando as propriedades associativa e comutativa da multiplicação, obtemos:

$$f(u) \cdot f(v) = {a_0}^2 \cdot \prod_{i=1}^{n}[(u - r_i)(v - r_i)]. \qquad (*)$$

Voltemos, por um instante, à descrição de I_p dada no § 2: se, para um certo i, tivermos $u - r_i > 0$, resultará também que $v - r_i > 0$. Do mesmo modo, se, para um certo i, tivermos $u - r_i < 0$, resulta também $v - r_i < 0$. Ora, isto constitui uma prova que se verifica:

$$[(u - r_i)(v - r_i)] > 0, \quad \text{para todo } i,\ i \in \mathbb{N},\ 1 \leq i \leq n.$$

Além disso, $a_0{}^2 > 0$, pois $a_0 \in \mathbb{R}^*$.

Segue que o segundo membro de (*) é um produto de fatores todos positivos e, portanto, $f(u) \cdot f(v) > 0$.

A desigualdade demonstrada acima constitui a tese do seguinte teorema:

TEOREMA 1: *Seja $f(x)$ um polinômio real com todas as suas raízes reais e simples. Seja I qualquer um dos intervalos descritos no § 2, e seja x_0 um elemento qualquer de I. Nessas condições:*

se $f(x_0) > 0$, então $f(x) > 0$, para todo $x \in I$;
se $f(x_0) < 0$, então $f(x) < 0$, para todo $x \in I$.

Isto é, dentro de I, $f(x)$ não muda de sinal.

4. Sinais do polinômio $f(x)$ em intervalos consecutivos

Voltando ao polinômio $f(x)$ descrito no § 2, vamos *detalhar* $f(x)$ do seguinte modo:

$$f(x) = a_0(x - r_1)(x - r_2)\cdots(x - r_{p-1})(x - r_p)(x - r_{p+1})\cdots(x - r_n).$$

Desta vez atribuiremos à variável x dois valores u e v pertencentes a intervalos consecutivos: $u \in I_p$ e $v \in I_{p+1}$.

Como no § anterior, iremos obter o sinal do produto $f(u) \cdot f(v)$ e, para isso, vamos explicitar os seus fatores do seguinte modo:

$f(u) \cdot f(v) =$

$$= a_0{}^2 \cdot \prod_{i=1}^{p-1}[(u - r_i)(v - r_i)] \cdot [(u - r_p)(v - r_p)] \cdot \prod_{i=p+1}^{n}[(u - r_i)(v - r_i)].$$

Com relação ao segundo membro, observe-se que:

- de $a_0 \in \mathbb{R}^*$, tem-se que $a_0{}^2 > 0$,
- para todo $i \in \mathbb{N}$, tal que $1 \leq i \leq p - 1$, tem-se que $u > r_i$ e $v > r_i$ (pois $u \in I_p$ e $v \in I_{p+1}$) e, portanto, segue que:

$$\prod_{i=1}^{p-1}[(u - r_i)(v - r_i)] > 0,$$

- para todo $i \in \mathbb{N}$, tal que $p + 1 < i < n$, tem-se que $u < r_i$ e $v < r_i$, (pois $u \in I_p$ e $v \in I_{p+1}$) e, portanto, segue que:

$$\prod_{i=p+1}^{n}[(u - r_i)(v - r_i)] > 0;$$

- resta analisar o produto $(u - r_p)(v - r_p)$. Ora,

$$u \in I_p \Longrightarrow u - r_p < 0 \quad \text{e} \quad v \in I_{p+1} \Longrightarrow v - r_p > 0.$$

Logo, $(u - r_p)(v - r_p) < 0$.

Dessas quatro observações, podemos concluir que

$$f(u) \cdot f(v) < 0.$$

Fica assim demonstrado o seguinte teorema:

TEOREMA 2: *Seja $f(x)$ um polinômio real com todas as suas raízes reais e simples, e sejam I_p e I_{p+1} dois intervalos consecutivos quaisquer. Então, em I_p e I_{p+1}, $f(x)$ terá sinais contrários. Isto é, $f(x)$ assume valores numéricos de sinais contrários, quando a variável x passa de um intervalo a um intervalo consecutivo.*

5. Considerando os dois teoremas

Os dois teoremas demonstrados nos itens anteriores habilitam-nos a afirmar que o sinal do polinômio $f(x)$ descrito no § 2 *muda alternadamente* quando x *passa* de um intervalo a um intervalo consecutivo (situado à sua esquerda ou à sua direita, indiferentemente).

Ora, isso permite obter a *distribuição completa* de sinais de $f(x)$ em $\mathbb{R} - \{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$, bastando conhecer as raízes e o sinal de $f(x)$ em *apenas um* valor de x escolhido em qualquer dos intervalos I_p.

Exemplo 1

Dar a distribuição de sinais do polinômio

$$f(x) = 14\,(x-5)\,(x+3)\,(7-4x)\,(x+1), \quad x \in \mathbb{R}.$$

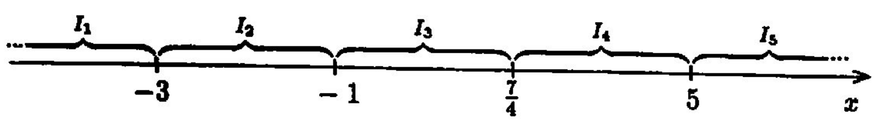
Resolução:

Inicialmente vamos reduzir $f(x)$ à forma descrita no § 2:

$$f(x) = 14\,(x-5)\,(x+3)\,(-4)\,(x-\tfrac{7}{4})\,(x+1), \quad \text{ou seja,}$$

$$f(x) = -56\,(x+3)\,(x+1)\,(x-\tfrac{7}{4})\,(x-5)\,.$$

As raízes, que são $-3, -1, \frac{7}{4}$ e 5, determinam os intervalos descritos abaixo:

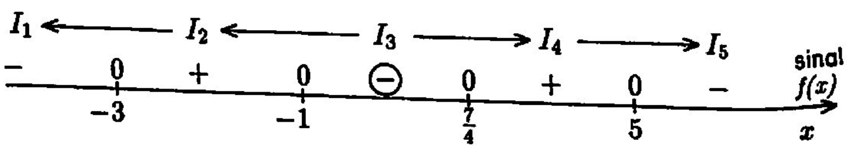


Vamos escolher (arbitrariamente) $x = 0$ (0 pertence a I_3).

$$f(0) = -56 \cdot (-5)\,(3)\,(-\tfrac{7}{4})\,(1),$$

$$f(0) < 0 \quad \text{(três fatores negativos).}$$

Logo, $f(x)$ é negativo em I_3. Então, aplicando os teoremas 1 e 2:



Exemplo 2

Resolver em $\mathbb{R}$ a inequação: $(4x^3 - 9x)\,(x-3) < 16\,(x^2 - 3x)$.

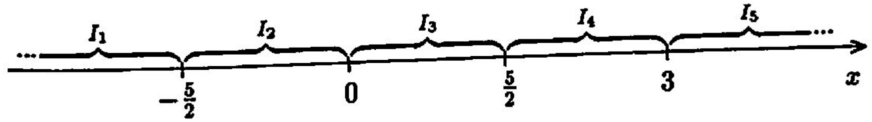
Resolução:

Inicialmente, devemos obter uma inequação $g(x) < 0$, equivalente à inequação dada e com $g(x)$ na forma descrita no § 2.

$$x\,(4x^2-9)\,(x-3) - 16x\,(x-3) < 0 \iff x\,(x-3)\,(4x^2-25) < 0 \iff$$

$$4x\,(x-3)\,(x^2 - \tfrac{25}{4}) < 0 \iff 4x\,(x-3)\,(x-\tfrac{5}{2})\,(x+\tfrac{5}{2}) < 0\,.$$

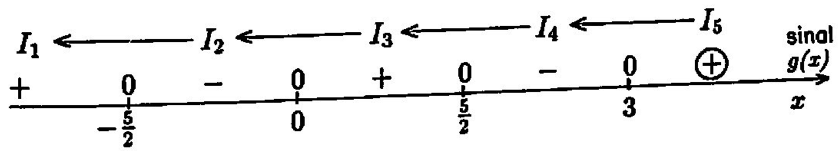
Observe-se que o polinômio $g(x) = 4\,(x+\frac{5}{2})\,(x)\,(x-\frac{5}{2})\,(x-3)$ verifica todas as condições dos teoremas 1 e 2. Suas raízes determinam os seguintes intervalos:



Vamos atribuir a x o valor 10 (escolhido arbitrariamente em I_5):

$$g(10) = 4\,(10+\tfrac{5}{2})\,(10)\,(10-\tfrac{5}{2})\,(10-3) > 0$$

Logo, g(x) é positivo em I_5. Pelos teoremas 1 e 2, resulta:



Finalmente, a inequação $g(x) < 0$, que é equivalente à inequação dada, tem como conjunto solução a união dos intervalos I_2 e I_4:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid (-\tfrac{5}{2} < x < 0) \vee (\tfrac{5}{2} < x < 3)\}\,.$$

6. Raízes múltiplas

Consideremos, agora, um polinômio do tipo $A(x) = (x-r)^{2m}$, onde $m \in \mathbb{N}^*$ e $r \in \mathbb{R}$. Diz-se que r é uma raiz de $A(x)$ de multiplicidade $2m$ (par). Quanto aos sinais de $A(x)$:

- $A(x) = 0$ se, e somente se, $x = r$;
- para todo $x \in \mathbb{R}$, $x \neq r$, tem-se $A(x) > 0$.

Fica demonstrado assim o seguinte teorema:

TEOREMA 3: *Seja* $P(x) = g(x)\cdot(x-r)^{2m}$, *com* $m \in I\!N^*$ *e* $r \in I\!R$, *e onde* $g(x)$ *é um polinômio do qual* r *não é raiz. Nessas condições,* $P(r) = 0$, *e para* $x \neq r$, $P(x)$ *terá a mesma distribuição de sinais que* $g(x)$.

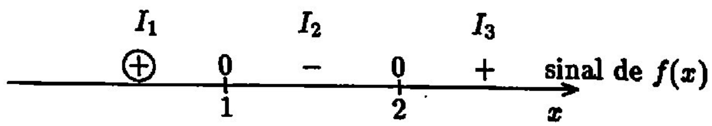
Isto é, para obter a distribuição de sinais de $P(x)$, *com* $x \neq r$, *pode-se omitir o fator* $(x-r)^{2m}$ *e estudar a distribuição de sinal de* $g(x)$.

Exemplo 3

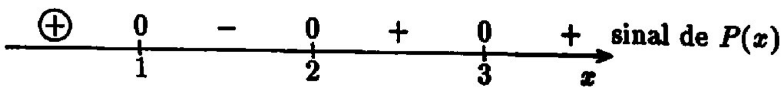
Resolver em $I\!R$ a inequação: $(x-1)(x-2)(x-3)^6 \leq 0$.

Resolução:

Estudemos a distribuição do sinal de $f(x) = (x-1)(x-2)$, obtido pela omissão de $(x-3)^6$. Repare-se que $f(0) > 0$ (logo, $f(x)$ é positivo em I_1).



A distribuição de sinal de $P(x) = f(x)\cdot(x-3)^6$ é:



O conjunto solução da inequação dada é

$$S = \{x \in I\!R \mid (1 \leq x \leq 2) \vee x = 3\}.$$

Seja $P(x) = g(x)\cdot(x-r)^{2m+1}$, onde $m \in I\!N^*$, $r \in I\!R$ e $g(x)$ é um polinômio do qual r não seja raiz. Pode-se dizer que r é uma raiz de multiplicidade ímpar de $P(x)$.

Note-se que $P(x) = g(x)\cdot(x-r)(x-r)^{2m}$ e, conseqüentemente, $P(x)$ tem a mesma distribuição de sinais que $g(x)\cdot(x-r)$.

Finalmente, seja $P(x) = f(x)\cdot(ax^2+bx+c)$, onde $a > 0$, $b^2 - 4ac < 0$ e $f(x)$ é um polinômio como foi descrito no § 2.

Nessas condições, ax^2+bx+c é positivo para todo $x \in I\!R$ e, conseqüentemente, $P(x)$ terá a mesma distribuição de sinais que

$f(x)$. Portanto, para estudar o sinal de $P(x)$, pode-se simplesmente *omitir* o fator ax^2+bx+c.

7. Inequações-quociente

É sabido que a *regra dos sinais* para a divisão é a mesma que a *regra dos sinais* para a multiplicação. Por isso, o método aqui exposto para resolver inequações-produto pode ser aplicado para resolver inequações-quociente do tipo

$$\frac{f(x)}{g(x)} < 0, \qquad \text{ou} \qquad \frac{f(x)}{g(x)} > 0 \qquad \text{etc.,}$$

onde $f(x)$ e $g(x)$ são polinômios.

Exemplo 4

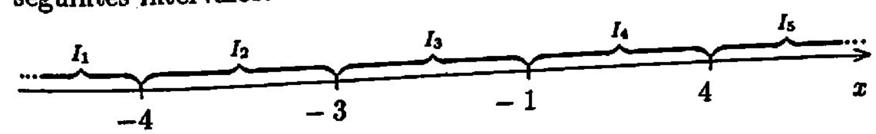
Resolver em $I\!R$ a inequação: $\dfrac{2(-15-5x)(x+1)}{x^2-16} \geq 0$.

Resolução:

A inequação dada pode ser expressa na forma

$$\frac{-10(x+3)(x+1)}{(x-4)(x+4)} \geq 0, \quad \text{que é da forma} \quad \frac{f(x)}{g(x)} \geq 0.$$

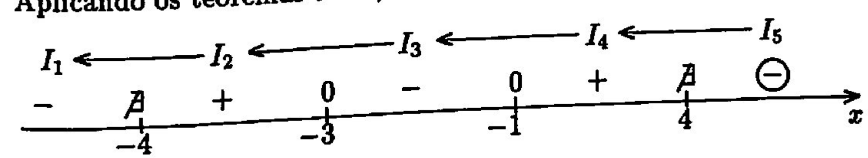
As raízes -3 e -1 de $f(x)$, 4 e -4 de $g(x)$ determinam os seguintes intervalos:



Atribuindo a x o valor 10, temos

$$\frac{-10(10+3)(10+1)}{(10-4)(10+4)} < 0 \quad \text{(o quociente é negativo em } I_5\text{).}$$

Aplicando os teoremas 1 e 2, temos a seguinte distribuição de sinais:



Segue que o conjunto solução é:

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid (-4 < x \leq -3) \vee (-1 \leq x < 4)\}.$$

Conclusão

A resolução de toda inequação-produto, ou inequação-quociente, (de polinômios a coeficientes reais) recai na resolução de uma inequação $f(x) < 0$ ou $f(x) \geq 0$, etc., onde $f(x)$ é um polinômio real com todas as suas raízes reais e simples.

Abram Bloch é uma figura quase lendária para milhares de estudantes que assistiram a suas inesquecíveis aulas no curso Anglo Vestibulares, de 1950 a 1964 (v. **RPM 10**, p. 21). Formado em Matemática e Física pela Universidade de São Paulo, imigrou para Israel em 1964. Em Haifa foi professor de Matemática na Escola Técnica do Technion, professor catedrático de Cálculo Infinitesimal e Didática da Matemática na Escola de Educação da Universidade de Haifa e professor de Matemática no Colégio Experimental Aberto, situado no kibutz Maagan Michael. Professor Bloch, já aposentado, vive em Israel mas freqüentemente visita o Brasil. Recentemente, numa palestra feita na Universidade de São Paulo, ao ser perguntado sobre quais seriam, a seu ver, as características de um bom professor de Matemática, respondeu: "ser gente, conhecer medianamente a matéria e saber comunicar".

Respostas dos probleminhas (p. 50)

1. 4 aves, 3 galhos.
2. João: pintor e barbeiro; José: jardineiro e motorista; Jacó: músico e contrabandista.
3. $(0!+0!+0!)! = 6$ $\quad (1+1+1)! = 6$ $\quad 2+2+2 = 6$

$3 \times 3 - 3 = 6$ $\quad 4+4-\sqrt{4} = 6$ $\quad (5 \div 5) + 5 = 6$

$6+6-6 = 6$ $\quad 7-(7 \div 7) = 6$ $\quad [\sqrt{8+(8 \div 8)}\,]! = 6$

$(9+9) \div \sqrt{9} = 6$ $\quad [\sqrt{10-(10 \div 10)}\,]! = 6$

PROVA DE MATEMÁTICA DO CONCURSO PÚBLICO PARA O MAGISTÉRIO DA PREFEITURA DA CIDADE DO RIO DE JANEIRO

Em 1992, a Fundação João Goulart preparou duas provas de Matemática para a seleção de Professores I e II.

A prova de Matemática para Professor I constou de 50 questões. Compareceram à prova 1.335 candidatos. Foram aprovados 283.

A prova para Professor II constou de 50 questões: 14 de Português, 12 de Matemática, 12 de Integração Social e 12 de Ciências. Compareceram à prova 25.186 candidatos. Foram aprovados 1.815.

Abaixo estão as 12 questões de Matemática da prova para Professor II. Será que nossos bons alunos do 1º grau e os do Magistério saberiam encontrar as soluções?

15. Os pontos $A(0,0)$, $B(3,4)$ e $C(4,3)$, representados num sistema de eixos ortogonais, são:

(a) pontos alinhados
(b) vértices de um triângulo retângulo
(c) vértices de um triângulo equilátero
(d) vértices de um triângulo isósceles
(e) vértices de um triângulo escaleno

16. João e um grupo de amigos gostam de se reunir para fazer jogos de adivinhação. Numa dessas reuniões, João pensa em um número de quatro algarismos distintos e informa ao grupo que esse número obedece às seguintes condições:

- não tem algarismo em comum com 3.658;
- tem três algarismos em comum com 6.194;
- tem dois algarismos em comum com 3.940. Nos dois números, esses algarismos ocupam as mesmas posições;
- tem um só algarismo em comum com 7.831, mas a posição do algarismo comum nos dois números é diferente.

Com essas informações, o grupo já sabe qual, dentre as alternativas a seguir, é a única correta com relação ao número escolhido por João:

(a) é um número divisível por 3
(b) é um número primo
(c) ele e 3.060 são primos entre si
(d) é um número par que não é múltiplo de 4
(e) tem apenas 42 dezenas

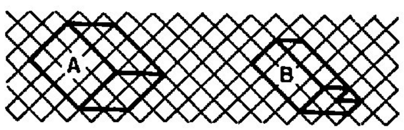
17. Antonio comprou um terreno retangular. Quando foi medir o terreno, para determinar a quantidade de arame necessária para cercá-lo, percebeu que havia esquecido a trena. Para não perder a viagem, Antonio usou um pedaço de barbante e mediu o comprimento e a largura do terreno, observando que a soma das duas medidas valia 25 vezes o comprimento do barbante.
Antonio comprou então 180 m de arame, o suficiente para construir uma cerca de 3 (três) fios, sem sobrar arame. O pedaço de barbante mede:

(a) 12 cm (b) 3,6 cm (c) 1,2 m (d) 36 cm (e) 2,4 m

18. A professora Júlia, para trabalhar sistema de numeração na sala de aula, simula um setor de empacotamento de uma fábrica de lápis. Para isso, pede aos alunos que adotem o seguinte procedimento: juntar todos os lápis que possuem, colocar cada conjunto de cinco lápis em um estojo, reunir cada conjunto de cinco estojos em um pacote e acondicionar cada conjunto de 5 pacotes em uma caixa.
Num certo dia, ao final do exercício de simulação, estavam formados uma caixa, 3 estojos, 2 pacotes e ainda sobraram 4 lápis.
O total de lápis embalados pelos alunos, nesse dia, é um número que, quando registrado na base decimal, contém:

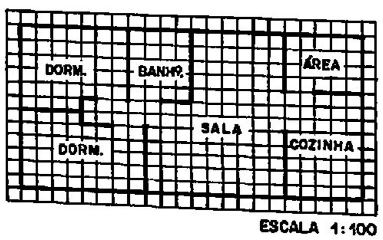
(a) 4 ordens
(b) 19 dezenas
(c) 123 dezenas
(d) 2 centenas
(e) 1.234 unidades

19. Observe os sólidos A e B representados ao lado. O volume a ser retirado do sólido A, para se obter o sólido B, é:



(a) a metade do volume do sólido A
(b) o dobro do volume do sólido B
(c) a terça parte do volume do sólido A
(d) o triplo do volume do sólido B
(e) a quarta parte do volume do sólido A

20. Paulo quer comprar um apartamento à vista. Observando o saldo bancário, verifica que possui Cr\$78.000.000,00 para a compra.
Sem perder tempo, pega o jornal para escolher sua futura casa, e se interessa por uma cuja planta está assim anunciada:
Neste desenho, cada quadrícula mede 0,5 cm × 0,5 cm.



O preço anunciado é de Cr\$1.250.000,00 o m². Paulo pode então concluir que:

(a) tem a quantia exata para a compra
(b) tem que conseguir ainda Cr\$4.500.000,00 para fazer a compra
(c) terá, após a compra, uma sobra de Cr\$4.500.000,00
(d) falta, para fazer a compra, o dobro da quantia que ele possui
(e) tem o suficiente para comprar, ao menos, duas casas idênticas à do anúncio e de mesmo preço.

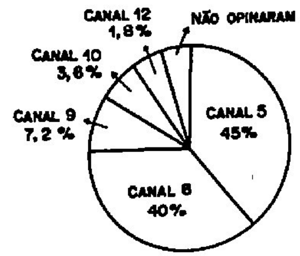
21. O número natural A ao ser multiplicado por $\frac{2}{3}$ fica alterado de 20 unidades. O número natural B ao ser dividido por $\frac{1}{5}$ fica alterado de 120 unidades. $A+B$ é igual a

(a) 230 (b) 140 (c) 130 (d) 100 (e) 90

22. Rafael, organizando sua coleção de selos, observa que, ao contá-los de dez em dez, sobram quatro selos; o mesmo acontece quando conta de oito em oito e, curiosamente, também sobram quatro selos quando ele os conta de doze em doze. Para que a coleção de Rafael tenha 180 selos, ainda faltam:

(a) 56 (b) 60 (c) 120 (d) 124 (e) 146

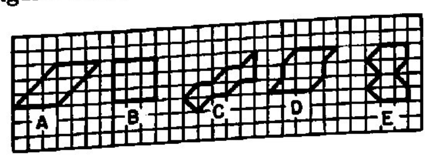
23. Em uma pequena cidade do interior, onde se consegue, sem nenhum aparelho especial, sintonizar 5 canais de televisão, existem 12 mil pessoas que assistem regularmente a esse meio de comunicação.
Uma pesquisa de opinião fez, a um sexto dessas pessoas, a seguinte pergunta: "– Qual o canal de televião que você prefere?"



O resultado da pesquisa pode ser representado pelo gráfico acima. O número de pessoas que não opinaram é:

(a) 24 (b) 48 (c) 288 (d) 480 (e) 2.000

24. Observe as figuras abaixo:



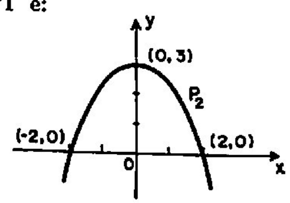
Considere as afirmações:
I) As figuras A, C e E têm o mesmo perímetro
II) As figuras A, B e D têm áreas equivalentes
III) As figuras A, B e E têm áreas equivalentes e mesmo perímetro

Associando-se V, quando verdadeira, ou F, quando falsa, às afirmações I), II) e III), nessa ordem, temos

(a) FFF (b) VVF (c) FFV (d) VVV (e) FVF

25. Uma empresa que possui carros-pipas, todos com $9.000\,\ell$ de capacidade, foi chamada para encher uma cisterna de dimensões $3,0\,\text{m} \times 4,0\,\text{m} \times 1,4\,\text{m}$. Para a realização dessa tarefa, podemos concluir que a capacidade de:
(a) 1 carro-pipa é suficiente para encher totalmente a cisterna, sem sobrar água
(b) 1 carro-pipa é maior do que a capacidade da cisterna
(c) 2 carros-pipas é insuficiente para encher totalmente a cisterna
(d) 2 carros-pipas ultrapassa em $1.200\,\ell$ a capacidade da cisterna
(e) 1 carro-pipa mais $1.200\,\ell$ é suficiente para encher totalmente a cisterna

26. $P1$ é uma parábola que tem as mesma raízes que a parábola $P2$, representada na figura. O vértice de $P1$ é simétrico, em relação ao eixo Ox, ao ponto de máximo de $P2$. A equação da parábola $P1$ é:
(a) $3x^2 - 4y + 12 = 0$
(b) $3x^2 + 4y + 12 = 0$
(c) $3x^2 - 4y - 12 = 0$
(d) $-3x^2 - 4y - 12 = 0$
(e) $-3x^2 - 4y + 12 = 0$



RESPOSTAS

15. D 16. D 17. C 18. B 19. A 20. B 21. E 22. A 23. B 24. B 25. D 26. C.

O que vai por aí

CENTRO DE APERFEIÇOAMENTO DO ENSINO DA MATEMÁTICA (CAEM)

1. DIA DA COMPUTAÇÃO: Curso de 8 horas destinado a professores e alunos da 3ª série do 2º grau. Datas previstas: 07/08; 28/08; 18/09; 02/10;; 23/10 e 6/11.
2. CONFERÊNCIAS (14 horas, IME/USP):
   A arte de pensar. *Maria Ignez de Souza Vieira Diniz*; 27/08;
   O livro didático de Matemática. *Eliane Reame de Souza*; 20/11.
3. PALESTRAS SOBRE COMPUTAÇÃO: sob a responsabilidade do Prof. *Valdemar W. Setzer*. São realizadas em escolas do 2º grau, a pedido da escola.
4. CURSOS: no 2º semestre serão oferecidos dois cursos, de 15 horas cada, para professores de Matemática.
5. OFICINAS: haverá 12 oficinas, de 3 horas cada, para professores de Matemática.

Informações: CAEM-IME/USP tel. 813-9499 R.6160.

Problemas

Flávio Wagner Rodrigues
IME-USP

Soluções e Sugestões:
RPM – Problemas
Caixa Postal 20570
01452-990 São Paulo, SP

Problemas

102. Seja $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ um polinômio com coeficientes inteiros. Suponha que a equação $P(x) = 0$ tem três raízes inteiras distintas. Mostre que a equação $P(x) - 1 = 0$ não admite nenhuma raiz inteira.

103. Um múltiplo de 17 quando representado na base 2 tem exatamente 3 dígitos iguais a 1. Qual é o número mínimo de zeros que essa representação deverá conter? (Olimpíadas Colombianas).

104. Determinar o raio do semicírculo no qual está inscrito um hexágono cujos seis lados são iguais e têm por comprimento $a > 0$.
(Enviado por *Pérsio Augusto de Oliveira*, São Paulo, SP.)

105. Sabendo-se que a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ satisfaz a condição $f(n+1) > f(f(n))$ para todo $n \in \mathbb{N}$, provar que $f(n) = n$.
(Proposto por *Ângelo Barone Netto*, São Paulo, SP.)

...e probleminhas

1. Marly diverte-se observando os passarinhos voando em torno de um arbusto. Ela notou que, quando uma ave fica em cada galho, uma das aves fica sem galho, e quando ficam duas aves em cada galho, um dos galhos fica sem ave. Quantos galhos há no arbusto? e quantas aves?

(*Adaptado da revista* Engenheiro Moderno, *1965. Enviado por* Valdir Rodrigues, *SP).*

2. Havia 3 homens, João, Jacó e José, cada um dos quais tinha duas ocupações. Estas os classificam, cada um em duas delas, como: motorista, contrabandista, músico, pintor, jardineiro e barbeiro. Dos fatos abaixo, determinar as duas ocupações de cada um deles:
   (1) O motorista ofendeu o músico ao rir de seus cabelos longos.
   (2) Tanto o músico quanto o jardineiro costumavam ir pescar com João.
   (3) O pintor comprou uma garrafa de gim do contrabandista.
   (4) O motorista namorava a irmã do pintor.
   (5) Jacó devia ao jardineiro Cr$500.000,00.
   (6) José ganhou tanto de Jacó como do pintor no jogo de malha.

   (*Do livro* Matemática e Imaginação *de E. Kasner e J. Newman; Zahar Editores, RJ. Enviado por* Valdir Rodrigues, *SP).*

3. Usando os sinais $+ \; - \; \times \; \div \; \sqrt{\ } \; (\;) \; !$, verificar as seguintes igualdades

0 0 0 = 6	4 4 4 = 6	8 8 8 = 6
1 1 1 = 6	5 5 5 = 6	9 9 9 = 6
2 2 2 = 6	6 6 6 = 6	10 10 10 = 6
3 3 3 = 6	7 7 7 = 6	

(*Enviado por* José Augusto de Oliveira Netto, *BR).*

(*V. respostas na p. 44.)*

Soluções dos problemas propostos na RPM 21, 2º quadrimestre, 1992

94. Provar que para todo x real, com $0 \le x \le \pi/2$, tem-se $x\cos x < 0,71$.

1ª solução:

Como $x\cos x = x\,\text{sen}\,(\frac{\pi}{2} - x) \le x(\frac{\pi}{2} - x)$ e $y = -x^2 + \frac{\pi}{2}x$ atinge o máximo em $x = \frac{\pi}{4}$, temos $x\cos x \le (\frac{\pi}{4})^2 < 0,71$ ∎

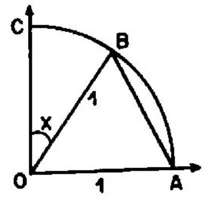
(*Solução enviada por* Roberto K. Kawakami, *SP.)*

2ª solução:

Como a área do triângulo OAB é menor do que a área do setor OAB, isto é,

$$\frac{1}{2}\,\text{sen}\,(\frac{\pi}{2} - x) < \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - x),$$

temos $\quad x + \cos x < \frac{\pi}{2}$.



Lembrando que a média geométrica de dois números positivos é menor ou igual à sua média aritmética, obtemos:

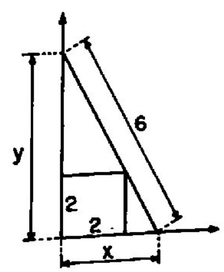
$$\sqrt{x\cos x} \le \frac{x + \cos x}{2} < \frac{\pi}{4} \quad \text{e, portanto,} \quad x\cos x < \frac{\pi^2}{16} < 0,71 \blacksquare$$

(*Solução enviada por* Marco Antonio Manetta, *SP.)*

95. Uma escada de $6\,m$ de altura está encostada contra uma parede que apresenta um degrau de $2\,m$ de altura por $2\,m$ de largura, como mostra a figura. Quais as alturas máxima e mínima que o extremo superior da escada pode alcançar na parede?

Solução:

Chamaremos a altura máxima de y e a mínima de x.



De $\quad x^2 + y^2 = 36 \quad$ e $\quad \frac{y}{x} = \frac{2}{x-2}$,

temos: $\quad (xy)^2 - 8xy - 144 = 0. \quad$ Logo,

$$\begin{cases} xy = 4 + 4\sqrt{10} \\ x + y = \frac{yx}{2} = 2 + 2\sqrt{10}, \end{cases}$$

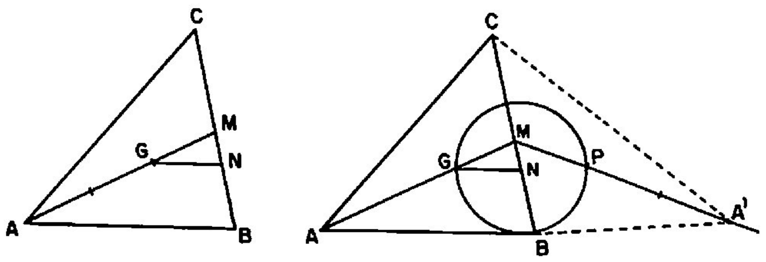
que nos leva à solução:

$$\begin{cases} y = 1 + \sqrt{10} + \sqrt{7 - 2\sqrt{10}} = 1 + \sqrt{10} + \sqrt{(\sqrt{5} - \sqrt{2})^2} = 1 + \sqrt{10} + \sqrt{5} - \sqrt{2} \\ x = 1 + \sqrt{10} - \sqrt{7 - 2\sqrt{10}} = 1 + \sqrt{10} - \sqrt{5} + \sqrt{2} \blacksquare \end{cases}$$

(*Resumo de soluções enviadas pelos leitores.)*

96. Fixados dois pontos B e C, determinar o lugar geométrico dos baricentros dos triângulos ABC com lado AB de comprimento constante.

Solução:



Seja G o baricentro, ponto de encontro das medianas. Traçamos $GN \parallel AB$. Temos:

$$\frac{AB}{GN} = \frac{AM}{GM} = 3, \qquad \text{donde,} \qquad GN = \frac{AB}{3}.$$

Variando o ponto A, com AB constante, o ponto N não muda e, portanto, os baricentros pertencem à circunferência de centro N e raio $AB/3$.

Por outro lado, cada ponto P dessa circunferência, exceto os da reta suporte BC, é baricentro de algum triângulo com lado BC: basta tomar A' na semi-reta suporte de MP, com origem M, de modo que $A'P = 2\,MP$ ∎

(*Resumo de soluções enviadas pelos leitores.*)

97. Uma urna contém 10 bolas, sendo 5 brancas, 3 azuis e 2 pretas. As bolas vão ser retiradas ao acaso, sem reposição. Determine a probabilidade de que
    (a) a última bola branca saia da urna na k-ésima retirada $(5 \le k \le 10)$;
    (b) a cor azul seja a primeira a acabar.

Solução:

(a) Número de casos possíveis $= \binom{10}{5} \cdot \binom{5}{3} = 2520.$

Número de casos favoráveis:

$$\binom{5}{3} = 10 \quad \text{para} \quad k=5 \qquad\qquad \binom{7}{4}\cdot\binom{5}{3} = 350 \quad \text{para} \quad k=8$$

$$\binom{5}{4}\cdot\binom{5}{3} = 50 \quad \text{para} \quad k=6 \qquad\qquad \binom{8}{4}\cdot\binom{5}{3} = 700 \quad \text{para} \quad k=9$$

$$\binom{6}{4}\cdot\binom{5}{3} = 150 \quad \text{para} \quad k=7 \qquad\qquad \binom{9}{4}\cdot\binom{5}{3} = 1260 \quad \text{para} \quad k=10.$$

Logo a probabilidade de que a última bola branca saia na k-ésima retirada $(5 \le k \le 10)$ é dada por $\frac{1}{2520}\cdot\binom{k-1}{4}\cdot\binom{5}{3}$ ∎

(b) Número de casos possíveis $= \binom{10}{5}\cdot\binom{5}{3} = 2520.$

O número de casos favoráveis será contado supondo que a cor azul acabe na:

$$3^{\text{a}} \text{ retirada: } \binom{7}{5} = 21$$

$$4^{\text{a}} \text{ retirada: } \binom{3}{2}\cdot\binom{7}{5} = 3\cdot 21 = 63$$

$$5^{\text{a}} \text{ retirada: } \binom{4}{2}\cdot\left[\binom{7}{5} - 1\right] = 6\cdot 20 = 120$$

$$6^{\text{a}} \text{ retirada: } \binom{5}{2}\cdot\left[\binom{7}{5} - \binom{3}{2}\right] = 10\cdot 18 = 180$$

$$7^{\text{a}} \text{ retirada: } \binom{6}{2}\cdot\left[\binom{7}{5} - \binom{4}{2}\right] = 15\cdot 15 = 225$$

$$8^{\text{a}} \text{ retirada: } \binom{7}{2}\cdot\left[\binom{7}{5} - \binom{5}{2} - 1\right] = 21\cdot 10 = 210.$$

Logo, a probabilidade de que a cor azul acabe primeiro é:

$$\frac{21+63+120+180+225+210}{2520} = \frac{819}{2520} = \frac{13}{40}$$ ∎

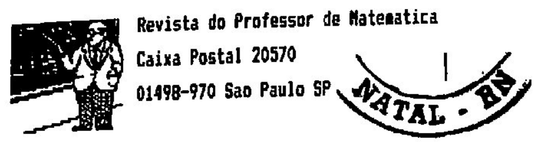
(*Resumo de soluções enviadas pelos leitores.*)

Relação dos leitores que enviaram soluções dos problemas 94 a 97 da RPM 21

Alceu de Amorim Ramos (SP) - 95
Amadeu C. de Almeida (RJ) - 95-96
Antonio Matos dos Santos (PR) - 95-96
Carlos Alberto S. Victor (RJ) - 95-96
Carlos Nely C. Oliveira (SP) - 95
Claudio Aguinaldo Buzzi (SP) - 95-96
Edson Roberto Abe (SP) - 95-96
Francisco C. Simão Jr. (MG) 95
Geraldo Perlino Junior (SP) - 95-96
João Christiano de S. Ferreira (RJ) - 95
Laur Scalzaretto (SP) - 95
Levi Brasilino da Silva (PE) - 95-96
Luis Veloso (MG) - 95
Marco A. Manetta (SP) - 94-95-96-97
Mauro Lalli (SP) - 96
Nelson Tunala (RJ) - 95-96-97
Paulo Roberto Mendonça (SP) - 95
Regis Sant'Ana (PR) - 95-96-97
Ricardo Teixeira Gonçalves (SP) - 95-96
Roberto F. Silvestre (MG) - 95-96-97
Roberto K. Kawakami (SP) - 94-95-96
Tsunediro Takahashi (SP) - 95
Wilson Massaro (SP) -95-96

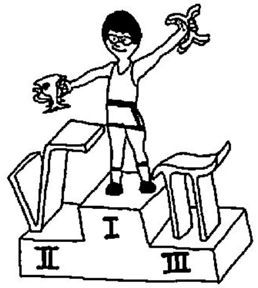
Observação: Não levamos em conta as soluções não elementares do problema 94.

Muitas cartas de Natal, RN, vêm com a etiqueta ao lado. Quem é o autor da feliz idéia?



Olimpíadas

Elio Mega
Etapa, SP



Correspondência:
RPM – Olimpíadas
Caixa Postal 20570
01452-990 São Paulo, SP

RENDIMENTO ESCOLAR E OLIMPÍADAS

Alguns professores do primeiro e segundo grau (às vezes, do terceiro) costumam expressar o temor de que a preocupação do aluno com a competição nas Olimpíadas de Matemática possa perturbar o seu rendimento escolar e, o que é pior, possa pesar negativamente na sua formação. Alegam estes professores que as provas são muito difíceis, fora da realidade escolar, provocando nos candidatos frustrações ou, ao contrário, desvio pernicioso dos seus interesses por uma única matéria, em detrimento das outras. Argumentam, por fim, que as duas situações prejudicam a formação do aluno para a vida.

Temos visto, ao longo dos vários anos dedicados às Olimpíadas, que as coisas não ocorrem necessariamente dessa forma. Há muitas discussões teóricas sobre o assunto, mas nossa experiência sugere que:

a) as frustrações ocorrem, mas muitas vezes têm sido fator de estímulo positivo. Se estamos preocupados com a formação do estudante para a vida, não podemos fazer de conta que fracassos não existem. A vida é assim: se não soubermos lidar com as frustrações, não estaremos bem preparados para ela. O importante é tentarmos dar a volta por cima e recomeçarmos sempre com a proposta de fazer melhor que antes.

Em nossas sessões de preparação para as Olimpíadas estamos sempre enfatizando aos estudantes que o nosso êxito depende muito mais do nosso esforço do que das famosas "faculdades inatas". Muitos deles não chegam a ser premiados nas competições, mas reconhecem que o esforço despendido não foi em vão. Conhecemos vários deles que estão nas melhores universidades e faculdades do país ou do exterior, eventualmente em áreas inesperadas: Medicina, Jornalismo, Arquitetura, etc.

b) os alunos que dedicaram boa parte do seu tempo preparando-se para as Olimpíadas com reconhecido êxito são jovens perfeitamente integrados à vida e dotados de múltiplos interesses. Há uma visível correlação entre o sucesso com a Matemática e o interesse por outras disciplinas e atividades.

São fatos indiscutíveis o crescente papel da Matemática nas interdisciplinas e a sua presença em nossas vidas.

Por isso, achamos interessante transcrever neste número trechos de uma entrevista com o Eduardo Tengan, primeiro colocado da área de Exatas da Fuvest deste ano. Como se sabe, só com Matemática e Física não dá para obter o brilhante resultado alcançado pelo Eduardo. Importante: o Eduardo nega peremptoriamente que seja um gênio, seja lá o que isso for.

Pergunta: *Qual o seu nome completo, sua idade e as escolas que cursou?*

Eduardo : Meu nome é Eduardo Tengan, tenho 18 anos e fiz o primeiro grau no Colégio Magistra, o segundo grau na Escola Técnica Federal e cursinho no Etapa.

Pergunta: *Quais foram os resultados que você obteve no vestibular?*

Eduardo : Entrei em Mecatrônica na USP, Eletrônica no ITA e Engenharia de Computação na UNICAMP.

Pergunta: *Quais foram suas notas na segunda fase da FUVEST?*

Eduardo : 9,2 de Matemática; 10,0 de Física; 9,6 de Química; 8,4 de Biologia; 9,2 de História; 9,0 de Redação; 6,0 de Geografia; 6,8 de Inglês.

Pergunta: *De quais competições de Matemática você participou? Que resultados obteve?*

Eduardo : Participei da Olimpíada Estadual de Matemática quando estava na 8ª série, pegando 6º lugar. Participei, quando fazia a ETF, de todos os Desafios de Matemática do 2º Grau do Etapa, só que não me recordo das classificações, mas sempre fui premiado. Aliás, o primeiro destes prêmios foi o livro de Olimpíadas da SBM, que realmente me despertou para as Olimpíadas. Participei da Olimpíada Brasileira de Matemática em 1991, pegando o 4º lugar, e em 1992, pegando o 2º lugar. Em 1992, fui para a Olimpíada Ibero-americana, em Caracas, e peguei medalha de Prata (*o Tengan fez 54 pontos; se tivesse feito 55, teria conseguido a medalha de Ouro*).

Pergunta: *O que você achou da experiência da Ibero-americana?*

Eduardo : Achei muito bom. O pessoal da Venezuela está de parabéns. Gostei bastante da experiência. O interessante lá era ver como o pessoal de outros países encara a Matemática. Ouvi dizer, por exemplo, que na Colômbia chega a haver 15 000 participantes na olimpíada nacional. Ao contrário do que acontece no Brasil, lá o pessoal leva a sério a Matemática. O ambiente era legal, fomos visitar vários lugares. Meu espanhol é que era ruim e cheguei até a conversar em inglês com alguns amigos que fiz. O Brasil conseguiu o melhor resultado na soma de todos os pontos (*participaram 14 países, entre eles Espanha, Argentina, Cuba, Colômbia, México*).

Pergunta: *E agora, o que você anda fazendo?*

Eduardo : Bom, estou fazendo Mecatrônica na Poli e por enquanto não está muito duro. Estou aproveitando para estudar Matemática para a Olimpíada Ibero-americana que será no México, em setembro.

Pergunta: *E como você tem se preparado?*

Eduardo : Você sabe, eu tenho participado da preparação desde o ano retrasado, quando eu comecei bem cru. Na primeira aula, fiquei assustado, pois havia um monte de coisas de Geometria que eu nunca tinha visto. Gostei muito da maneira como os problemas eram resolvidos, os teoremas demonstrados. Comecei a tomar gosto pela coisa e fui estudando (*em São Paulo é feita uma preparação para a Olimpíada Brasileira, às sextas-feiras, para os estudantes interessados. A preparação começa em abril e se estende até outubro. Informações à Rua Vergueiro, 1987, no Etapa*). Atualmente tenho participado da preparação para a prova de seleção que irá definir a equipe para a Olimpíada Ibero-americana. Tenho consultado livros que o pessoal da preparação indicou; a biblioteca do IME tem vários desses livros. Quando necessário, tiro xerox de outros materiais, específicos de Olimpíadas. Mas as listas enviadas pela comissão ou fornecidas na preparação são fundamentais.

Pergunta: *E como está sua bolsa de Iniciação Científica? (Os estudantes premiados na OBM são contemplados com bolsas de Iniciação Científica, durante seus cursos de graduação.)*

Eduardo : Estou correndo atrás disso. Amanhã mesmo vou conversar com o Prof. Paulo Leite.

Pergunta: *O que você acha das Olimpíadas?*

Eduardo : Acho que é muito válida a participação nas Olimpíadas. Você aprende técnicas novas, você tem uma nova visão da Matemática. São coisas que não têm só utilidade na Matemática, você aprende a ter um método de como resolver problemas que podem ser aplicados por exemplo em Física. Acho que esta Matemática elementar é o ponto de partida. Quem não tem uma boa base desta Matemática não pode se desenvolver em outras coisas. Algumas pessoas dizem que participar de Olimpíadas atrapalha o vestibular; pra mim isso é papo furado. Pelo contrário, acho que ajuda.

Pergunta: *Por que será que o número de mulheres participantes de Olimpíadas de Matemática costuma ser bem menor que o de homens? O que você acha?*

Eduardo : Sinceramente, não vejo nenhuma razão aparente para isso. Não tenho nenhuma teoria para explicar isso. Acho que o interesse delas é menor, sei lá. Por quê, não sei.

Pergunta: *Você acredita em gênios?*

Eduardo : Acho que não existe esse negócio de gênios. Você tem que se esforçar mesmo. Se você for pensar assim, vai pensar da seguinte forma: ah!, não sou nenhum superdotado, então não vou estudar porque não vou chegar lá. Não é bem assim: se você realmente quer, você tem que se esforçar, tem que trabalhar. Não adianta falar eu quero, eu quero, eu quero, você tem que realmente se esforçar. Pode ser que os resultados não sejam 100%, mas você pode atingir níveis relativamente altos.

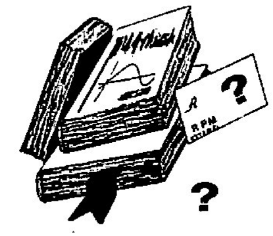
AMIGOS DA RPM

No decorrer do segundo semestre, à guisa de recibo e agradecimento, aos AMIGOS 93 será enviado pelo correio o Caderno 4 da RPM.

O leitor poderá ajudar a RPM tornando-se um AMIGO 93. Veja como proceder na primeira contracapa desta Revista.

O leitor pergunta

Vera Helena Giusti de Souza
IME-USP



Envie suas perguntas para
RPM – O leitor pergunta
Caixa Postal 20570
01452-990 São Paulo, SP

– Um leitor de Fortaleza nos propôs o seguinte problema:

Transformar $\sqrt[3]{10+\sqrt{108}}$ *numa soma do tipo* $u \pm \sqrt{v}$, *com* u *e* v *naturais. Será que isso é possível?*

RPM : Vamos olhar para $\underbrace{\sqrt[3]{10+\sqrt{108}}}_{a} + \underbrace{\sqrt[3]{10-\sqrt{108}}}_{b} = x.$

Usando a igualdade $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab\cdot(a+b)$, temos:

$$x^3 = 10 + 10 + 3\sqrt[3]{10+\sqrt{108}}\cdot\sqrt[3]{10-\sqrt{108}}\cdot x, \quad \text{ou,} \quad x^3 = 20 - 6\cdot x,$$

isto é, x é raiz de $x^3 + 6x - 20 = 0$; mas a única raiz real desta equação é 2; portanto,

$$\sqrt[3]{10+\sqrt{108}} + \sqrt[3]{10-\sqrt{108}} = 2. \tag{1}$$

Por outro lado,

$$\sqrt[3]{10+\sqrt{108}}\cdot\sqrt[3]{10-\sqrt{108}} = -2. \tag{2}$$

As equações (1) e (2) fornecem o sistema:

$$\begin{cases} a+b &= 2 \\ a\cdot b &= -2 \end{cases} \quad \text{e obtemos } a = 1+\sqrt{3} \text{ e } b = 1-\sqrt{3}, \text{ isto é,}$$

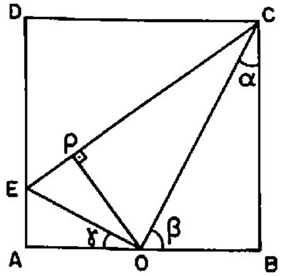
$$\sqrt[3]{10+\sqrt{108}} = 1+\sqrt{3}.\blacksquare$$

– Um leitor do Rio de Janeiro (que não está no cadastro da RPM, não mandou endereço e não colocou remetente no envelope – haja distração!) nos enviou o seguinte problema:

Num quadrado $ABCD$, *tomamos um ponto* E *sobre* AD, *tal que* $AE = AD/4$, *e o ponto* O, *médio de* AB. *Sendo* OP *perpendicular a* CE, *prove que* $OP^2 = EP\cdot CP$.

RPM: Sejam $\alpha = \widehat{OCB}$, $\beta = \widehat{BOC}$, $\gamma = \widehat{AOE}$ e $AB = a$. Temos

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \qquad (*)$$



Também

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{AE}{AO} = \frac{a/4}{a/2} = \frac{1}{2} \quad \text{e}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{OB}{OC} = \frac{a/2}{a} = \frac{1}{2}.$$

Como ambos os ângulos são agudos, temos $\alpha = \gamma$.

Substituindo em $(*)$, temos: $\gamma + \beta = \pi/2$. Portanto, $\widehat{EOC} = \pi/2$ e o triângulo EOC é retângulo em O. Daí, $OP^2 = EP \cdot PC$ ∎

– Um leitor de São Paulo quer saber o porquê da palavra *corolário*.

RPM: *Corolário*, segundo o *Aurélio* é uma proposição que imediatamente se deduz de outra demonstrada. A palavra vem do latim, *corollarium*, que significa pequena coroa ou grinalda (que se dava aos atores como prêmio); gratificação (*Dicionário Escolar Latino-Português, MEC)*.

A **ORGANIZAÇÃO dos ESTADOS IBERO-AMERICANOS para a EDUCAÇÃO, a CIÊNCIA e a CULTURA** está fazendo um levantamento para um banco de dados sobre recursos para o ensino de Matemática e Ciências na América Latina.

Foi pedida a colaboração da RPM, que, por sua vez, faz um apelo a seus leitores no sentido de obter informações que se enquadrem em um ou mais dos seguintes itens:

1. **BIBLIOTECAS:** Bibliotecas em Centros de Ensino Secundário e/ou Bibliotecas destinadas ao uso de estudantes do Secundário. Enviar nomes e endereços.
2. **CENTROS DE INVESTIGAÇÃO:** Centros de Investigação em Matemática e Ciências e suas didáticas. Enviar nomes completos e endereços. (A RPM obteve do Ministério da Educação uma relação de todas as instituições do 3º grau que oferecem cursos nas áreas acima.) Haverá outros Centros de Investigação?
3. **PESSOAL INVESTIGADOR:** Pessoal investigador de alta qualificação em Matemática e Ciência e em suas didáticas. Endereço, telefone e fax. Indicar a especialidade de cada um.
4. **PESSOAL PERMANENTE:** Pessoal permanente lotado no Ministério da Educação, com especialidade em Ciências e Matemática. Endereço, telefone e fax.
5. **RESPONSÁVEL POR EQUIPAMENTO:** Divisões ligadas ao Ministério da Educação, responsáveis por equipamento para o ensino de Matemática e Ciências, no ensino secundário.
6. **PUBLICAÇÕES:** Publicações periódicas em Matemática e Ciências e suas didáticas. Incluir: (1) Nome da publicação; (2) Ano de fundação; (3) Editor; (4) Diretor; (5) Endereço; (6) Telefone; (7) Fax: (8) Tiragem; (9) Periodicidade; (10) Tipo de distribuição. Anexar, se possível, algum exemplar.

As informações devem ser enviadas para a RPM – OEI, Caixa Postal 20570, CEP 01452-990 São Paulo, SP.

Cartas do leitor

Correspondência desta seção
envie para
RPM – Cartas do leitor
Caixa Postal 20570
01452-990 São Paulo, SP

• O ovo ou a galinha?

José Carlos Putnoki, (o Jota), SP, telefonou para um editor da RPM, dizendo que havia ficado muito surpreso ao ver, na RPM 21, a demonstração do Teorema de Tales, usando áreas. Ele, como muitos outros professores, sabia que o Teorema de Tales era um teorema "delicado" e não podia acreditar que houvesse uma demonstração tão simples. Examinando a demonstração, logo encontrou o "erro": no cálculo da área do triângulo $AB'C'$, o autor usava como base, uma vez, o lado AB' e, outra vez, o lado AC'. Mas que a área de um triângulo independe do lado considerado decorre da semelhança de triângulos e, portanto, do Teorema de Tales.

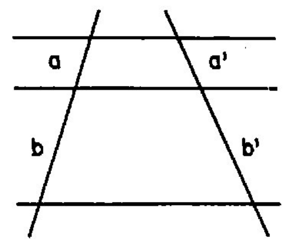
Conclusão: a demonstração usava a tese. Estava "furada".

Poucos dias depois, Jota telefonou novamente. Disse que após ter descoberto o "erro" ainda ficara insatisfeito. A RPM deixaria passar um erro desses?

Resolveu consultar alguns livros de Geometria (Euclides, Hadamard, Moise (o Advanced)) e logo viu que há outras maneiras de demonstrar que a área de um triângulo é o semiproduto de qualquer lado pela respectiva altura, sem usar semelhança, ou seja, Tales. Observou, porém, que todas as demonstrações decorriam de resultados anteriores e que, em algum desses resultados, sempre aparecia o problema "delicado" dos segmentos incomensuráveis.

Tendo-se convencido de que a demonstração feita na RPM estava correta, restou uma reclamação: A RPM devia ter alertado o leitor que as coisas não eram tão simples assim: o problema "delicado" apenas tinha sido empurrado para outro lugar.

RPM: Com a palavra o autor do artigo, E. Wagner:



Jota tem razão. Na construção da Geometria Plana, em algum lugar há um nó. Em algum lugar precisamos demonstrar que uma afirmativa válida para números naturais vale também para reais. Nos livros antigos esta dificuldade aparecia, pela primeira vez, justamente no Teorema de Tales. Provar que $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ é fácil quando supomos que a e b são comensuráveis, ou seja, quando a e b podem ser medidos por números naturais, com uma unidade convenientemente escolhida. Porém, quando a e b são reais quaisquer, a situação se complica.

Este é o nó a que me refiro acima. A existência de algum nó desse tipo na construção da Geometria Plana é inevitável. Felizmente, podemos mudar de lugar essa dificuldade.

Se demonstrarmos, por exemplo, o seguinte teorema:

Para todo real positivo a, *a área de um quadrado de lado* a *é* a^2,

toda a Geometria pode ser construída sem necessidade de nenhuma outra "passagem ao limite". Repare que é muito fácil provar (e nas escolas não se costuma ir além) que a área de um quadrado de lado a é a^2, quando a é racional. Entretanto, não é claro que a área de um quadrado de lado $\sqrt[3]{2}$ seja $\sqrt[3]{4}$.

Outro teorema que resolve todos os inconvenientes é o seguinte:

Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é crescente e* $f(n \cdot x) = n \cdot f(x)$ *para todo natural* n, *então* $f(c \cdot x) = c \cdot f(x)$ *para todo real* c (RPM 9, *p. 27*).

Este teorema é realmente o âmago da questão. Acho, entretanto, que sua demonstração não tem cabimento nas turmas comuns do 2º grau. Não vejo inconveniente em adotar este resultado (como axioma), que na verdade é bastante intuitivo, pois, no fundo, define as grandezas proporcionais. A partir daí, podemos transitar em terreno sólido seja qual for o caminho que se resolva seguir.

Afirmações do tipo "B decorre obrigatoriamente de A" são perigosas. No nosso caso, basta ler *Medida e forma em Geometria* de Elon Lages Lima, pp. 18-20. A livre escolha da *base* do triângulo (ou paralelogramo) para o cálculo da sua área aparece muito antes do Teorema de Tales, ou melhor, da semelhança de triângulos. Existe ainda outra forma de mostrar que o produto base × altura é constante nos triângulos. Mostra-se que esse produto é o mesmo nos paralelogramos a partir da versão plana do Princípio de Cavalieri.

A demonstração do Teorema de Tales na RPM 21 não tem, portanto, nenhuma incoerência intrínseca. Ela é fácil, conveniente e boa, e sua coerência depende, é claro, das ferramentas construídas anteriormente pelo professor.

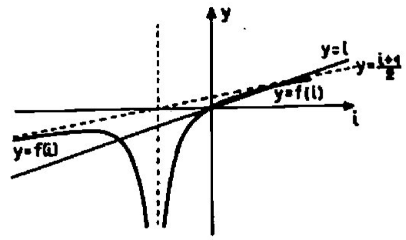
• Qual é o grau da equação $i = \frac{1}{2}[1 + i - (1 + i)^{-2}]$?

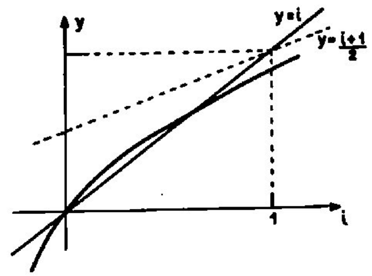
A RPM 22, p.15, afirma que esta equação é do 2º grau e um aluno do curso de graduação da UNICAMP escreve-nos, preocupado com "tão grave erro", afirmando que esta equação é do 3º grau pois se reduz a $i^3 + i^2 - i = 0$. Continua sua crítica, refutando o processo de resolução: "a menos de uma escolha cuidadosa do valor inicial, a raiz encontrada pelo método das aproximações sucessivas poderia ser uma raiz indesejável, a raiz nula, por exemplo, ou o processo poderia mesmo divergir".

RPM: Estritamente falando, define-se grau de uma equação quando ela é da forma $P(x) = 0$, em que P é um polinômio. Ora, a equação acima não está nesta forma, logo, qualquer referência a seu grau deve ser entendida num sentido amplo. O autor considerou $i - \frac{1}{2}[1+i-(1+i)^{-2}] = \frac{1}{2}(1+i)^{-2}(i^2+i-1)$, daí classificá-la como do 2º grau, pois sua resolução depende da solução de uma equação do 2º grau. Nosso missivista considerou $i - \frac{1}{2}[1 + i - (1 + i)^{-2}] = \frac{1}{2}(1 + i)^{-2}(i^3 + i^2 - i)$, e, portanto, do 3º grau.

E quanto à aplicação do método das aproximações sucessivas? Em geral, a aplicação deste método exige mesmo certos cuidados. No presente caso, basta que se tome a primeira aproximação positiva para que esteja garantida a convergência

para a única raiz estritamente positiva. Isto se deduz, por exemplo, do aspecto do gráfico das funções $y = i$ e $y = \frac{1}{2}[1 + i - (1 + i)^{-2}]$.





Com efeito, sendo $f(i) = \frac{1}{2}[1 + i - (1 + i)^{-2}]$, tem-se $f(i) > i$, entre 0 e a raiz positiva e $f(i) < i$, depois desta raiz. Isto já garante que a seqüência das aproximações sucessivas será crescente se a primeira aproximação tomada for positiva e menor do que a raiz e será decrescente se a primeira aproximação for maior do que a raiz que interessa.

• O leitor pergunta, a RPM responde, mas... não lê!

O colega *José Geraldo dos Santos Rodrigues*, de Cuiabá, MT, escreve-nos observando que o mesmo número em que a RPM afirma que a abreviação de quilômetro é km (RPM 22, p. 55) estampa na figura da primeira página uma distância escrita com K!

RPM: A página 55 está certa e os revisores – que somos nós mesmos – pedem desculpas pelo lapso. Nosso desenhista, a esta altura, já deve ter lido a RPM 22 e já deve ter aprendido que o certo é escrever 400 km.

Manoel H. C. Botelho, SP, estranhou o desenho da p. 55. Se fosse o de uma placa indicando velocidade máxima, ela diria 60 km/h. Se estivesse indicando uma distância, traria o nome de um local ou locais. Mas, a da p. 55..., será que existe uma igual?

RPM: Nunca vimos uma igual. Ainda bem que nossos leitores estão atentos!

• ... e como ficam as citações?

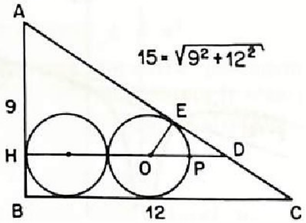
A respeito de carta publicada nesta seção na RPM 20, p. 62, o colega *Davi de O. Fróis*, GO, lembra que a RPM já publicou citações sem se referir a fontes, dando como exemplo a p. 45 da RPM 7.

RPM: O colega tem razão. Nós, entretanto, temos aprendido de lá a esta parte, e queremos nossa Revista cada vez servindo melhor ao leitor. Hoje, o professor brasileiro já dispõe, em português, de alguns bons livros de História da Matemática, podendo fundamentar suas citações em obras especializadas e confiáveis. Esperamos também que os autores de livros didáticos sigam o mesmo caminho, deixando bem clara a distinção entre fatos historicamente comprovados, fatos prováveis e lendas ou anedotas. Para isso, nada melhor do que a citação de fonte especializada!

• A área não é a única saída!

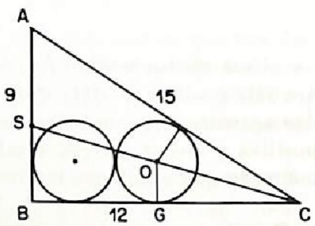
É o que mostram as três soluções que nos foram enviadas, do problema resolvido na **RPM 22**, p. 59, todas por semelhança de triângulos. A primeira solução que chegou foi a de *Ricardo Klein Hoffmann*, de Porto Alegre, RS.

Sendo HD paralelo a BC, tem-se $\Delta AHD \sim \Delta ABC$ e, fazendo $PD = x$, vem $(9 - r)/9 = (4r + x)/12$. Mas $\Delta EOD \sim \Delta ABC$, pois $\angle D = \angle C$, como ângulos correspondentes, donde $(r + x)/15 = r/9$. Daí, eliminando x entre estas duas, vem a resposta $r = 2$ ∎

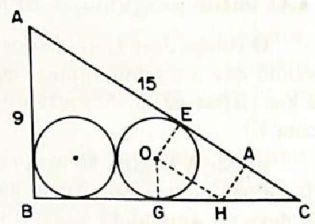


Jorge Luiz Dias de Frias, do Rio de Janeiro, RJ, enviou a solução do professor Benjamin e a dele próprio.

A do professor Benjamin começa por verificar que o segmento que une C a O é bissetriz do ângulo C, donde: $BS = 12k$ e $AS = 15k$. Como $AS + BS = 9$, vem $k = 1/3$ e $BS = 4$. Os triângulos OGC e SBC são semelhantes, donde $4/12 = r/(12 - 3r)$, donde $r = 2$ ∎



A solução do professor Frias começa construindo o retângulo $OEFH$ e considerando a semelhança entre os triângulos OGH e ABC, donde tira que $r/GH = 9/12$. Da semelhança entre os triângulos HFC e ABC tira que $r/HC = 9/15$. Como $3r + GH + HC = 12$, dá também para concluir que $r = 2$ ∎



• Contribuindo e... dando uma força

O engenheiro *Benedito Madeira Sobrinho*, Diretor da Divisão de Estudos e Projetos do DERT do Estado do Ceará, ex-professor e ainda supervisor de Matemática em alguns colégios de cidades que visita por injunção funcional, ao contribuir para o Grupo Amigos da RPM, envia palavras de estímulo à equipe que publica a Revista, finalizando com o seguinte parágrafo: "Tenho usado muito a **RPM** como um farol a balizar novos horizontes neste desafio permanente que é ensinar, resolver problemas e vencer obstáculos matemáticos".

RPM: Nossa gratidão a este e a tantos outros leitores que nos escrevem com palavras de estímulo e contribuições em várias formas.

• A Matemática na vida

Vários são os leitores que sugerem que a **RPM** publique mais assuntos de aplicação da Matemática. *Jussara Denise Quintal*, de Paulínia, SP, pede uma seção com recursos que despertem o interesse e o gosto dos alunos pela matéria. O pai de estudante, *Diobel Gomes Travessa* (**RPM 22**, p. 58), desta vez fala dos muitos jogos

oficiais no Brasil, em especial da recém-criada Tele-sena, que gostaria de ver analisada à luz da Teoria das Probabilidades. *Oedih Kawata* apresenta como aplicação das equações do segundo grau um problema de pagamento parcelado, que foi objeto de artigo na **RPM 22** (sua carta é anterior à distribuição da **RPM 22**): "Uma loja vende um aparelho de som, cujo preço à vista é de 288 mil cruzeiros, em 2 prestações mensais iguais de 200 mil cada uma, vencendo a primeira um mês depois da compra. Qual é a taxa de juros embutida nesta transação?". E o autor do referido artigo (**RPM 22**, p. 13) apresenta uma equação de grau n, que poderá ser resolvida pelo método de Newton (das aproximações sucessivas), que permite calcular a taxa de juros compostos de uma compra feita com pagamento parcelado, o primeiro deles ocorrendo um mês depois da compra: se V é o valor da compra à vista, p o valor de cada uma das n prestações, i a taxa de juros, $k = V/p$ e $a = 1 + i$, vale a equação: $k\,a^{n+1} - (k+1)\,a^n + 1 = 0$.

• Vamos usar a calculadora?

O autor do artigo Pagamento Parcelado, *Hideo Kumayama*, sugere que o professor leve seus alunos a reduzirem, sempre que possível, o número de "toques", dando como exemplo um modo de calcular as aproximações sucessivas dadas por $i_{k+1} = \frac{1}{2}[1 - (1 + i_k)^{-3}]$ (**RPM 22**, p.14). Se $i_0 = 0{,}1$ o cálculo de i_1 numa calculadora – das mais simples, que ele chama de *calculadora do feirante*, mas que repita a operação indicada anteriormente ao toque da tecla $< = >$ – pode ser feito assim: $< 1 >< \cdot >< 1 >< \div >< = >< = >< = >< M^- >< 1 >< + >$ $< RM >< = >< \div >< 2 >< = >$, dando 0,1243426.

RPM: De fato, a calculadora já faz parte da vida da grande maioria de nossos estudantes e deve ser usada na escola. O aluno precisa, entretanto, saber a tabuada para lidar com operações entre números baixos, necessárias ao cálculo da ordem de grandeza, bem como levar em conta os arredondamentos.

• Sobre os divisores...

O colega *Paulo Argolo*, do Rio de Janeiro, RJ, pediu a um dos editores da **RPM** uma prova para o resultado: "Se S é uma seqüência determinada pela obtenção dos divisores de um número natural n através do dispositivo prático usual (na decomposição de n em fatores primos não havendo necessidade de se partir do menor para o maior fator, ou vice-versa, o essencial é que se *esgote* sucessivamente cada fator), então o produto de dois termos de S, eqüidistantes dos extremos, é igual a n; além disso, se S tem uma quantidade ímpar de termos, seu termo central será a raiz quadrada de n". Gostou tanto da resposta que sugere sua publicação em forma de artigo.

RPM: O leitor estaria interessado em vê-la publicada?

• Erramos

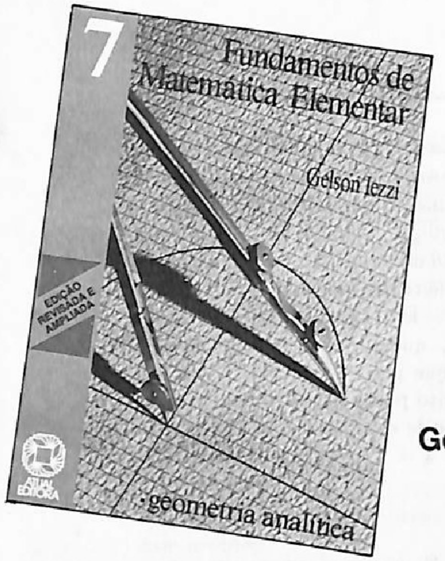
Os leitores *José Lisboa Mota*, Fortaleza, CE, *Gilmar de Paula Matta*, Volta Redonda, RJ e *Régis Sant'Ana*, Curitiba, PR perceberam dois enganos na seção *O que cai por aí*:

p. 39 – ℓ. – 9: desconto de $x\,\%$ (não 2%);

p. 41 – ℓ. – 3: 1) A (não C).

RPM: Agradecemos a atenção dos leitores.

MATÉRIA PUBLICITÁRIA



A ATUAL EDITORA ORGULHOSAMENTE APRESENTA:

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA ELEMENTAR EM NOVA EDIÇÃO

Gelson Iezzi/Osvaldo Dolce/Carlos Murakami
Samuel Hazzan/José Nicolau Pompeo
Nilson José Machado

- Novo tratamento gráfico em duas cores
- Enriquecido com inúmeros textos de história da Matemática
- Teoria revisada, mantendo o excelente conteúdo
- Exercícios aperfeiçoados
- Mais de 7 000 exercícios
- Problemas, testes, questões (propostas e resolvidas) com grau de dificuldade bem dosado
- Testes dos últimos vestibulares dirigidos aos alunos do 2º grau e úteis aos vestibulandos e universitários
- Dez volumes temáticos que unem clareza, concisão e rigor conceitual

Volume 1: Conjuntos e Funções
Volume 2: Logaritmos
Volume 3: Trigonometria
Volume 4: Seqüências, Matrizes, Determinantes, Sistemas lineares
Volume 5: Combinatória, Binômio e Probabilidade
Volume 6: Complexos, Polinômios e Equações
Volume 7: Geometria Analítica
Volume 8: Limites, Derivadas e Noções de Integral
Volume 9: Geometria Plana
Volume 10: Geometria Espacial, de Posição e Métrica

Novidade: Complemento para o Professor, um livro para cada volume, onde estão resolvidos os exercícios mais complicados.

Fundamentos de Matemática Elementar, a coleção que todo professor de Matemática (Física, Química...) tem que ter. E vai ter.

20 anos ATUAL EDITORA

Consulte-nos:
Rua José Antônio Coelho, 785
Vila Mariana — 04011-062 — São Paulo — SP
Tel. 575-1544 — Fax: 549-7040

lançamento

MATEMÁTICA, CONCEITOS E FUNDAMENTOS - 2º GRAU

Autores: Antonio Nicolau Youssef e Vicente Paz Fernandez

Esta obra, em três volumes, consolida o sucesso já alcançado pelos autores em seus trabalhos anteriores e retoma o trabalho de educação matemática baseado na trilogia: história, conteúdo e aplicações.

Um primoroso e elegante projeto gráfico foi criado para facilitar o aprendizado do aluno. Cada capítulo contém:

- um texto com o histórico do conteúdo;
- o conteúdo programático com exemplos diversos;
- exercícios resolvidos e propostos;
- problemas de aplicação;
- leitura de divulgação matemática.

Cada módulo é finalizado com os mais atualizados **testes** e **questões de vestibulares** fundamentais para o ingresso às universidades.

Visite a Casa do Professor, em São Paulo.

Rua Fagundes, 121 - Liberdade
CEP 01508-030 - Fone: (011) 239-1700

Esta nova coleção tem a qualidade:

editora scipione

MATÉRIA PUBLICITÁRIA

CONTEÚDO