1º semestre de 1994

Revista do Professor de Matemática

25

Sociedade Brasileira de Matemática

EXPEDIENTE

Sociedade Brasileira de Matemática
Presidente: Márcio Gomes Soares; *Vice-Presidente*: Mário Jorge Dias Carneiro; *Secretário-Geral*: Maria Elasir Seabra Gomes; *Tesoureiro*: Pedro Mendes.

Endereço da SBM: Estrada Dona Castorina, 110 - 22460-320 Rio de Janeiro, RJ.

Comitê Editorial da RPM: Alberto Carvalho P. de Azevedo; Alciléa Augusto; Augusto Cesar Morgado; Carlos A. Isnard; Eduardo Wagner; Elon Lages Lima; Geraldo Ávila; Noemi M. Guirland Nowosad; Renate G. Watanabe.

Editores Convidados para a RPM 24: Claudio Possani; José Paulo Quinhões Carneiro; Raul Francisco Werneck Agostino.

Assessoria Editorial: Gelson Iezzi; **Ilustrações**: Marcus Tullius H. de Mello, Daniel Caruso e Delton Capozzi; **Revisor de Português**: Noé Gonçalves Ribeiro (Atual Editora). **Resposta aos leitores**: Vera Helena Giusti de Souza (coordenadora), Claudio Possani, Renato Zoega Táboas e Gualter José Biscuola. **Responsável por seções**: Augusto Cesar Morgado, Eduardo Wagner, Elio Mega, Elon L. Lima, Élvia M. Sallum, Flávio W. Rodrigues, Geraldo Ávila, Maria Ignez de S. V. Diniz. **Apoio Administrativo**: Alcely A. Chaves, Letícia Ferreira. **Cadastro**: Luiz Carlos Moreira Gomes e Sílvio Fernandes de Paula, CCE/USP.

Impressão: Editora "Ave Maria" Ltda. **Tiragem**: 23 000 exemplares. **Postagem**: 2º semestre de 1994.

ISSN 0102-4981

ASSINATURAS:
A RPM é enviada gratuitamente a todos os professores de Matemática que a solicitarem. Ao leitor que recebeu este número será enviado o próximo.

ALTERAÇÕES DE ENDEREÇO:
Comunique-nos qualquer mudança de endereço – só assim a RPM chegará regularmente em suas mãos.

NÚMEROS ATRASADOS:
Cada exemplar atrasado custa R$0,65. Os números 1, 2, 3 e 5 estão esgotados. Pedidos devem ser dirigidos à RPM, acompanhados de um cheque em nome do Comitê Editorial da RPM. Para o envio de coleções completas, acrescentar 10% do total para despesas de correio. Não trabalhamos com reembolso ou vales postais.

SBM:
Como se tornar sócio da SBM. Como obter os livros publicados pela SBM. Como se tornar assinante da revista Matemática Universitária. Estas informações podem ser obtidas escrevendo para a Sociedade Brasileira de Matemática, no Rio de Janeiro.

GRUPO AMIGOS DA RPM:
Anuidade 94: R$6,50. Envie um cheque em nome de Grupo Amigos da RPM. Veja brinde especial na p. 4 da RPM 24.

ENDEREÇO PARA CORRESPONDÊNCIA:
Revista do Professor de Matemática
Caixa Postal 20570
01452-990 São Paulo, SP.

A RPM é uma publicação semestral da Sociedade Brasileira de Matemática com apoio da Universidade de São Paulo.

EDITOR RESPONSÁVEL: Alciléa Augusto.

Este número foi financiado por:
MCT/PADCT/SPEC-CAPES e GRUPO AMIGOS DA RPM
e será postado no 2º semestre de 1994.

Revista do Professor de Matemática nº 25, 1º semestre de 1994.

NÚMEROS MUITO GRANDES

Geraldo Ávila
IMECC-UNICAMP, Campinas, SP

O JOGO DE XADREZ

Segundo uma lenda antiga, o jogo de xadrez foi inventado na Índia, para agradar a um soberano, como passatempo que o ajudasse a esquecer os aborrecimentos que tivera com uma desastrada batalha. Encantado com o invento, o soberano, rei Shirham, quis recompensar seu súdito Sissa Ben Dahir, o inventor do xadrez. Shirham disse a Sissa que lhe fizesse um pedido, que ele, rei Shirham, o atenderia prontamente. Sissa disse, simplesmente:

— Bondoso rei, dê-me então um grão de trigo pela primeira casa do tabuleiro, dois pela segunda casa, quatro $(= 2^2)$ pela terceira, oito $(= 2^3)$ pela quarta, e assim por diante, até 2^{63} grãos de trigo pela última casa do tabuleiro, isto é, a 64ª casa.

O rei achou esse pedido demasiado modesto e, sem dissimular seu desgosto, disse a Sissa:

— Meu amigo, tu me pedes tão pouco, apenas um punhado de grãos de trigo. Eu desejava cumular-te de muitas riquezas – palácios, servos e tesouros de ouro e prata.

Como Sissa insistisse em seu pedido original, o rei ordenou a seus auxiliares e criados que tratassem de satisfazê-lo. O administrador do palácio real mandou que um dos servos buscasse um balde de trigo e fizesse logo a contagem. Um balde com cerca de 5 kg de trigo contém aproximadamente 115 000 grãos (como o leitor pode verificar, fazendo, ele mesmo, a contagem...); foi o suficiente para chegar à 16ª casa do tabuleiro, mas não além, pois (veja o quadro logo abaixo)

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{15} = 2^{16} - 1 = 65\,535,$$

enquanto, para chegar à 17ª casa seriam necessários

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{16} = 2^{17} - 1 = 131\,071$$

grãos de trigo. (Um fato interessante a observar: o número de grãos de trigo a colocar numa casa é igual a todos os grãos já colocados nas casas precedentes mais 1. De fato, pelo penúltimo cálculo vê-se que todos os grãos colocados até a 16ª casa mais 1 é 2^{16}, que é o número de grãos correspondentes à 17ª casa.)

Lembremos a fórmula que dá a soma dos termos de uma progressão geométrica. Dado qualquer número $q \neq 1$, chamado *razão da progressão*, e n um inteiro positivo arbitrário, pomos

$$S = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n$$

e observamos que

$$qS = q + q^2 + q^3 + q^4 + \ldots + q^{n+1}.$$

Portanto, subtraindo a primeira dessas igualdades da segunda, obtemos

$$qS - S = q^{n+1} - 1, \quad \text{donde} \quad S = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1},$$

que é a desejada fórmula da soma que será usada nos cálculos a seguir.

— Traga logo um saco inteiro (60 kg, aproximadamente 1 380 000 grãos) – ordenou o administrador a um dos servos –, depois você leva de volta o que sobrar. Ao mesmo tempo providenciou a vinda de mais uma dezena de contadores de trigo para ajudar na tarefa, que se tornava mais e mais trabalhosa.

O administrador, os servos e os contadores já haviam terminado com 10 sacos de trigo $(= 10 \times 60 \times 23\,000 = 13\,800\,000$ de grãos) e mal haviam passado da 23ª casa do tabuleiro, visto que

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{22} = 2^{23} - 1 = 8\,388\,607$$

e

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{23} = 2^{24} - 1 = 16\,777\,215.$$

A essa altura o rei foi notificado do que estava acontecendo e alertado de que as reservas do celeiro real estavam sob séria ameaça. Insistindo, porém, em atender ao pedido de seu súdito, ordenou que o trabalho continuasse. Mandou convocar mais servos e mais contadores; ao mesmo tempo, mandou chamar os melhores calculistas do reino para uma avaliação do problema. Esses vieram e, cientificados do que se passava, debruçaram-se nos cálculos. Em menos de uma hora de trabalho, puderam esclarecer o rei de que não havia trigo suficiente em seu reino para atender ao pedido de Sissa. Mais do que isso, em todo o mundo conhecido na época não havia trigo suficiente para atender àquele pedido!

No tempo em que isso aconteceu, pensava-se que o mundo fora criado havia menos de 5 000 anos. Assim, os calculistas do rei puderam dizer-lhe que nem mesmo toda a produção mundial de trigo, desde a criação do mundo, seria suficiente para atender ao pedido de Sissa. (A essa altura dos acontecimentos é de se supor que o rei Shirham estivesse, no mínimo, irritado com o pedido de Sissa, e que este, portanto, estivesse em sérias dificuldades perante o rei, que enfeixava em suas mãos todos os poderes sobre seus súditos, inclusive o de poder mandar cortar a cabeça de Sissa...)

Com os dados de que hoje dispomos, podemos fazer uns cálculos simples e interessantes. Sabemos que a produção brasileira de trigo em 1992 foi de 2,839 milhões de toneladas, um total de

$$65\,297\,000\,000\,000 \text{ grãos},$$

quando o número de grãos pedido por Sissa era exatamente

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{63} - 1 = 2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615.$$

Ora, este número dividido pelo número de grãos de trigo que o Brasil produziu em 1992 é certamente maior do que

$$18 \times 10^{18} \div 72 \times 10^{12} = 250\,000.$$

Isso significa que seriam necessários mais do que 250 000 anos de produção brasileira de trigo, no nível da safra de 1992, para atender ao pedido de Sissa. (A divisão, sem aproximação dos números, dá 282 505 anos.)

— Produção brasileira não vale, o Brasil produz muito pouco trigo – poderá reclamar um leitor mais exigente. Tudo bem, vamos à produção mundial, que, em 1992, foi de 565,52 milhões de toneladas, de acordo com dados da FAO. Fazendo os cálculos como antes, concluímos que seriam necessários cerca de 1 420 anos de produção mundial de trigo no nível de hoje para atender à demanda de Sissa. Agora, sendo realista mesmo e considerando a produção mundial verdadeira – que não foi sempre no nível de hoje –, certamente teríamos de recuar muito mais tempo no passado: seguramente, todo o trigo que tem sido cultivado nos últimos 10 000 anos, isto é, desde o início da agricultura em nosso planeta, não seria suficiente para atender ao pedido de Sissa.

COMO CALCULAR 2^{64}?

Sim, essa pergunta deve ter ocorrido ao leitor enquanto acompanhava a história que acabamos de contar. Hoje em dia é muito fácil calcular um número como 2^{64}, valendo-se de um dos vários programas implementados em computador. Eu usei aqui o programa MATHEMATICA, implementado num micro 486. Os cálculos ficam extremamente simples, cada um levando apenas uma fração de segundo para ser executado.

Mas, e quando não havia computador? Como fizeram os calculistas indianos do tempo de Shirham e Sissa, há mais de um milênio atrás? Bem, se fosse há uns 300 anos, eles poderiam recorrer aos logaritmos.

Para efetuar cálculos com a ajuda dos logaritmos, primeiro é preciso dispor de uma tábua (ou tabela) dos logaritmos dos números num certo intervalo. Por exemplo, uma tábua dos logaritmos decimais dos números inteiros de 1 a 10 000 já é suficiente para muitos cálculos. A título de ilustração, tentemos calcular o número $N = 2^{64}$. Consultando uma tábua (de logaritmos decimais), encontramos $\log 2 \approx 0,30103$, de sorte que

$$\log N = 64 \times \log 2 \approx 64 \times 0,30103 = 19,26592.$$

Este cálculo já é suficiente para sabermos que N está compreendido entre 10^{19} e 10^{20}, pois seu logaritmo é maior do que 19 e menor do que 20, o que já é uma boa informação.

O logaritmo de um número pode sempre ser escrito como a soma de um inteiro – chamado *característica* – e uma parte decimal m tal que $0 \leq m < 1$, chamada *mantissa*. No caso do número N a calcular, 19 é a característica e 0,26592 é a mantissa de seu logaritmo.

As tábuas só dão as mantissas. Mas, ao consultarmos uma tábua, nem sempre encontramos, na coluna dos logaritmos, a mantissa desejada. No caso concreto que estamos considerando, ao consultar a tábua, verificamos que o logaritmo 0,26592 está compreendido entre dois outros que lá se encontram; mais precisamente,

$$\log 1,844 = 0,26576 \quad \text{e} \quad \log 1,845 = 0,26600.$$

A partir daqui, fazemos uma interpolação para determinar o número que tem 0,26592 como logaritmo. Encontramos

$$0,26592 \approx \log 1,844666\ldots,$$

donde, $\log(1,844666\ldots \times 10^{19}) \approx 19,26592$; e daqui segue que

$$N = 2^{64} \approx 1,844666\ldots \times 10^{19} \approx 18\,446\,666\,666\,666\,666\,666.$$

Comparando este valor aproximado com o valor exato calculado acima, verificamos que o erro relativo é inferior a 10^{-5}; portanto, o valor aproximado é muito bom.

Mas como teriam os calculistas indianos feito seus cálculos, há uns mil anos, sem ajuda dos logaritmos. Eles podiam fazer a multiplicação diretamente, como ensinamos na escola primária, com ajuda da tabuada. Por exemplo, multiplicando $2^{10} = 1\,024$ por si mesmo, encontramos $2^{20} = 1\,048\,576$. Agora é só multiplicar este último número por si mesmo duas vezes $(2^{20} \times 2^{20} \times 2^{20})$ e o resultado por 16 $(= 2^4)$. Embora trabalhosa, trata-se de uma tarefa não de todo descabida há algum tempo, quando não havia computadores e os alunos aprendiam a fazer qualquer conta de multiplicação.

UM OUTRO NÚMERO MUITO GRANDE

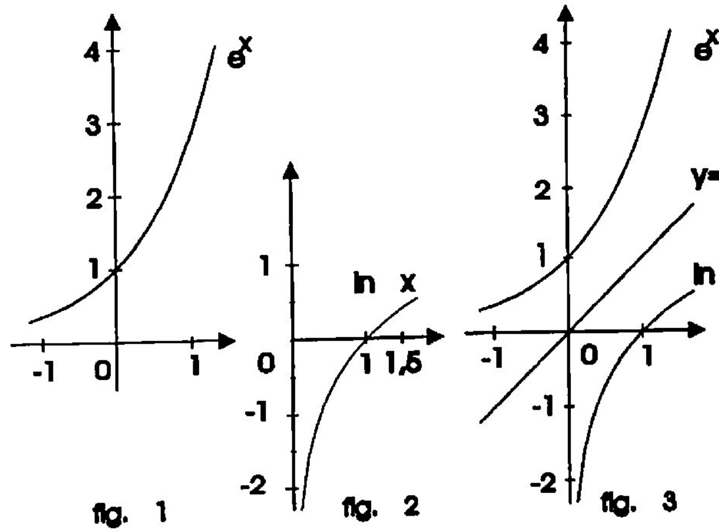
Como vimos na história acima, 10^{20} é um número muito grande, superior mesmo a todos os grãos de trigo já produzidos no mundo desde que o homem começou a praticar a agricultura. Eis aqui um outro número fantasticamente grande: 10^{75}, calculado como superior ao número de todos os átomos existentes no universo atualmente conhecido, aí incluídas todos os 100 bilhões de galáxias nele existentes. Ora, o universo como o conhecemos hoje possui cerca de 18 galáxias para cada um dos mais de 5 bilhões de habitantes do planeta! Como cada galáxia, por sua vez, possui cerca de 100 bilhões de estrelas, se repartíssemos todas essas estrelas com os habitantes que hoje vivem no planeta Terra, tocaria para cada um cerca de 18×100 bilhões de estrelas! Comparando estrelas com trigo, podemos dizer que a quantidade de estrelas existentes no universo hoje conhecido é suficiente para distribuí-las entre os habitantes de nosso planeta, dando a cada um tantas estrelas quantos são os grãos de trigo existentes em mais de 780 toneladas desse cereal...

O LOGARITMO E A EXPONENCIAL

Números grandes como esses são fruto da função exponencial. Estamos aqui falando de exponenciais como 10^x e 2^x. Existe uma função exponencial fundamental, que dá origem a todas as outras, por isso mesmo chamada a *exponencial*, dada por $y = e^x$, onde e é um número aproximadamente igual a 2,7, chamado *base dos logaritmos naturais*, e que pode ser definido como *o número cujo logaritmo natural é igual a 1*. Pois bem, quando o logaritmo e a exponencial são ensinados no 2º grau, é costume fazer o gráfico dessas funções. Mas, infelizmente, esse "aspecto funcional" não é devidamente enfatizado. O ensino continua sendo feito como se "logaritmo" fosse apenas um instrumento de cálculo à moda antiga. E nem sempre o aluno é devidamente alertado para o crescimento tão rápido da exponencial com o crescer da variável x, ou para o crescimento tão vagaroso do logaritmo. Os livros mostram os gráficos dessas funções, porém, sem analisá-los em muitos de seus aspectos interessantes. Vejam aí esses gráficos, nas Figs. 1 e 2 respectivamente. Na Fig. 3 reproduzimos os dois gráficos juntos, para exibir claramente o fato de que um é o simétrico do outro em relação à reta $y = x$, já que as funções

$$x \mapsto y = e^x \quad \text{e} \quad x \mapsto y = \ln x$$

são inversas uma da outra.



Suponhamos que você, professor, estivesse ensinando essas funções a seus alunos. Pois bem, faça os gráficos delas na lousa, mas proponha a sua classe a seguinte "brincadeira" (que, por sinal, vai animar muito a turma):

– Pessoal, agora vocês vão fazer o gráfico da função exponencial vocês mesmos, aí no caderno. Você, Marcelo, venha à lousa me ajudar; eu vou dando os números (se você tiver uma calculadora de bolso, use-a para fazer os cálculos na hora, fica mais interessante) e você vai escrevendo. Vamos começar fazendo uma tabela (mostrada logo adiante), pondo numa primeira coluna alguns valores de x, numa segunda coluna vamos pôr os valores correspondentes da função $y = x^2$, só para efeito de comparação; e, finalmente, numa terceira e última coluna listamos os valores correspondentes de $y = e^x$. Vamos usar a mesma unidade de comprimento nos dois eixos, digamos, o centímetro. Vamos lá pessoal.

Veja a tabela que Marcelo escreveu na lousa, com valores arredondados:

x	$y = x^2$	$y = e^x$
0	0	1 cm
3	4	20 cm
5	25	148 cm
10	100	220 m
15	225	33 km
20	400	4 852 km
30,3357	920	distância da Terra ao Sol
41,39	1713	1 ano-luz
42,85	1836	4,3 anos-luz

distância da Terra ao Sol = 149 500 000 km

1 ano-luz = $946\,728 \cdot 10^7$ km

4,3 anos luz = $407\,093 \cdot 10^8$ km = dist. da estrela mais próxima do Sol

Agora veja até onde você, professor, e sua turma conseguem ir na construção do gráfico. Quando $x = 5$ cm, Marcelo terá de marcar 25 cm na vertical para a função $y = x^2$ e 148 (quase um metro e meio) para a função exponencial; quando $x = 10$ cm, Marcelo terá de marcar, na vertical, $x^2 = 100$ cm = 1 metro e $e^x = 220$ metros, a altura de um prédio de mais de 70 andares! Quando x passa por volta do valor 30 cm e x^2 por volta de 9 metros, e^x já está assumindo a distância da Terra ao Sol! E quando x estiver por volta de 40 cm e x^2 por volta de 1 700 metros, e^x estará assumindo o valor de um ano-luz; e 4,3 anos-luz, ou seja, a distância da estrela (Alfa do Centauro) mais próxima de nós, quando x for pouco mais de 42 cm!

Estes poucos cálculos mostram claramente o quão rapidamente cresce a função exponencial com o crescer de seu argumento.

Em correspondência ao rápido crescimento da função exponencial está o vagaroso crescimento do logaritmo. De fato, como estamos lidando com funções que são a inversa uma da outra, o gráfico do logaritmo é simplesmente o reflexo do gráfico da função exponencial em relação à reta $y = x$, como ilustra a Fig. 3. Isto significa que na tabela acima a 3ª coluna da tabela representa os valores de x e a 1ª representa os correspondentes valores de $\ln x$. Assim, para conseguirmos subir 25 cm na vertical das ordenadas é preciso fazer $x = 148$ cm; para subir 10 cm é preciso andar 220 metros na

horizontal; para subir apenas 20 cm é preciso caminhar 4 852 km na horizontal; para subir pouco mais de 40 cm é preciso caminhar 1 ano-luz na horizontal! E assim por diante. A função $y = \ln x$ é realmente uma função de crescimento muito vagaroso.

A esta altura é provável que os alunos tenham a curiosidade bastante aguçada e façam várias perguntas, querendo saber, por exemplo, o porquê desse misterioso número e, base dos logaritmos naturais. Por que não uma outra base, como 10 ou 2? Quem sabe voltaremos a esses assuntos, em outros números da **RPM**.

Se você nasceu aí por volta de 1975, seus 2 pais provavelmente nasceram por volta de 1950; seus 4 avós por volta de 1925 e seus 8 bisavós por volta de 1900. Assim, um período de 100 anos comporta mais ou menos 4 gerações sucessivas de pessoas. Pois bem, que tal remontar ao tempo de Jesus Cristo, há 2 000 anos? São 20 séculos, $20 \times 4 = 80$ gerações de pessoas. Quantos ancestrais você teria naquele tempo? Veja: é necessário multiplicar o número de pessoas de uma geração por 2 para se obter o número de pessoas da geração anterior. Portanto, começando com uma pessoa hoje, teremos de realizar 79 multiplicações. Assim, o número de seus ancestrais no tempo de Cristo seria de 2^{79}, superior ao número de átomos do universo! Certo ou errado? E se assim eram as coisas há dois milênios, que dirá no tempo de Adão e Eva? Explique!

O que vai por aí

1. II CONGRESSO IBERO-AMERICANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (II CIBEM) – 17 a 22 de julho, 1994 – Blumenau, SC.
   Inf.: FURB-CIBEM; Caixa Postal 1507; CEP 89010-971 Blumenau, SC.
2. SEGUNDA REUNIÃO DE DIDÁTICA DA MATEMÁTICA DO CONE SUL (Interfaces Matemática – Educação – Informática)
   Universidade São Judas Tadeu – 01 a 03 de agosto, 1994 – São Paulo, SP.
   Inf.: U. São Judas Tadeu – Rua Taquari, 546 – 03166-000 São Paulo, SP – Tel.:(011)948-1677 R.144 – FAX (011)264-5880.

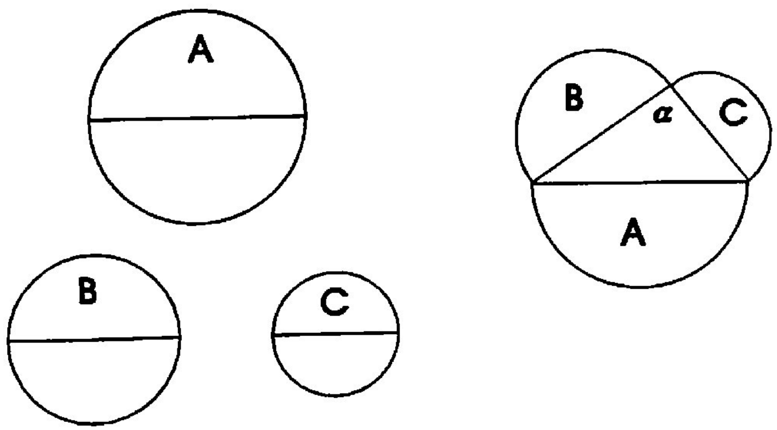
SEMELHANÇA, PIZZAS E CHOPES

Eduardo Wagner
Rio de Janeiro, RJ

As histórias que vamos contar envolvem dois amigos que gostam de freqüentar bares e restaurantes, além de discutir problemas de Matemática. Em pelo menos duas situações, surgiram interessantes problemas cujas soluções, além de elegantes, são bastante educativas.

PRIMEIRA HISTÓRIA

Augusto e João foram a um restaurante para comer pizza. O primeiro pediu uma grande e o segundo, uma média e uma pequena, todas do mesmo sabor. Curiosamente, o preço da pizza grande era exatamente igual à soma dos preços das pizzas média e pequena. Logo após os pedidos surgiu naturalmente o problema de saber quem vai comer mais. O fato de os preços a pagar serem iguais não quer dizer nada, porque nos restaurantes, o preço não costuma ser proporcional à quantidade de comida servida. Augusto argumenta que, se tivesse uma régua, poderia medir os diâmetros, calcular as áreas e verificar se a área da pizza grande é maior, igual ou menor do que a soma das áreas das outras duas. Porém, não havia régua disponível. Pensando um pouco, João, bom geômetra, declarou ter resolvido o problema, dizendo que assim que as pizzas chegassem diria quem comeria mais, e para isso usaria apenas objetos que estavam em cima da mesa. Augusto estupefato duvidou. "Como é possível? Não temos instrumento de medida algum. Em cima da mesa só há talheres, copos, guardanapos e o cardápio, responsável por nossa incrível discussão!" A espera não foi longa e as pizzas chegaram. Rapidamente, então, João cortou cada uma delas em duas metades.



Sobre a mesa (de mármore) juntou os diâmetros para formar um triângulo.

Utilizando o canto do cardápio como um modelo para o ângulo reto, João verificou que o ângulo oposto ao diâmetro da maior metade (α) era menor do que $90°$ e declarou "eu como mais". E Augusto, após pensar alguns momentos, concordou.

Qual é a explicação?

A explicação depende de dois teoremas importantes. O primeiro bastante conhecido e o segundo não muito.

TEOREMA 1

A razão entre as áreas de figuras semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança.

TEOREMA 2

Se figuras semelhantes são construídas sobre a hipotenusa e sobre os catetos de um triângulo retângulo, então a área da figura maior é igual à soma das áreas das outras duas.

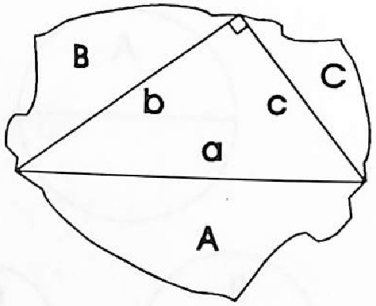
Vamos demonstrar esse segundo teorema.

Na figura a seguir, A, B e C representam as áreas de figuras semelhantes que foram construídas sobre os lados de um triângulo retângulo de hipotenusa a e catetos b e c.

Pelo teorema 1:

$$\frac{A}{B}=\left(\frac{a}{b}\right)^2, \quad \text{ou seja,} \quad \frac{A}{a^2}=\frac{B}{b^2},$$

$$\frac{B}{C}=\left(\frac{b}{c}\right)^2, \quad \text{ou seja,} \quad \frac{B}{b^2}=\frac{C}{c^2}.$$



Portanto,

$$\frac{A}{a^2}=\frac{B}{b^2}=\frac{C}{c^2}=\frac{B+C}{b^2+c^2}.$$

Como no triângulo retângulo, $a^2 = b^2 + c^2$, concluímos que $A = B + C$.

Reciprocamente, se figuras semelhantes são construídas sobre os lados a, b e c de um triângulo, e se $A = B + C$, então $a^2 = b^2 + c^2$ e, pela recíproca do teorema de Pitágoras, o triângulo é retângulo.

Para concluir que no nosso problema João estava certo, observe que, se α é o ângulo oposto ao lado a do triângulo de lados a, b e c, temos:

$$\alpha < 90^\circ \iff a^2 < b^2 + c^2 \iff A < B + C,$$

$$\alpha > 90^\circ \iff a^2 > b^2 + c^2 \iff A > B + C.$$

Portanto, se na nossa história João constatou que o ângulo α era *menor* que 90°, então a área da semipizza grande era *menor* que a soma das áreas das outras duas metades.

SEGUNDA HISTÓRIA

Dias depois, Augusto, afobado com o calor, senta em um bar e pede um chope (na verdade, o primeiro de muitos). Nesse lugar, o chope é servido em "tulipas", que são copos com a forma de um cone invertido. O garçom chega com a bebida ao mesmo tempo que João encontra seu amigo. "Como vai, João? Sente e tome rápido a metade deste copo. Eu tomo a outra metade." A fisionomia de João mostra alguma tristeza. Como determinar a altura do nível da bebida quando um copo cônico contém a metade do seu conteúdo? Augusto então alivia a situação. "Meu caro amigo, para este problema, seus

artifícios são insuficientes. Eu hoje vim prevenido e trouxe uma régua e uma calculadora. Desculpe a brincadeira e vamos juntos resolver o nosso problema."

Augusto então saca de sua régua, calculadora, caneta e sobre um guardanapo mostra a solução sob o olhar de um estupefato garçom.

"Observe, João, que o copo tem 20 cm de altura.

Desejamos obter a altura da superfície do líquido que corresponda à metade do volume do copo. Para isso, precisamos recordar dois teoremas."

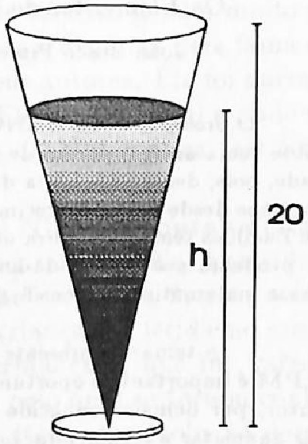
TEOREMA 3

Toda seção paralela à base de um cone forma um outro cone semelhante ao primeiro.

TEOREMA 4

A razão entre o volume de sólidos semelhantes é igual ao cubo da razão de semelhança.

Augusto continua sua explicação.



"Se você tiver tomado uma parte do conteúdo deste copo, teremos aqui, pelo teorema 3, dois objetos semelhantes: o cone formado pelo líquido e o próprio copo. A razão de semelhança entre esses dois cones é a razão entre suas alturas, ou seja, $h/20$. Como desejamos que o líquido tenha a metade do volume do copo, pelo teorema 4 podemos escrever:

$$\frac{1}{2}=\left(\frac{h}{20}\right)^3, \quad \text{isto é,} \quad \frac{h}{20}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

Assim, a altura que corresponde à metade do volume do copo é $h = 10\sqrt[3]{4}$ cm."

João concorda com a perfeita explicação, mas repara que a resposta não resolve ainda o problema porque ele não tem a menor idéia de quanto é $10\sqrt[3]{4}$. E então Augusto, com a sua calculadora e seu sorriso irônico, diz: "Ah! é bom saber que esse valor dá aproximadamente 16 cm."

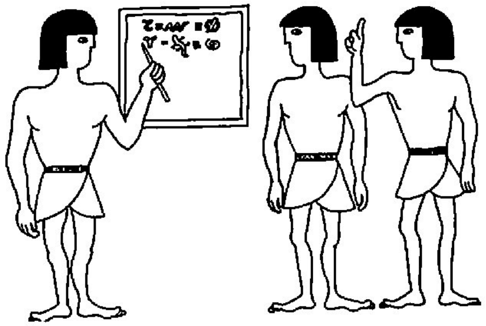
Bem. O problema foi resolvido e o chope, já meio quente, foi adequadamente dividido. Falta apenas o final da história.

Nessa altura, as pessoas das outras mesas ouviam atentamente nossos personagens com um misto de admiração e espanto. Nisso, João faz uma descoberta, que anuncia em alto e bom som: "Este problema me revela que quando somos servidos em tulipas com 4 cm de colarinho estamos tomando apenas *metade* do conteúdo do copo. Assim, se eu digo que tomei 10 chopes, na verdade tomei 5, mas paguei 10!".

E foram expulsos do bar.

A SOLUÇÃO DE TARTAGLIA PARA A EQUAÇÃO DO TERCEIRO GRAU

César Polcino Milies
IME-USP, SP



1. Introdução

A história da resolução da equação de terceiro grau é muito pitoresca, plena de lances dramáticos, paixões e disputas pela fama e a fortuna que seu achado poderia trazer a seus autores. Ela foi narrada recentemente num interessante artigo de Elon L. Lima [4] e pode ser encontrada também em livros de história da Matemática tais como [1] ou [3].

Uma das personagens dessa história é **Niccolò Fontana** (1500-1557 aprox.). Em 1512 os franceses saquearam Brescia, sua cidade natal. Sua mãe buscou refúgio para o filho na igreja, mas os soldados também invadiram o santuário, e a criança foi ferida no rosto. O ferimento lhe causou uma gagueira permanente, que lhe valeu o apelido de **Tartaglia** (gago, em italiano), pelo qual se tornou conhecido. Ele não foi o primeiro a obter o método de resolução dessas equações; **Scipione del Ferro** (1465-1562 aprox.), que foi professor na Universidade de Bolonha e cuja biografia é pouco conhecida, foi o verdadeiro descobridor. Antes de morrer, del Ferro ensinou seu método a dois discípulos, **Annibale della Nave** – seu futuro genro e sucessor na cátedra em Bolonha – e **Antonio Maria Fior** (ou Floridus, em latim).

Em 1535 houve uma disputa matemática entre Fior e Tartaglia. Tais confrontos intelectuais não eram infreqüentes na época e, muitas vezes, a permanência de um matemático numa cátedra dependia de seu bom desempenho nesses encontros. Cada um dos adversários propôs ao outro trinta problemas e foi combinado que o perdedor deveria pagar trinta banquetes ao ganhador. Tartaglia preparou questões variadas, mas todos os problemas propostos por Fior implicavam equações do tipo $X^3 + aX = b$. Precisamente na noite de 12 para 13 de fevereiro, Tartaglia conseguiu descobrir o método de resolução de tais equações e, na hora do confronto, verificou-se que Tartaglia tinha resolvido todas as questões propostas por Fior, enquanto este não tinha conseguido resolver a maioria das questões submetidas por Tartaglia. Declarado vencedor, Tartaglia voluntariamente renunciou aos trinta banquetes.

A notícia do triunfo de Tartaglia logo se espalhou e chegou aos ouvidos de **Girolamo Cardano** (1501-1576), que, na época, ocupava uma cadeira de medicina na Universidade de Pavia e era membro do Colégio Médico de Milão. De todos os participantes da nossa história, talvez seja Cardano o mais enigmático, aquele cuja vida é mais pitoresca e, certamente, que teve uma formação mais universal.

Para termos uma idéia de quão extenso e profundo era seu conhecimento, citamos a seguir os comentários de Gabriel Naudé (1600-1653), que publicou a autobiografia de Cardano pela primeira vez em 1643*:

> *Não somente era ele inquestionavelmente um médico notável, como foi também provavelmente o primeiro e único homem a se distinguir em todas as ciências ao mesmo tempo. É uma das ilustrações da Natureza daquilo que um homem é capaz de atingir. Nada de significativo lhe era desconhecido em filosofia, medicina, astronomia, matemática, história, metafísica ou as ciências sociais, ou em outras áreas mais remotas do conhecimento. Ele também errava, é claro, isto é apenas humano; é maravilhoso, porém, quão raramente ele errava.*

Por outro lado, Naudé é bem mais crítico quanto à vida pessoal e características de personalidade de Cardano, distorcendo-as até o patológico. Foram estas opiniões de Naudé, amplamente divulgadas no

* Citado por Fierz [2], p. 2.

prefácio das obras de Cardano, que deram origem à visão distorcida que as futuras gerações tiveram sobre seu caráter.

Na época da descoberta de Tartaglia, Cardano gozava de boa posição em Milão e o convidou a sua casa, com o pretexto de apresentá-lo ao comandante militar da cidade, uma vez que Tartaglia tinha feito também algumas descobertas sobre tiro e fortificações e esperava obter disso algum benefício. Uma vez lá, com muita insistência Cardano conseguiu que lhe fosse revelado o segredo da resolução das equações do terceiro grau.

Tartaglia consentiu em lhe ensinar a regra de resolução (embora não lhe ensinasse a demonstração da mesma), sob forma de versos, em troca do juramento solene de que Cardano jamais publicaria esse segredo.

Conhecendo um método de resolução, Cardano procurou – e achou – uma demonstração que o justificasse. Mais ainda, ele estimulou seu secretário e discípulo **Ludovico (Luigi) Ferrari** (1522-1565) a trabalhar com a equação de quarto grau e ele achou o correspondente método de resolução com a devida demonstração.

De posse de ambas as soluções, Cardano deve ter se sentido fortemente tentado a publicá-las. Em 1544, mestre e discípulo realizaram uma viagem a Florença e, no caminho, fizeram uma visita a Annibale della Nave, em Bologna. De acordo com um relato de Ferrari, este lhes mostrou um manuscrito de del Ferro que continha a famosa regra de Tartaglia, manuscrito este que ainda se conserva. Aparentemente, ao saber que a fórmula de Tartaglia existia já desde trinta anos antes, Cardano se sentiu desobrigado de cumprir seu juramento e publicou, em 1545, em Nuremberg, uma obra intitulada *Ars Magna*, que o tornou verdadeiramente famoso em todo o continente. Nas palavras de C. Boyer*, "ele provavelmente era o matemático mais competente da Europa". Nessa obra aparecem, pela primeira vez, as regras de resolução das equações do terceiro e quarto graus. A seu favor, podemos dizer que Cardano não esquece de fazer as devidas atribuições de mérito aos respectivos descobridores.

A seguir, faremos uma análise do método que Tartaglia confiou a Cardano.

* [1], p. 208.

OS VERSOS DE TARTAGLIA

Como dissemos acima, Tartaglia comunicou a Cardano o segredo da sua descoberta por meio de versos. Tal idéia não é tão estranha quanto pode parecer a princípio; devemos lembrar que, na época, os autores não dispunham ainda de uma notação adequada para tratar as equações em sua generalidade e não podiam, portanto, expressar seus métodos resumidamente mediante fórmulas, como fazemos hoje em dia.

A seguir, reproduzimos os versos na sua versão original, tal como transcritos na página 120 da edição de 1554 dos *Quesiti* [6]:

1. Quando che'l cubo con le cose appreso
Se aggaglia a qualque número discreto
Trovati due altri differenti in esso
2. Depoi terrai questo por consueto
Che'l lor produtto sempre sia eguale
Al terzo cubo delle cose neto
3. El residuo poi suo generale
Delli lor lati cubi ben sostratti
Verra la tua cosa principale
4. In el secondo de coiesti aiti
Quando che'l cubo restasse lui solo
Tu osserverai quest'altri contratti
5. Del número farai due, tal part'a volo
Cha l'uno e l'altro si produca schietto
El terzo delle cose in stelo
6. Delle qual poi, per commun precetto
Torrai li lati cubi incieme gionti
Et cotal somma serà il tuo concetto
7. El terzo poi de questi nostri conti
Se solve con secondo, se ben guardi
Che ser natura son quasi congiontri
8. Questi trovai, et non con passi tardi
nel mille cinquecento quatro et trinta
Nella città dal mare intorno centa.

Uma tradução para o português ficaria, mais ou menos, assim:

1. Quando o cubo com a coisa em apreço
Se igualam a qualquer número discreto
Acha dois outros diferentes nisso

2. Depois terás isto por consenso
Que seu produto seja sempre igual
Ao cubo do terço da coisa certo
3. Depois, o resíduo geral
Das raízes cúbicas subtraídas
Será tua coisa principal
4. Na segunda destas operações,
Quando o cubo estiver sozinho
Observarás estas outras reduções
5. Do número farás dois, de tal forma
Que um e outro produzam exatamente
O cubo da terça parte da coisa
6. Depois, por um preceito comum
Toma o lado dos cubos juntos
E tal soma será teu conceito
7. Depois, a terceira destas nossas contas
Se resolve como a segunda, se observas bem
Que suas naturezas são quase idênticas
8. Isto eu achei, e não com passo tardo
No mil quinhentos e trinta e quatro
Com fundamentos bem firmes e rigorosos
Na cidade cingida pelo mar

Analisaremos, a seguir, esses versos numa linguagem acessível ao leitor contemporâneo. Antes de tudo, é conveniente lembrar que Tartaglia (assim como depois faria também Cardano) não utiliza coeficientes negativos em suas equações. Então, em vez de uma equação geral do terceiro grau, ele deve considerar três casos possíveis:

$$x^3 + ax = b$$
$$x^3 = ax + b$$
$$x^3 + b = ax\,.$$

Tartaglia chama cada um desses casos de *operações* e afirma que irá considerar, de início, equações do primeiro tipo: *"cubo e coisa igual a número"*. No quarto verso começa a considerar o segundo tipo *"quando o cubo estiver sozinho"* e, no sétimo, faz referência ao terceiro caso.

Vejamos agora como se propõe a resolver o primeiro caso, nos três versos iniciais, para depois justificar seu método, de uma forma simples.

O *número* se refere ao termo independente, que nós denotamos aqui por b. Quando diz *"acha dois outros diferentes nisso"*, está sugerindo tomar duas novas variáveis cuja diferença seja precisamente b, i.e., escolher U e V tais que:

$$U - V = b.$$

A frase *"... que seu produto seja sempre igual a cubo da terça parte da coisa"* significa que U e V devem verificar:

$$UV = \left(\frac{a}{3}\right)^3.$$

Finalmente, *"o resíduo geral das raízes cúbicas subtraídas será tua coisa principal"* significa que a solução estará dada por

$$x = \sqrt[3]{U} - \sqrt[3]{V}.$$

Os outros dois casos carecem de interesse para o leitor moderno, uma vez que podemos reduzi-los ao primeiro, mudando termos de um membro a outro da equação.

A frase final *"... a cidade cingida pelo mar"* é uma referência a Veneza, onde realizou suas descobertas.

A RESOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DO TERCEIRO GRAU

Nesta seção veremos como justificar a fórmula de Tartaglia para resolver equações do terceiro grau. Naturalmente, utilizaremos métodos e notações modernos, o que nos permitirá dar uma exposição relativamente simples.

Vamos considerar uma equação do terceiro grau escrita na forma:

$$x^3 + ax = b$$

para compará-la com a *primeira destas operações ...cubo e coisa igual a número*, discutida nos três primeiros versos de Tartaglia. Na verdade, há um caminho muito simples para achá-la. Comecemos por lembrar a fórmula do cubo de um binômio:

$$(u - v)^3 = u^3 - 3u^2v + 3uv^2 - v^3.$$

Pondo em evidência o produto uv, temos:

$$(u - v)^3 = -3uv(u - v) + (u^3 - v^3),$$

isto é,

$$(u - v)^3 + 3uv(u - v) = u^3 - v^3.$$

Se podemos escolher, de alguma forma, u e v de modo que verifiquem:

$$uv = a/3$$
$$u^3 - v^3 = b,$$

a relação acima se transformará em:

$$(u - v)^3 + a(u - v) = b$$

o que significa que $x = u - v$ será uma solução da equação dada.

Em outras palavras, se conseguirmos achar u e v que sejam soluções do sistema acima, tomando $x = u - v$ obter-se-á uma solução da equação proposta. Resta-nos então o problema de resolver o sistema. Para isso, observemos que, elevando ao cubo a primeira equação, ele se transforma em:

$$u^3v^3 = (a/3)^3$$
$$u^3 - v^3 = b.$$

Finalmente, fazendo $u^3 = U$ e $v^3 = V$, temos:

$$UV = (a/3)^3$$
$$U - V = b.$$

Isso é muito fácil de resolver; U e $-V$ são as raízes da equação:

$$X^2 - bX + (-a/3)^3 = 0$$

que são dadas por:

$$X = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4(\frac{-a}{3})^3}}{2} = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}.$$

Podemos tomar uma dessas raízes como sendo U e a outra como $-V$, logo temos $u = \sqrt[3]{U}$ e $v = \sqrt[3]{V}$. Portanto, obtemos precisamente a solução enunciada por Tartaglia:

$$x = \sqrt[3]{U} - \sqrt[3]{V}.$$

Mais explicitamente, substituindo U e V pelos seus respectivos valores, resulta a conhecida fórmula que, nos textos, é chamada de *fórmula de Cardano* ou *de Tartaglia*:

$$x = \sqrt[3]{\frac{b}{2} + \sqrt{(\frac{b}{2})^2 + (\frac{a}{3})^3}} + \sqrt[3]{\frac{b}{2} - \sqrt{(\frac{b}{2})^2 + (\frac{a}{3})^3}}.$$

Uma observação final: a equação geral do terceiro grau, que podemos escrever na forma:

$$x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0,$$

pode-se reduzir ao caso acima, mediante a mudança de variável $x = y - (a_1/3)$. Aliás, essa redução era conhecida por Tartaglia, mas não por Fior, e foi justamente esse fato que determinou a vitória do primeiro. Isso significa que, na verdade, Tartaglia conhecia um método geral para resolver *qualquer* equação do terceiro grau.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] BOYER, C. *História da Matemática*. São Paulo, Edgar Blücher, 1974.

[2] FIERZ, M. *Girolamo Cardano (1501-1576)*. Boston, Birkhäuser, 1983.

[3] KLINE, M. *Mathematical thought from ancient to modern times*. New York, Oxford Univ. Press, 1972.

[4 LIMA, E. L. *A equação de terceiro grau*. Matemática Universitária 5 (1987), SBM, p. 9-23.

[5] SMITH, D. E. *A source book in Mathematics*. New York, McGraw Hill, 1929.

[6] TARTAGLIA, N. *Quesiti et inventioni diverse* (publicação comemorativa do IV centenário da morte de Niccolo Tartaglia), Brescia, 1959.

César Polcino Milies é professor titular do IME-USP. Interessa-se por *Álgebra* – sua área de pesquisa – e *História da Matemática*. Tem diversos outros interesses: pratica judô, estuda cabala e é também psicólogo, formado na USP.

Dos nossos alunos

UMA SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DO 3º E DO 4º GRAUS

Carlos Gustavo Tamn de Araujo Moreira
IMPA, RJ

APRESENTAÇÃO

O autor deste trabalho tinha 14 anos quando me quis mostrá-lo, em 1987, mas não lhe dei na época a devida atenção.

Mais tarde, concordei em ouvi-lo e percebi logo que se trata da mais simples e menos artificial das deduções das fórmulas para as equações do terceiro e do quarto grau que conheço.

É claramente do interesse dos leitores da **RPM** *tomar conhecimento destas demonstrações. Mas agora era o autor que relutava em publicá-las, alegando que já não tinham mais graça. Finalmente, porém, cedeu aos apelos e é com satisfação que trago esta pequena gema ao conhecimento do público.*

Elon Lages Lima

UMA SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DO 3º GRAU

Motivado pelo cálculo de expressões simétricas nas raízes de uma equação do 2º grau em função dos coeficientes da equação, resolvi um dia calcular a expressão:

$$y = \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2},$$

onde x_1 e x_2 são as raízes da equação $x^2 - Sx + P = 0$ (e portanto satisfazem $x_1 + x_2 = S$ e $x_1x_2 = P$). Isso leva aos seguintes cálculos:

$$y = \sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2} \quad \Rightarrow$$

$$y^3 = x_1 + x_2 + 3\sqrt[3]{x_1x_2}\,(\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2}) \quad \Rightarrow$$

$$y^3 = S + 3\sqrt[3]{P}\,y\,.$$

Assim, para determinar y há que se resolver uma equação do 3º grau.

Ocorreu-me então o seguinte: Dada uma equação do terceiro grau é possível escrever suas raízes como soma de raízes cúbicas de raízes de uma equação do 2º grau. Isso pode ser feito como a seguir:

Dada a equação $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, procuramos uma substituição $x = y + t$ que anule o coeficiente em y^2:

$$(y+t)^3 + a(y+t)^2 + b(y+t) + c = 0 \Rightarrow y^3 + (3t+a)y^2 + \ldots = 0\,.$$

Fazemos $t = -a/3$ e caímos numa equação do tipo:

$$y^3 + py + q = 0\,.$$

Determinamos números P e S tais que

$$p = -3\sqrt[3]{P} \quad \text{e} \quad q = -S\,,$$

de forma que se

x_1 e x_2 são raízes de $x^2 - Sx + P = 0$, então $\sqrt[3]{x_1} + \sqrt[3]{x_2}$ satisfaz a equação $y^3 + py + q = 0$.

Feito isso, obtemos

$$\sqrt[3]{P} = -\frac{p}{3} \quad \Rightarrow \quad P = -\frac{p^3}{27} \quad \text{e} \quad S = -q\,,$$

ou seja, x_1 e x_2 são raízes de $x^2 + qx - \frac{p^3}{27} = 0$, isto é,

$$x_1 = \frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

donde,

$$y = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

satisfaz $y^3 + py + q = 0$.

Cada raiz cúbica pode assumir três valores complexos, mas a equação $\sqrt[3]{P} = -p/3$ diz que o produto das duas raízes deve ser $-p/3$. Essa fórmula dá as três raízes de $y^3 + py + q = 0$, que somadas a $t = -a/3$ nos dão as três raízes de $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$.

UMA SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DO 4º GRAU

Uma variação dessa técnica nos permite resolver equações do 4º grau.

Considere a equação do 3º grau $x^3 - Sx^2 + S_dx - P = 0$, de raízes x_1, x_2 e x_3, que satisfazem:

$$x_1 + x_2 + x_3 = S\,, \quad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = S_d \quad \text{e} \quad x_1x_2x_3 = P\,.$$

Seja $y = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3}$. Temos:

$$y^2 = x_1 + x_2 + x_3 + 2(\sqrt{x_1x_2} + \sqrt{x_1x_3} + \sqrt{x_2x_3}) \quad \Rightarrow$$

$$\left(\frac{y^2 - S}{2}\right)^2 = (\sqrt{x_1x_2} + \sqrt{x_1x_3} + \sqrt{x_2x_3})^2 =$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + 2\sqrt{x_1x_2x_3}(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3})\,,$$

ou seja,

$$\left(\frac{y^2 - S}{2}\right)^2 = S_d + 2\sqrt{P}\,y\,, \quad \text{ou}$$

$$y^4 - 2Sy^2 - 8\sqrt{P}\,y + S^2 - 4S_d = 0\,. \qquad (*)$$

Dada a equação $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, fazemos uma substituição do tipo $x = y + t$ e obtemos $y^4 + (4t + a)\,y^3 + \ldots = 0$. Tomando $t = -a/4$, obtemos uma equação do tipo

$$y^4 + k_1y^2 + k_2y + k_3 = 0\,,$$

sem termo em y^3.

Comparando com (*), tomamos S, P e S_d tais que

$$-2S = k_1, \qquad -8\sqrt{P} = k_2 \qquad \text{e} \qquad S^2 - 4S_d = k_3 \qquad \Rightarrow$$

$$S = -\frac{k_1}{2}, \qquad P = (\frac{k_2}{8})^2 \qquad \text{e} \qquad S_d = \frac{S^2 - k_3}{4} = \frac{k_1^2 - 4k_3}{16}.$$

Assim, resolvendo a equação

$$x^3 + \frac{k_1}{2}x^2 + (\frac{k_1^2 - 4k_3}{16})x - (\frac{k_2}{8})^2 = 0,$$

obtemos raízes x_1, x_2 e x_3 tais que

$$y = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3} \quad \text{satisfaz} \quad y^4 + k_1y^2 + k_2y + k_3 = 0.$$

Para obter as raízes de $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, basta diminuir $a/4$ das raízes de $y^4 + k_1y^2 + k_2y + k_3 = 0$.

Observe que cada raiz quadrada pode assumir dois valores complexos, mas a equação $\sqrt{P} = -k_2/8$ diz que $\sqrt{x_1}\sqrt{x_2}\sqrt{x_3} = -k_2/8$. Assim, para cada valor de $\sqrt{x_1}$ e $\sqrt{x_2}$ há um único valor de $\sqrt{x_3}$. Dessa forma obtemos todas as quatro raízes da equação original.

EXEMPLOS NUMÉRICOS

a) Considere a equação $x^3 - 6x - 40 = 0$. Para aplicar a fórmula que dá as raízes da equação do 3º grau temos $p = -6$ e $q = -40$. A fórmula nos dá $\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$. Assim, as três raízes da equação são: $x_1 = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$, $x_2 = \xi\,\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \xi^2\,\sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$ e $x_3 = \xi^2\,\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \xi\,\sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$, onde $\xi = -1/2 + i\sqrt{3}/2$. Assim, x_1 é a única raiz real da equação. Por outro lado, claramente $x = 4$ satisfaz a equação, donde $\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = 4$ (!)

b) Seja $\alpha = \cos 20°$. Como $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$, temos:

$$\cos 60° = 4\cos^3 20° - 3\cos 20° = 4\alpha^3 - 3\alpha \quad \Rightarrow$$

$$4\alpha^3 - 3\alpha = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha^3 - \frac{3}{4}\alpha - \frac{1}{8} = 0.$$

Aqui $p = -3/4, q = -1/8$, e substituindo na fórmula obtemos as raízes de $x^3 - (3/4)x - (1/8) = 0$:

$$x = \sqrt[3]{\tfrac{1}{16} + \sqrt{\tfrac{1}{256} - \tfrac{1}{64}}} + \sqrt[3]{\tfrac{1}{16} - \sqrt{\tfrac{1}{256} - \tfrac{1}{64}}},$$

ou

$$x = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\tfrac{1}{2} + \tfrac{i\sqrt{3}}{2}} + \sqrt[3]{\tfrac{1}{2} - \tfrac{i\sqrt{3}}{2}}\right),$$

que não diz nada de novo sobre $\cos 20°$. Essa expressão não é lá muito satisfatória, pois usa números complexos para exprimir $\cos 20°$, que é real. Na verdade é possível provar que qualquer expressão por radicais de $\cos 20°$ tem que envolver números complexos *.

c) Considere a equação $y^4 - 12y^4 - 16y - 4 = 0$. Segundo o método utilizado para resolver equações do 4º grau, temos:

$$k_1 = -12, \quad k_2 = -16 \quad \text{e} \quad k_3 = -4.$$

Resolvendo a equação do 3º grau:

$$x^3 + (\frac{k_1}{2})x^2 + (\frac{k_1^2 - 4k_3}{16})x - (\frac{k_2}{8})^2 = 0,$$

temos:

$$x^3 - 6x^2 + 10x - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2, x_2 = 2 + \sqrt{2}, x_3 = 2 - \sqrt{2}.$$

As raízes de $y^4 - 12y^2 - 16y - 4 = 0$ são:

$$\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{2}} + \sqrt{2 - \sqrt{2}}, \qquad \sqrt{2} - \sqrt{2 + \sqrt{2}} - \sqrt{2 - \sqrt{2}},$$

$$-\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{2}} - \sqrt{2 - \sqrt{2}} \quad \text{e} \quad -\sqrt{2} - \sqrt{2 + \sqrt{2}} + \sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

(lembre-se da regra dos sinais: o produto deve ser sempre $-k_2/8$, no caso igual a 2).

* Um teorema sobre solubilidade de equações polinomiais por radicais reais, *Matemática Universitária*, nº12, dezembro de 1990, do mesmo autor.

d) Considere a equação $x^4 + 4x^3 + 8x^2 - 8x + 4 = 0$.
Fazendo $x = y - 1$, obtemos $y^4 + 2y^2 - 16y + 17 = 0$.
Temos, pois, $k_1 = 2, k_2 = -16$ e $k_3 = 17$.
A equação auxiliar $x^3 + \frac{k_1}{2}x^2 + \frac{k_1^2-4k_3}{16}x - (\frac{k_2}{8})^2 = 0$
torna-se $x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$, cujas raízes são -1, -2 e 2.
Assim, as raízes de $y^4 + 2y^2 - 16y + 17 = 0$ são
$i + i\sqrt{2} + \sqrt{2}$, $i - i\sqrt{2} - \sqrt{2}$ $-i + i\sqrt{2} - \sqrt{2}$ e $-i - i\sqrt{2} + \sqrt{2}$
e, como $x = y - 1$, as raízes de $x^4 + 4x^3 + 8x^2 - 8x + 4 = 0$ são
$-1 + \sqrt{2} + i(1 + \sqrt{2})$, $-1 - \sqrt{2} + i(1 - \sqrt{2})$, $-1 - \sqrt{2} + i(\sqrt{2} - 1)$
e $-1 + \sqrt{2} + i(-1 - \sqrt{2})$.

NR. Poucos dias antes da impressão deste número, a **RPM** recebeu uma carta do autor, pedindo que a seguinte nota fosse anexada ao artigo: "Recentemente, folheando o livro *Elements of Algebra* do Euler, descobri que o próprio Euler tinha desenvolvido essencialmente o mesmo método que o meu para resolver equações do 4º grau (EULER, L. *Elements of Algebra*, New York, Springer, c. 1972, Section IV, chap. XV, p. 282: Of a new method of resolving equations of the forth degree)".

Carlos Gustavo Moreira é mestre e doutor em Matemática pelo IMPA e, atualmente, faz um estágio de pós-doutorado nessa instituição. Participou de algumas Olimpíadas Internacionais de Matemática, tendo ganho uma medalha de bronze em 1989, na Alemanha, e uma de ouro em 1990, na China. Também ganhou medalhas de ouro nas Olimpíadas Ibero-Americanas de 1989, em Cuba, e em 1990, na Espanha. Atualmente, Carlos Gustavo é membro ativo da Comissão de Olimpíadas da Sociedade Brasileira de Matemática. Canta muito bem e sabe de cor as letras de inúmeras canções brasileiras e latino-americanas.

Dos nossos alunos (continuação)

DE GRÃO EM GRÃO...

Enviado por *Rosalina B. de M. Miranda*
Estrela d'Oeste, SP

Carlos Eduardo Alves Pereira, aluno da E. E. Sílvio Miotto, em Estrela d'Oeste, participou da fase final da 15ª Olimpíada de Matemática do Estado de São Paulo, realizada em 1991, quando cursava a 8ª série.

Ele é meu aluno e quando estava na 7ª série montou, de um modo bastante interessante, uma tabela para o número de diagonais de um polígono em função do número de lados.

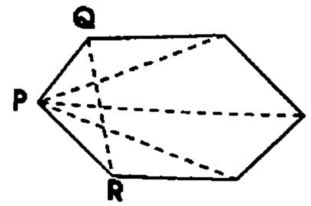
Partindo do triângulo, que não tem diagonais, ele chegou ao polígono de 100 lados e não precisou fazer cálculos muito complicados, pois percebeu que, enquanto o número n de lados cresce uma unidade, o número de diagonais d_n cresce esse número de lados menos um. E construiu a tabela, da qual reproduzo um trecho.

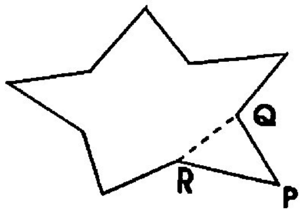
n	d_n	
3	0	+2
4	2	+3
5	5	+4
6	9	+5
7	14	+6
⋮	⋮	
99	4752	+98
100	4850	

RPM: Com efeito, o número d_n de diagonais se escreve como um polinômio do 2º grau em n. A diferença entre dois polinômios será um polinômio do 1º grau, cujos valores formarão uma progressão aritmética se os acréscimos dados a n forem constantes. Ou seja, como $d_n = \dfrac{n(n-3)}{2} = \dfrac{1}{2}(n^2 - 3n)$, tem-se:

$$d_{n+1} - d_n = \frac{1}{2}\left[(n+1)^2 - 3(n+1)\right] - \frac{1}{2}(n^2 - 3n) = n - 1 .$$

Um outro modo de ver isso é destacar um vértice P do polígono de $n+1$ lados e considerá-lo como um polígono de n lados ao qual se justapõe um triângulo, como ilustram as figuras.





Às diagonais do polígono de n lados é preciso acrescentar as $n-2$ diagonais que saem de P e, ainda, RQ, que é um lado do polígono de n lados e passa a ser diagonal no polígono de $n+1$ lados. Ao todo, acrescentam-se $n-1$ diagonais.

Como será que Carlos Eduardo chegou ao seu modo de construir a tabela? Só perguntando a ele.

...e para nossos alunos

BRINCANDO COM A MATEMÁTICA

João Batista da Silva
Nova Granada, SP

Alunos gostam quando exploramos brincadeiras matemáticas ou exercícios curiosos. Aqui vai uma brincadeira que desperta grande interesse nos alunos:

Trata-se de fazer uma adição com 5 parcelas: o aluno escolhe a 1ª e eu imediatamente escrevo o resultado num papel, dobro e peço para que ele guarde o papel no bolso. Em seguida, o aluno escolhe a 2ª parcela, eu, a 3ª, o aluno a 4ª, eu, a 5ª – e aí é só conferir: a

soma é igual ao número que está escrito no papel guardado no bolso do aluno (ou de algum colega).

Vejamos como isso acontece, através de um exemplo:

aluno	$\longrightarrow$	827	$\longrightarrow$	eu escrevo 2825 no papel
aluno	$\longrightarrow$	345		
eu	$\longrightarrow$	654	$\longrightarrow$	$345 + 654 = 999$
aluno	$\longrightarrow$	208		
eu	$\longrightarrow$	791	$\longrightarrow$	$208 + 791 = 999$
total	$\longrightarrow$	2825.		

O resultado é o 1º número escolhido pelo aluno $+1998$. Como $1998 = 2000 - 2$, dado o 827, basta subtrair 2 e somar 2000 para obter a resposta: 2825.

E se o aluno tivesse começado com 27? ou com 3827? O leitor, ao responder, poderá criar outras brincadeiras parecidas.

PAR OU ÍMPAR

Artur Pires Custódio
Santa Luzia, MG

Quando estou ensinando *números pares* e *ímpares* na 5ª série, conto para meus alunos a seguinte historinha:

Quando eu era criança, meu sobrinho, que era da minha idade, fez a seguinte brincadeira: De um baralho, tirou os ases e todas as figuras e separou as cartas restantes em dois montes. A brincadeira consistia em eu mudar uma carta de um monte para outro e ele descobrir qual a carta que fora mudada. Meu sobrinho acertava sempre, mas nunca me contou qual era o truque.

Foi só quando eu comecei a pensar "matematicamente" que eu desvendei o mistério: meu sobrinho fazia um monte com as cartas pares e outro com as ímpares. Claro que, ao examinar os montes, ele percebia imediatamente qual a carta que fora mudada.

Diga aos seus alunos que façam a brincadeira com seus amigos.

Humor

COMO VALORIZAR SEUS CONHECIMENTOS

(autor desconhecido)

Não é nada distinto indicar a soma de duas quantidades da seguinte forma:

$$1 + 1 = 2\,. \qquad (1)$$

Ora, qualquer estudioso de Matemática avançada sabe que:

$$1 = \ln e$$

$$1 = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x \qquad \text{e, ainda,}$$

$$2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}\,.$$

Assim, a equação (1), de maneira mais científica, será:

$$\ln e + (\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}\,. \qquad (2)$$

Ou, lembrando as relações:

$$1 = \cosh y \sqrt{1 - \tanh^2 y} \qquad \text{e} \qquad e = \lim_{z\to\infty} (1 + \frac{1}{z})^z,$$

a equação (2) pode, então, ser simplificada para:

$$\ln \lim_{z\to\infty} (1 + \frac{1}{z})^z + (\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cosh y \sqrt{1 - \tanh^2 y}}{2^n}\,. \qquad (3)$$

É óbvio que a equação (3) é de maior clareza, simplicidade e compreensão do que a equação (1).

Métodos semelhantes podem ser empregados desde que o leitor compreenda os princípios básicos da simplificação.

De olho no mundo

*CURRÍCULO DE MATEMÁTICA PARA O SÉCULO XXI NA REPÚBLICA DA CHINA**

Myrtle W. Hsiang e *Wu-Yi Hsiang*
Universidade da Califórnia, Berkeley

Um projeto de âmbito nacional na República Popular da China foi iniciado em 1978, com a finalidade de estabelecer um currículo adequado para o ensino médio de Matemática e de promover uma ampla reforma na educação matemática chinesa. Segue-se um texto dos matemáticos Hsiang e Hsiang apresentando alguns aspectos do projeto**. O objetivo da RPM ao divulgar esse trabalho é colocar ao alcance dos leitores um material que a revista julga relevante para as discussões que no Brasil se fazem a respeito de um assunto tão importante para o professor de Matemática, não implicando, naturalmente, aval da RPM às idéias expressas no documento.

OS OBJETIVOS DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA BÁSICA

A educação matemática no ensino médio será uma componente importante da educação compulsória geral na China do século XXI. O objetivo primordial desse currículo é, portanto, atender bem às necessidades da população em geral. Para fazer face ao elevado nível tecnológico e à avalanche de informações que se espera para o próximo

* Tradução e apresentação de *José Paulo Quinhões Carneiro.*
** Veja também RPM 23, p. 23-34.

século, será necessário, mesmo para os cidadãos comuns, um nível mais alto de competência em pensamento analítico. A educação matemática básica tem sido sempre o melhor campo de treinamento para o desenvolvimento do pensamento analítico, e acreditamos que esse é, exatamente, o objetivo principal da educação matemática no ensino médio. O segundo objetivo importante é, evidentemente, proporcionar uma sólida fudamentação da Matemática básica, a qual é, quase universalmente, exigida para todos os tipos de aprendizagem superior. Na educação matemática básica, o conhecimento matemático é, sem dúvida, importante, mas o desenvolvimento nos estudantes das técnicas de reconhecimento de problemas e de resolução de problemas é igualmente importante, e tem sido de certo modo negligenciado no currículo convencional.

ALGUMAS IDÉIAS BÁSICAS

A seguir são apresentadas as idéias básicas que orientaram os projetos globais e fixaram o teor básico do currículo recentemente elaborado.

(1) Para desenvolver nos estudantes as técnicas de reconhecimento e de resolução de problemas, o currículo deve colocar uma ênfase maior na participação do estudante. Isto é alcançado através de um processo de aprendizagem construtiva, envolvendo um número maior de discussões detalhadas sobre motivação, exploração e as idéias básicas, bem como a incorporação de muitos exercícios intelectualmente divertidos e desafiadores. O cultivo de habilidades analíticas deve ter precedência sobre a mera aquisição de conhecimentos.

(2) O argumento mais convincente para aprender Matemática básica é, evidentemente, que a Matemática será sempre útil. Indubitavelmente, as gerações futuras irão calcular com o mesmo sistema de números e ainda viverão no mesmo espaço. Portanto, os números, conjuntos, vetores e funções constituirão para sempre os objetos básicos de estudo em Matemática; as operações básicas e as leis operatórias fundamentais que governam os quatro tipos de objetos matemáticos descritos acima serão sempre o conjunto mais poderoso de *ferramentas universais*. Portanto, um tema central desse currículo é demonstrar amplamente o poder e a utilidade dessas ferramentas.

(3) O currículo deve ser relevante e deve estar intimamente correlacionado com as experiências anteriores dos estudantes com a realidade. A abstração e o formalismo, embora indispensáveis, devem ser mantidos num nível mitigado, porém ainda adequado, a fim de evitar a armadilha de criar nos estudantes um sentimento místico em relação à Matemática.

(4) O projeto global do currículo deve seguir de perto os caminhos evolutivos do desenvolvimento natural da Matemática. Além disso, o currículo deve fazer um esforço para proporcionar uma transição suave para cada ruptura histórica ou desvio importante do curso, como, por exemplo, as transições da Aritmética para a Álgebra, da Geometria Experimental para a Geometria Dedutiva, da Geometria Dedutiva para a Geometria Analítica e da Matemática de quantidades fixas para a Matemática de quantidades variáveis. Acreditamos que esses quatro desenvolvimentos significativos na evolução da Matemática são exatamente os quatro marcos mais importantes ao longo da jornada dos estudantes através de sua educação matemática básica.

ESTRUTURAS GLOBAIS E ALGUNS ITENS ESPECIAIS

No presente sistema educacional chinês, o ensino médio é dividido em dois períodos de três anos: o período júnior, correspondente aos graus de 7º a 9º, e o período sênior, correspondente aos graus de 10º a 12º. A estrutura do novo currículo é a seguinte:

Currículo para os anos do período junior

1º ano	2º ano	3º ano
Álgebra Elementar Geometria Elementar		Análise Elementar

Currículo para os anos do período sênior

1º ano	2º ano	3º ano
Álgebra Intermediária Geometria Intermediária		Análise Básica

Seguem-se breves resumos dos itens do currículo, com alguns comentários sobre tópicos especiais.

ÁLGEBRA ELEMENTAR

Para facilitar uma transição suave da Aritmética para a Álgebra, o currículo começa com uma revisão sobre números inteiros e os números racionais; as relações fundamentais entre as operações básicas são analisadas cuidadosamente e em seguida utilizadas para fornecer explanações persuasivas sobre a validade geral das leis que governam as operações algébricas. O ponto de vista é incutir nos estudantes a idéia de que a finalidade da Álgebra é procurar métodos eficazes de analisar e resolver todos os tipos de problemas quantitativos capazes de serem expressos em termos das operações algébricas (ou seja, os chamados problemas algébricos), e as aplicações das leis das operações algébricas são exatamente o pão com manteiga da Álgebra.

Nesse seu primeiro encontro com os métodos algébricos, os estudantes são apresentados à idéia simples, porém fundamental, da aplicabilidade universal dessas leis, seja aos números usuais ou às *quantidades incógnitas*. Um fato notável, e que foi exatamente a inspiração que conduziu à criação da Álgebra, é que a aplicação sistemática das leis das operações muitas vezes possibilita transformar as quantidades incógnitas de um certo problema algébrico em valores específicos (em termos modernos, achar as soluções de sua correspondente equação algébrica). Essa idéia é então usada para fornecer soluções unificadas e diretas para uma série de problemas enunciados verbalmente, no âmbito das equações lineares com uma ou várias incógnitas e das equações quadráticas com uma incógnita. A experiência indica que esse primeiro encontro não apenas impressiona os estudantes sobre o poder dos cálculos algébricos, mas também acende seu entusiasmo para o aprendizado da Álgebra. Eles constatam que os cálculos simbólicos não passam de aplicações das leis das operações algébricas para resolver problemas algébricos. Em última análise, o uso de símbolos para denotar uma incógnita ou a introdução de indeterminadas tem o preciso objetivo de facilitar a aplicação das leis das operações. Após o sucesso dessa experiência, a Álgebra Polinomial torna-se muito natural para os estudantes aprenderem e usarem. O teorema do resto, o teorema da interpolação para polinômios, e o método dos coeficientes a determinar não devem agora representar dificuldades para eles.

GEOMETRIA ELEMENTAR

Esse currículo enfatiza a base empírica da Geometria e inicia com um capítulo bastante elaborado sobre Geometria Experimental: a experiência física e a percepção visual do "espaço onde vivemos" são analisados cuidadosamente, e são explicados em detalhe os conteúdos intuitivos dos conceitos e propriedades básicas da Geometria.

Um capítulo introdutório sobre conjuntos e lógica é inserido para facilitar a transição da Geometria Experimental para a Geometria Dedutiva. Esse capítulo fornece uma introdução simples sobre o método de descrever um conjunto; a correspondência natural entre conjuntos e suas propriedades características; operações básicas e relações entre conjuntos e seus correspondentes significados lógicos em termos de propriedades características que os descrevem.

A parte do currículo dedicada à Geometria Dedutiva é essencialmente uma versão modernizada da Geometria de Euclides. Os temas principais são: (i) o uso do método dedutivo para estudar as propriedades dos objetos básicos da Geometria, tais como triângulos, paralelogramos e círculos; esse estudo conduz naturalmente

a uma coleção de teoremas básicos, (ii) as aplicações dos teoremas básicos para estabelecer outros teoremas interessantes e resolver uma série de problemas típicos, e (iii) exercícios interessantes e desafiantes, para que os estudantes pratiquem sua habilidade básica em análise lógica. A organização dessa parte ressalta a importância das simetrias, homotetias, fórmulas de área, teorema de Pitágoras e propriedades dos círculos. O importante item da comensurabilidade é mencionado, mas posposto para a Geometria Intermediária.

ANÁLISE ELEMENTAR

Consiste de duas partes intimamente relacionadas: (i) a Geometria Elementar em coordenadas cartesianas no plano, e (ii) funções trigonométricas e as leis do seno e do cosseno. A primeira parte é tratada como uma aplicação sistemática dos teoremas básicos sobre Geometria quantitativa. As discussões se limitam às fórmulas de distâncias e áreas, proporcionalidade, equações de retas e círculos. As funções polinomiais se limitam às de graus baixos; as propriedades das funções lineares e quadráticas constituem o tópico principal. As funções seno e cosseno são definidas como o par natural de funções parametrizadoras do círculo unitário. Todas as propriedades e fórmulas básicas do seno e do cosseno são deduzidas a partir das propriedades geométricas do círculo, principalmente suas simetrias.

ÁLGEBRA INTERMEDIÁRIA

Começa com um capítulo de fundamentação sobre Álgebra de Boole (tratada como a álgebra baseada nas leis das operações com conjuntos), indução matemática e análise estrutural dos sistemas básicos de números (agora são dadas demonstrações por indução das explicações fornecidas na Álgebra Elementar sobre a validade universal das leis operatórias). O método de indução matemática exerce um papel importante nesse currículo, não somente do ponto de vista técnico, mas também sob o aspecto filosófico. Muitos tópicos importantes, como a teoria dos determinantes, são estabelecidos por uma abordagem inteiramente indutiva, consistindo de descoberta indutiva, definição indutiva e demonstração indutiva.

Essa parte cobre a teoria básica de polinômios, abrangendo interpolação, fórmulas de soma*, teorema do binômio, fórmula de Taylor para expansão local de polinômios (como uma simples generalização do teorema do binômio), propriedades locais tais como máximos e mínimos; teoria dos sistemas lineares e dos determinantes; combinatória e probabilidade elementar.

GEOMETRIA INTERMEDIÁRIA

O primeiro capítulo trata dos fundamentos da Geometria e do sistema dos números reais. Começa com um relato histórico das lutas heróicas dos geômetras gregos em relação aos fundamentos da Geometria, centradas sobre o tema da comensurabilidade. O axioma equivocado da comensurabilidade universal, a descoberta de intervalos não comensuráveis e a invenção do método de aproximação para superar

* No original: *summation formulas*.

a dificuldade da incomensurabilidade, não apenas são desenvolvimentos épicos, mas também sua discussão sistemática é, como acreditamos, o caminho mais natural para introduzir o sistema dos números reais, bem como a frutífera metodologia das aproximações e dos limites.

O segundo capítulo apresenta um tratamento abrangente e cuidadoso da Geometria Sólida. Vivemos em um espaço tridimensional, mas nossa visão é essencialmente bidimensional, porque assim o é a retina. É claro que todos nós temos uma mente tridimensional, ajudada por uma percepção bidimensional, limitada, da visão binocular. De qualquer modo, a tarefa do currículo de Geometria Sólida é educar a mente tridimensional a dominar as técnicas básicas da Geometria Tridimensional. A discussão desse capítulo destaca a importância do paralelismo, da perpendicularidade e da Geometria das reflexões; e achamos vantajoso usar as operações com conjuntos e as leis que regem essas operações na discussão da Geometria Sólida.

A parte principal desse currículo trata da Álgebra Vetorial, da Geometria Vetorial e da Geometria Analítica. O conceito de vetores de deslocamento, o significado geométrico das operações com vetores e das leis que regulam essas operações são analisados minuciosamente. É inculcado nos estudantes o ponto de vista de que a Álgebra Vetorial é o resultado final de uma algebrização sistemática do espaço e constitui já um modelo algébrico completo da estrutura do espaço. Deve ficar claro para os estudantes que as operações vetoriais são exatamente a algebrização das estruturas básicas do espaço, e que as leis que regem essas operações são exatamente a algebrização das propriedades básicas do espaço. Portanto, a Álgebra Vetorial fornece um conjunto completo de sistemas eficazes e computáveis para o estudo da Geometria Analítica. Evidentemente, as operações vetoriais e a Álgebra Vetorial são usadas extensivamente nos capítulos posteriores sobre Geometria Vetorial e Geometria Analítica. Um capítulo sobre os números complexos e o sistema de coordenadas do plano é também incluído aqui, usando operações vetoriais.

ANÁLISE BÁSICA

Esse currículo é basicamente uma introdução concisa ao Cálculo. Começa com um capítulo de fundamentos sobre seqüências, aproximações e limites, a continuidade da reta e os números reais como um sistema completo. Seqüências e limites são apresentados como uma moldura conveniente e naturalmente adaptada à metodologia de aproximação de Eudoxo; a afirmativa fundamental da existência do limite de uma seqüência é encarada como a descrição analítica da continuidade da linha reta, a qual, por sua vez, serve como base para demonstrar outros teoremas básicos de existência e para entender outros tipos de continuidade. Ao longo desse currículo, a metodologia de aproximação é enfatizada, não apenas como uma técnica corriqueira, mas também como a filosofia orientadora. Todos os conceitos básicos, como a continuidade, as derivadas e as integrais definidas, são motivados por uma análise bastante detalhada dos exemplos típicos. As funções elementares, principalmente a função exponencial e a função logaritmo, são tratadas como um tópico importante, com abundantes exercícios.

Observação: Os livros-textos para os currículos acima descritos são publicados pela Editora para Educação do Povo, Pequim, República Popular da China.

O que cai por aí

Augusto Cesar Morgado

Continua neste número esta nova seção, que abriu espaço para problemas interessantes que têm caído em vestibulares. São bem-vindas as colaborações dos leitores para o enriquecimento da seção.

As questões a seguir foram retiradas do vestibular de 1994 da PUC-RIO, do vestibular unificado de 1994 da Fundação Cesgranrio e do concurso para a Polícia Rodoviária Federal, realizados em 1993. Foram escolhidos por sua originalidade ou por terem revelado um desempenho assustadoramente ruim por parte dos candidatos.

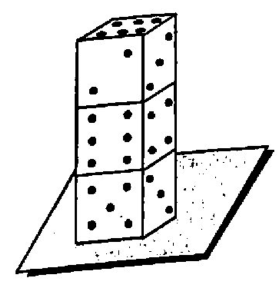
1. (*PUC*) Em uma cela há uma passagem secreta que conduz a um porão de onde partem três túneis. O primeiro túnel dá acesso à liberdade em 1 hora; o segundo, em 3 horas; o terceiro leva ao ponto de partida em 6 horas. Em média, os prisioneiros que descobrem os túneis conseguem escapar da prisão em:

   A) 3h 20min B) 3h 40min C) 4h D) 4h 30min E) 5h

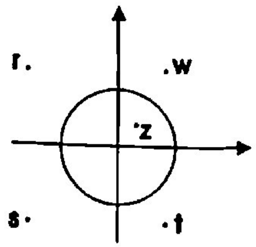
2. (*PUC*) Cláudio resolveu fazer uma coleção de calendários. Começou guardando o calendário de 1975 e, a cada ano, guardava o calendário do ano. Hoje, a coleção de Cláudio já possui várias duplicatas (por exemplo, o calendário de 1986 é idêntico ao de 1975), mas ainda não está completa. Em que ano Cláudio completará sua coleção?

   A) 1996 B) 1997 C) 1998 D) 1999 E) 2000

3. (*CESGRANRIO*) A figura ao lado mostra três dados iguais. O número da face que é a base inferior da coluna de dados:
   A) é 1.
   B) é 2.
   C) é 4.
   D) é 6.
   E) pode ser 1 ou 4.



4. (*CESGRANRIO*) A figura mostra, no plano complexo, o círculo de raio 1 e as imagens de 5 números complexos. O complexo $1/z$ é igual a:
A) z
B) w
C) r
D) s
E) t



5. (*PRF*) Ao optar por um itinerário 14% mais longo, um motorista acha que poderá ganhar tempo pois, por ser o tráfego melhor, poderá aumentar sua velocidade média em 20%. De quanto diminuirá o tempo de viagem?

A) 9% B) 8% C) 7% D) 6% E) 5%

6. (*PRF*) Em uma viagem Rio–São Paulo, metade da distância foi percorrida com um rendimento de 11 km/ℓ de combustível, e a outra metade, com rendimento de 9 km/ℓ. O rendimento da viagem toda foi de:

A) 9,8 km/ℓ B) 9,9 km/ℓ C) 10 km/ℓ D) 10,1 km/ℓ E) 10,2 km/ℓ

7. (*PFR*) A tabela abaixo dá o número de quilômetros rodados e a quantidade, em litros, de gasolina consumida por um automóvel no 1º trimestre de 1993.

MÊS	QUILÔMETROS	CONSUMO (ℓ)	RENDIMENTO (km/ℓ)
janeiro	1 000	102	9,80
fevereiro	2 000	220	9,09
março	7 000	678	10,32

O rendimento médio no 1º trimestre de 1993, em km/ℓ, foi de, aproximadamente:

A) 9,74 B) 9,91 C) 10 D) 10,11 E) 10,22

8. (*PFR*) Dois carros foram vendidos por preços iguais. Um, com lucro de 30% sobre o preço de compra, e outro, com prejuízo de 20% sobre o preço de compra. Podemos afirmar que houve, em relação ao capital investido:

A) lucro de 10%
B) lucro de 5%
C) lucro de 1%
D) prejuízo
E) nem lucro nem prejuízo

RESPOSTAS

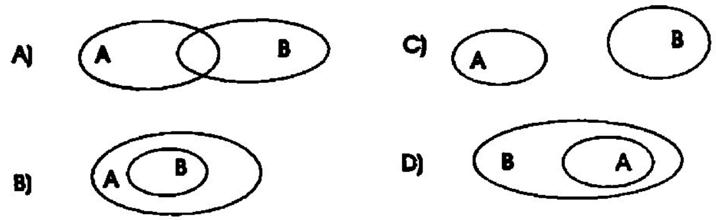
1. C 2. E 3. C 4. E 5. E 6. B 7. C 8. D

CONCURSO PÚBLICO PARA PROVIMENTO DE CARGOS DE PROFESSOR III – MATEMÁTICA (continuação)

Em setembro de 1993 realizou-se, em São Paulo, um concurso público para o provimento de cargos de professor III. A prova constou de duas partes: a primeira com 75 questões objetivas e a segunda com 5 questões dissertativas. Na primeira parte, as 15 primeiras questões, sobre Educação, foram idênticas para todas as áreas. As questões 16 a 26 misturavam conteúdos de Matemática e Metodologia. De 27 em diante, as questões abrangeram somente tópicos de Matemática.

Na **RPM** 24 foram publicadas as questões dissertativas e uma parte dos testes de Matemática. Neste número estão sendo publicados os demais testes de Matemática.

27. Um diagrama de Euler-Venn que represente dois conjuntos não vazios A e B tais que sejam verdadeiras simultaneamente as relações
$$A \not\subset B, \quad A - B = A, \quad A \cap B = B$$
é o correspondente à alternativa:



E) Nenhuma das anteriores.

29. Desenvolvendo $(\sqrt{8}+\sqrt{2}+1)^2$, obtemos o resultado $a+b\sqrt{2}$, com a e b racionais. O valor de a é:

A) 11 B) 13 C) 15 D) 17 E) 19

31. Assinale a proposição falsa:
A) Se dois números positivos têm soma igual a 16, então sua média aritmética é igual a 8.
B) Se o produto de dois números positivos é igual a 16, então sua média geométrica é igual a 4.
C) Se dois números positivos têm soma igual a 16, então sua média geométrica é menor ou igual a 8.
D) Se o produto de dois números positivos é igual a 16, então sua média aritmética é maior ou igual a 4.
E) Não existem dois números positivos que têm simultaneamente soma igual a 16 e produto igual a 16.

33. Em dado momento, dois objetos A e B tinham o mesmo preço. O preço de A sofreu um aumento de 25% e, em seguida, outro aumento de 80% sobre o novo preço. O preço de B sofreu um aumento de $x\%$ e, em seguida, outro aumento de $x\%$ sobre o novo preço. Os preços finais dos dois objetos resultaram iguais. O valor de x é:

A) 45 B) 50 C) 52,5 D) 55 E) 60

35. Sendo $f(x) = \pi x + \sqrt{3}$, a diferença $f(-4{,}357) - f(-5{,}357)$ é igual a:

A) π B) $\sqrt{3}$ C) $-\sqrt{3}$ D) $-\pi$ E) 0,785

37. A função $f(x) = \operatorname{sen} x$, definida para todo número real x, é tal que:

A) $f(1)\cdot f(3) < 0$
B) $f(1)\cdot f(3)\cdot f(5) < 0$
C) $f(3)\cdot f(5) > 0$
D) $f(1)\cdot f(5) > 0$
E) $f(3)\cdot f(5)\cdot f(7) > 0$

39. Para medir a quantidade de informação de uma mensagem, a unidade utilizada é o BIT. Em um repertório (conjunto de mensagens) reduzido a apenas duas mensagens equiprováveis, A e B, a quantidade de informação de cada uma delas é igual a 1 BIT; se forem quatro as mensagens equiprováveis, A, B, C e D, a quantidade de informação de cada uma delas é igual a 2 BITS; se forem oito, 3 BITS; se forem 2^k as mensagens equiprováveis, então cada uma delas terá k BITS. Generalizando, em um repertório com n mensagens equiprováveis, o número de BITS de cada uma delas deve ser igual a:

A) $n/2$ B) 2^n C) $\log_2 n$ D) n^2 E) nda

41. A imagem da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^x + 1$ é:

A) $\mathbb{R}$
B) $\mathbb{R} - \{0\}$
C) $[0; +\infty[$
D) $[1; +\infty[$
E) $]1; +\infty[$

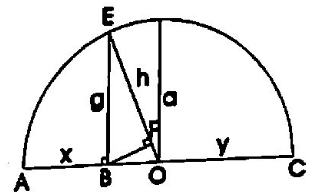
43. Uma função real é definida por $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $-1 \le x \le 1$. Sendo θ um ângulo obtuso, o valor de $f(\operatorname{sen}\theta)$ é:

A) $\cos\theta$ B) $-\cos\theta$ C) 1 D) $-\operatorname{sen}\theta$ E) $\operatorname{sen}\theta$

O enunciado seguinte refere-se às questões 47 e 48.

Os pontos A, B e C são sucessivos e colineares. A distância de A até B é x e a distância de B a C é y. A circunferência de diâmetro igual a $x + y$ tem centro O e raio a e a perpendicular à reta AC pelo ponto B encontra a circunferência supra-referida em E, sendo a distância de B até E igual a g. A perpendicular por B à reta OE intercepta tal reta no ponto F. A distância de E até F é igual a h.

47. Quaisquer que sejam os valores de x e y, entre a, g e h deve valer a seguinte relação:



A) $a \ge h \ge g$
B) $a \le h \le g$
C) $h \le a \le g$
D) $a \le g \le h$
E) $a \ge g \ge h$

48. Exprimindo a, g e h em função de x e y, tem-se, respectivamente:

A) $\frac{x+y}{2}$, $\sqrt{xy}$, $\frac{2xy}{x+y}$
B) $\frac{x+y}{2}$, $\sqrt{xy}$, $\sqrt[3]{xy}$
C) $\frac{x-y}{2}$, $\sqrt{xy}$, $\frac{2xy}{x+y}$
D) $\frac{x-y}{2}$, xy, $\frac{x+y}{2xy}$
E) $x + y$, xy, $\sqrt{xy}$

49. Um quiliógono é um polígono de 1000 lados. Quantas diagonais tem um quiliógono convexo ?

A) 500 B) 1 000 C) 498 500 D) 499 500 E) 500 000

51. As medidas de um triângulo retângulo, relativas aos catetos, medem $\sqrt{73}$ cm e $\sqrt{52}$ cm. O menor cateto mede, em cm:

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8

53. Um octaedro regular cuja aresta mede 10 cm tem diagonal medindo, em cm:

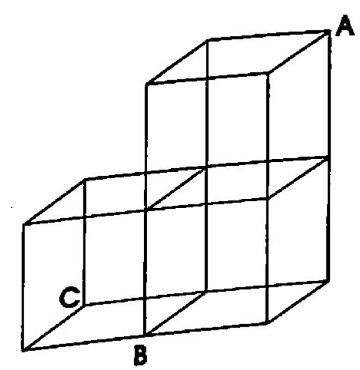
A) 10 B) $10\sqrt{2}$ C) $10\sqrt{3}$ D) 20 E) nda

O enunciado seguinte refere-se às questões 54 e 55.

Três cubos idênticos, de aresta 10 cm, são agrupados e três de seus vértices, designados por A, B e C, são assinalados, conforme mostra a figura.

54. O perímetro do triângulo ABC é, em centímetros:

A) $30\sqrt{2} + 10\sqrt{6}$
B) $20\sqrt{6} + 10\sqrt{2}$
C) $30\sqrt{2} + 20\sqrt{6}$
D) $20\sqrt{6} + 20\sqrt{2}$
E) nda

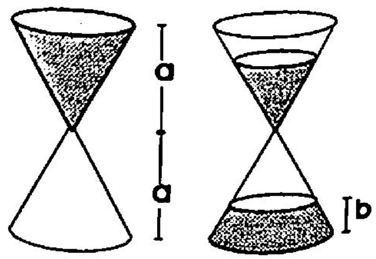


55. O triângulo ABC é:

A) retângulo escaleno
B) acutângulo
C) obtusângulo
D) retângulo isósceles
E) retângulo equilátero

57. Uma ampulheta pode ser considerada formada por dois cones retos de altura a, unidos pelo vértice. Inicialmente, o cone superior encontra-se completamente cheio. Após algum tempo, metade da areia contida no cone superior passa para o inferior, onde atinge uma altura b, a partir da base (figura).
A razão $\frac{a}{a-b}$ é igual a:

A) 2
B) $\sqrt[3]{2}$
C) $\sqrt{2}$
D) $\frac{1}{2}$
E) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$



59. No plano cartesiano Oxy, representa-se a região R constituída pelos pares (x,y) que satisfazem simultaneamente às relações:

$$\begin{cases} 3 \le x + y \le 10 \\ 0 \le y \le 7 \\ 0 \le x \le 6. \end{cases}$$

A região R tem a forma de um:

A) triângulo
B) hexágono
C) setor circular
D) paralelogramo
E) Nenhuma das anteriores é correta.

61. No plano Oxy, considere os seguintes conjuntos dos pontos:
$A = \{(x,y) \mid |x| \ge 3\}$, $B = \{(x,y) \mid |y| \ge 4\}$, $C = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 25\}$.
A área do conjunto $C - (A \cup B)$ é igual a:

A) 12
B) 24
C) 25
D) 36
E) 48

63. Se todos os salários dos funcionários de uma empresa forem aumentados de uma quantia fixa, equivalente a 100 dólares, qual das medidas estatísticas abaixo não sofrerá alteração?

A) A média dos salários.
B) A mediana.
C) A moda.
D) O desvio padrão.
E) Todas as medidas citadas ficarão alteradas.

65. Em quantos subconjuntos de $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ a soma dos elementos é ímpar?

A) 1
B) 5
C) 6
D) 16
E) 32

67. Numa dada região, a probabilidade de chover num dia de verão é de 50%, independentemente de chover ou não em qualquer outro dia do verão. Nessa região, a probabilidade de chover em ambos os dias de um fim de semana (sábado e domingo) é igual a:

A) 20%
B) 25%
C) 50%
D) 75%
E) 100%

69. Uma solução da equação $kx^3 + 9x^2 + 9x + 3 = 1993$ é $x = 10$. Para que a equação

$$kx^4 + 7x^3 + \alpha x^2 + 4x + 6 = 17546$$

também tenha $x = 10$ como uma das soluções, o valor de α deve ser igual a:

A) 10
B) 5
C) 3
D) 2
E) nda

71. Sendo i a unidade imaginária, a soma $\sum_{k=1}^{30} i^k$ é igual a:

A) $i - 1$
B) $-i - 1$
C) $i + 1$
D) $-i + 1$
E) 0

73. S_1 é o conjunto solução do sistema $\begin{cases} ax + by = 1 \\ cx + dy = 1 \end{cases}$ e S_2 é o do sistema

$$\begin{cases} ax + by = 1 \\ 2ax + 2by = 2. \end{cases}$$

Dado que $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$, podemos concluir que:

A) $S_1 = \emptyset$
B) $S_2 = \emptyset$
C) $S_1 \cap S_2 = \emptyset$
D) $S_1 \subset S_2$
E) $S_2 \subset S_1$

75. A inversa da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{é a matriz} \quad A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & x & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

O valor de x é:

A) -1
B) 0
C) 1
D) 2
E) 3

Respostas dos probleminhas (p. 47)

1. De baixo para cima: 7, A, D, 2, 8, 3, V, 4, 9, 5, R, 6, 10.
2. Procure múltiplos de 31 entre 1800 e 1900. Dois deles dão as respostas 40 e 9.
3. Hoje é dia 01/01. O aniversário de Sílvia é no dia 31/12.

Problemas

Flávio Wagner Rodrigues
IME-USP

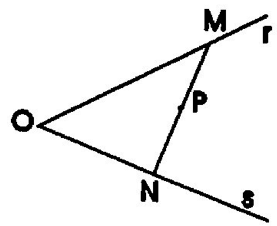
Soluções e Sugestões:
RPM – Problemas
Caixa Postal 20570
01452-990 São Paulo, SP

Problemas

110. Mostre que a equação $x^3 - 6px^2 - 2p^3 = 0$, onde p é um número natural, não admite nenhuma raiz que seja um número natural.
(Proposto por *Hamilton Guidorizi*, SP)

111. Considere o experimento que consiste em cinco lançamentos independentes de um dado perfeito. Determine a probabilidade de que o produto dos números observados seja múltiplo de 10.

112. Na figura são dadas duas semiretas r e s, por O, e um ponto P. Entre todos os triângulos OMN, com M e N variando em r e s, respectivamente, tais que $P \in MN$, determinar o de área mínima.
(Proposto por *Cláudio Possani*, SP.)



113. Determinar todos os números naturais n para os quais $\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots \binom{n}{n-1}$ são todos números pares.

... e probleminhas

1. Em um baralho comum, selecione as cartas de um mesmo naipe (por exemplo, as 13 cartas de ouros). Vire as cartas com a face para baixo e efetue as seguintes operações: a primeira carta de baixo é passada para cima e a segunda é virada na mesa. Repita essa operação sucessivamente até que todas as cartas sejam viradas na mesa. Como você deve arrumar as cartas inicialmente de modo que as cartas sejam viradas em ordem crescente: A, 2, 3, ..., V, D, R?
(Sugerido por *Bolivar Pereira da Silva*, SP.)

2. Ao morrer, a idade de José era 1/31 do ano em que nasceu. Que idade tinha José em 1900?

3. Anteontem Sílvia tinha 18 anos. No ano que vem, ela vai fazer 21 anos. Que dia é hoje? Em que dia Sílvia faz anos?
(2 e 3 tirados da revista *Mathematics Teacher*, vol. 79, n. 3, 1986)

(*V. respostas na p. 45.*)

Soluções dos problemas propostos na RPM 23, 1º semestre, 1993

102. Seja $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ um polinômio com coeficientes inteiros. Suponha que a equação $P(x) = 0$ tem três raízes inteiras distintas. Mostre que a equação $P(x) - 1 = 0$ não admite nenhuma raiz inteira.

Solução:

Denotando por r_1, r_2, e r_3 as três raízes inteiras, distintas, de $P(x) = 0$, podemos escrever:

$$P(x) = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3).$$

Admitindo que a equação $P(x) - 1 = 0$ tem uma raiz inteira x_0, segue-se que:

$$(x_0 - r_1)(x_0 - r_2)(x_0 - r_3) = 1.$$

Para que o produto de três números inteiros seja igual a 1 existem duas possibilidades:

1) Os três números são iguais a 1.

2) Dois desses números são iguais a -1 e o terceiro é igual 1.

Em qualquer dessas duas possibilidades pode-se concluir que a equação $P(x) = 0$ teria raízes iguais, o que contradiz a hipótese de que as três raízes são distintas. Segue-se, portanto, que a equação $P(x) - 1 = 0$ não pode ter raízes inteiras ▪

[Solução enviada por *Trajano Pires de Nóbrega Neto*, S. José do Rio Preto, SP.]

103. Um múltiplo de 17 quando representado na base 2 tem exatamente 3 dígitos iguais a 1. Qual é o número mínimo de zeros que essa representação deverá conter?

Solução:

Suponha que para $m \in \mathbb{N}$:

$$17m = 2^{a_1} + 2^{a_2} + 2^{a_3} \qquad \text{com} \qquad 0 \le a_1 < a_2 < a_3 .$$

Temos

$$m = \frac{2^{a_1} + 2^{a_2} + 2^{a_3}}{17} = q_1 + q_2 + q_3 + \frac{r_1 + r_2 + r_3}{17},$$

onde q_i e r_i são o quociente e resto da divisão de 2^{a_i} por 17. Estudando as possibilidades na tabela que dá o resto r_n da divisão de 2^n por 17:

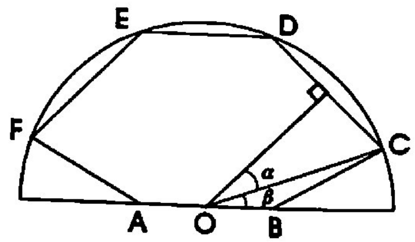
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
r_n	1	2	4	8	-1	-2	-4	-8	1

obtemos a menor solução para $a_1 = 0$, $a_2 = 5$ e $a_3 = 8$. Logo, $17m = 2^0 + 2^5 + 2^8$, cuja representação na base 2 tem seis zeros ▪

104. Determinar o raio do semicírculo no qual está inscrito um hexágono cujos seis lados são iguais e têm por comprimento $a > 0$.

Solução:

No caso em que o hexágono inscrito no semicírculo de centro O e raio R tenha um lado AB contido no diâmetro, onde O é ponto médio de AB, podemos mostrar que $R = a\sqrt{2}$. De fato, pela lei dos cossenos no triângulo OBC:



$$3a^2 = 4R^2 - 4aR\cos\beta, \qquad (1)$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{a}{2R} \qquad \text{e} \qquad \beta + 3\alpha = \frac{\pi}{2};$$

$$\cos\beta = \operatorname{sen}3\alpha = -4\operatorname{sen}^3\alpha + 3\operatorname{sen}\alpha = -\frac{a^3}{2R^3} + \frac{3a}{2R} \qquad (2)$$

De (1) e (2) : $\quad 2a^4 - 9a^2R^2 + 4R^4 = 0, \quad$ donde, $\quad R = a\sqrt{2}$ ▪

Sabemos, por métodos elementares, que todo hexágono de lados iguais inscrito num semicírculo tem um lado AB contido no diâmetro, com O no interior de AB. E, por métodos não elementares, que existem hexágonos de lados iguais inscritos, de modo que O não é ponto médio de AB e, nestes casos,

$R \neq a\sqrt{2}$. Como estes casos não estão completamente estudados, esperamos novas sugestões dos leitores. Observamos que foram aceitas as soluções para o primeiro caso.

105. Sabendo-se que a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ satisfaz a condição $f(n+1) > f(f(n))$ para todo $n \in \mathbb{N}$, provar que $f(n) = n$.

Solução:

Vamos observar, inicialmente, que a função f atinge o seu valor mínimo para $n = 1$.

De fato, o conjunto $\{f(n) | n \in \mathbb{N}\}$ é um conjunto de números naturais e, portanto, tem um menor elemento.

Se $k > 1$, $f(k) > f(f(k-1))$ e, portanto, nenhum $f(k)$, com $k > 1$, pode ser o mínimo do conjunto dos valores de $f(n)$. O mesmo argumento mostra que $f(2)$ é o mínimo do conjunto $\{f(2), f(3), \dots\}$. Segue-se, então, que:

$$f(1) < f(2) < f(3) < \dots < f(n). \qquad (A)$$

Como $f(k) \ge 1$ para todo k, segue-se de (A) que $f(n) \ge n$.

Suponha que para algum n tenhamos $f(n) > n$. Segue-se que $f(n) \ge n+1$ e de (A) vem, então, que $f(f(n)) \ge f(n+1)$, o que contradiz a hipótese do problema. Conclui-se, então, que $f(n) = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ ▪

Obs. A inclusão desse problema na RPM 23 foi sugerida pelo professor Ângelo Barone Netto. Faltou, no entanto, como ele bem observou, mencionar que o problema fizera parte da Olimpíada Internacional de 1977. Falha nossa. ... E parece que uma falha puxa outra. A RPM acabou publicando dois problemas com o número 105: o último da RPM 23 e o primeiro da RPM 24. Para manter a contagem dos problemas propostos, não haverá nenhum problema 109.

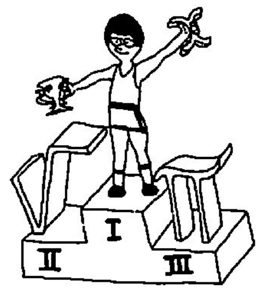
Relação dos leitores que enviaram soluções dos problemas 102 a 105 da RPM 23

Alceu de A. Ramos (SP) - 103
Amadeu C. de Almeida (RJ) - 102-103
Antonio A. S. Dias (MG) - 104
Carlos A.da S.Victor (RJ) - 102-103-104
Dorival Antonio de Mello (SP) - 105
Douglas Rosseto (SP) - 103
Edson R. Abe (SP) - 102-103-104
Evandro de Freitas (RJ) - 102-104
Geraldo Perlino Jr. (SP) - 103-104
João Batista Xavier (SP) - 102-103-104
João F. Barros (SP) - 104
José A. da Rocha Neto (RJ) - 105
José João Rosseto (PR) - 102
Marcelo de C. Guimarães (EUA) - 104
Marcelo Gamba (SP) - 104
Mário Luiz A.de Lima (RJ) - 104
Miguel de C. Neves (RJ) - 104
Ricardo R. Ferro (RJ) - 102-103-104
Romel S. França (RJ) - 104
Trajano P. da N. Neto (SP) - 102
Tsunediro Takahashi (SP) - 102-103-104
Vicente W.M.Gaeta (AM) - 104

Olimpíadas

Elio Mega
Etapa, SP

Correspondência:
RPM – Olimpíadas
Caixa Postal 20570
01452-990 São Paulo, SP



OLIMPÍADAS BRASILEIRAS

Por ocasião da redação desta secção, os trabalhos de preparação para as Olimpíadas Internacionais tornam-se mais intensos: é a época da definição das equipes que irão representar o Brasil nas várias competições de que participa em nível internacional.

O leitor que nos tem acompanhado deve lembrar-se do sistema utilizado pela Comissão de Olimpíadas para constituir suas equipes: a premiação na Olimpíada Brasileira de 93 (Júnior ou Sênior) é a condição necessária e a classificação obtida tem grande peso na avaliação final, que depende também do desempenho nas listas de exercícios enviadas periodicamente a todos os premiados, bem como da nota obtida na prova usualmente aplicada no final da preparação. Essa prova, evidentemente, é feita somente nas cidades que têm estudantes participando do processo de seleção. Neste ano, a prova foi realizada no dia 28 de maio em Campina Grande, Fortaleza, Juiz de Fora, Maceió, Rio de Janeiro, Salvador e São Paulo.

A prova, para ser resolvida em 4,5 horas, constou das 5 questões que apresentamos a seguir:

1. Sejam $ABCD$ um quadrilátero inscritível, M o ortocentro de ABC e N o ortocentro de ABD. Prove que $MNDC$ é um paralelogramo.

2. Sejam a, b, c, d números reais estritamente positivos. Prove que
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{c}+\frac{16}{d} \geq \frac{64}{a+b+c+d}.$$

3. Em Pasárgada existem N cidades e $2N-1$ estradas, sempre de mão única, ligando essas cidades; cada estrada liga apenas duas cidades. Pasárgada é totalmente interligada por essas estradas, isto é, a partir de qualquer cidade é possível chegar a qualquer outra por uma seqüência de estradas. Prove que existe alguma estrada que pode ser interditada de forma que Pasárgada continue totalmente interligada pelas estradas restantes.

4. Seja $A \subseteq Z$ com as seguintes propriedades:
(i) $0 \in A$,
(ii) Se $n \in A$, então $3n \in A$, $3n+4 \in A$ e $3n+11 \in A$.
Prove que dado $k \in Z$ existem $a, b \in A$ com $a-b=k$.

5. Seja $P_1P_2P_3P_4P_5$ um pentágono plano não entrecruzado que esteja totalmente contido entre a reta r passando por P_1 e P_5 e a reta s paralela a r passando por P_3. Seja $a>0$. Prove que podemos escolher pontos P_6 e P_7 (no plano), com $\overline{P_5P_6}=a$, de forma que seja possível ladrilhar o plano com ladrilhos congruentes ao heptágono não entrecruzado $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7$.

Definidas as equipes (4 estudantes para a Cone Sul, 4 estudantes para a Ibero-Americana e 6 estudantes para a Internacional), inicia-se a parte mais difícil, ou seja, os arranjos para as viagens, incluindo, freqüentemente, as vicissitudes da obtenção de recursos para as passagens. Quando as verbas oficiais não são suficientes, os participantes procuram ajuda externa para poderem viajar. Mais de uma vez professores e estudantes pagaram suas próprias passagens; tem acontecido, com maior freqüência, de escolas particulares, institutos, fundações ou empresas pagarem as passagens de alguns estudantes e professores acompanhantes.

OLIMPÍADAS REGIONAIS

Temos dado bastante ênfase à Olimpíada Brasileira nesta secção. Chegou o momento de focalizarmos as olimpíadas regionais, visto que estas são igualmente importantes e, sob alguns aspectos, mais importantes ainda. As regionais são mais adequadas às condições locais e algumas delas, como a carioca e a paulista, por exemplo, envolvem um número muito grande de participantes, muitas vezes maior do que na própria olimpíada nacional.

A Olimpíada de Matemática do Estado de São Paulo, organizada pela Academia de Ciências de São Paulo, é feita em três fases: a primeira é realizada pelas escolas participantes, que enviam, até julho, uma lista dos 5 estudantes que irão competir na próxima fase.

Em geral, em outubro, são realizadas as provas da segunda fase, que irão definir quais estudantes irão participar da prova final.

Tanto a prova da 2ª fase quanto a prova final são elaboradas por uma Comissão Central, que prepara as questões com base num programa previamente divulgado entre as escolas participantes. Esse programa leva em conta o currículo oficial das escolas do Estado.

Na fase final são feitas duas classificações distintas: uma para as escolas particulares, outra para as escolas públicas. Os alunos classificados para a fase final recebem certificados de participação e os alunos premiados recebem livros, calculadoras e medalhas. Os alunos das escolas públicas, classificados nos primeiros lugares, oriundos de famílias carentes, podem ganhar prêmios muito maiores: bolsas de estudos nas melhores escolas de São Paulo.

Em 1993, 74 escolas estaduais e 55 escolas particulares enviaram finalistas para a prova realizada em novembro. Na solenidade de entrega dos prêmios, cerca de 800 estudantes, familiares e professores vibraram muito com a festa.

Nos últimos anos, têm participado da Olimpíada Paulista alunos da 6ª e 8ª séries do 1º grau e alunos da 2ª série do 2º grau. Para que o leitor possa ter uma idéia do tipo de questões da fase final da olimpíada, escolhemos algumas questões propostas para alunos da 8ª série em algumas dessas competições.

01. (1982) Em um barbante, unido pelas pontas, existem 12 nós igualmente espaçados. Escolhem-se três destes nós para vértices de um triângulo que será formado esticando-se o barbante entre os vértices escolhidos. O perímetro do triângulo é o comprimento do barbante.

    a) Quantos triângulos diferentes existem nestas condições ?

    b) Qual deles tem área máxima ? Qual é esta área máxima ?

02. (1983) Um número inteiro dado, de quatro algarismos, é tal que a soma dos quadrados dos algarismos das extremidades é igual a 130, enquanto a soma dos quadrados dos algarismos do meio é igual a 100. Além disso, subtraindo do número dado o número formado invertendo-se a ordem dos algarismos, obtém-se a diferença 1818. Determine o número dado.

03. (1983) A tela de um microcomputador apresenta números inteiros de 1 a 20 e está programado da seguinte maneira:

    1 - no primeiro toque, aparecem todos os números,

    2 - no segundo toque, apagam-se todos os números pares,

    3 - no terceiro toque, os números múltiplos de três, que estavam na tela, desaparecem e os múltiplos de três que estavam apagados aparecem na tela,

    4 - no quarto toque, repete-se o processo anterior com os múltiplos de quatro,

    5 - assim, sucessivamente, com os múltiplos de cinco, seis, sete, etc., até vinte.

    Agora, pergunta-se:

    (a) Depois do vigésimo toque, quais são os números que aparecerão na tela do computador ?

    (b) Se a tela apresentasse números inteiros de 1 a 200, quais os números que permaneceriam na tela após o 200º toque ?

    (c) Se você tiver tempo, tente justificar sua resposta anterior.

04. (1984) Em um armazém há um certo número de fardos, todos iguais. Usando um caminhão grande, capaz de transportar 60 fardos em cada viagem, são necessárias n viagens para transportar todos os fardos, sendo que, na última delas, sobra lugar para mais 14 fardos. Se fosse usado um caminhão pequeno, capaz de levar 25 fardos em cada viagem, mesmo aumentando de 7 o número de viagens, faltaria espaço para alguns fardos. Porém, com uma outra viagem a mais, sobraria espaço. Determine o número n de viagens necessárias para transportar todos os fardos com o caminhão grande.

05. (1985) $(XY).(ZY) = TTT$. Na equação, XY representa um número de 2 algarismos distintos, o mesmo acontecendo com ZY, enquanto TTT representa um número com 3 algarismos iguais: a) Demonstre que TTT é divisível por 37.

    b) Determine X, Y, Z e T.

Livros

Augusto Cesar Morgado
Eduardo Wagner

Os dois livros resenhados a seguir fazem parte da **Coleção do Professor de Matemática**, editada pela Sociedade Brasileira de Matemática (Estrada Dona Castorina, 110 – 22460-320 Rio de Janeiro, RJ). Resenhas de outros títulos da coleção encontram-se na **RPM** 20, 21 e 22.

CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

Eduardo Wagner
(com a colaboração de *José Paulo Q. Carneiro*)
IMPA-VITAE, 1993

Em todas as discussões de currículos, a Geometria é sempre citada como de vital importância para o desenvolvimento do raciocínio, compreensão inicial de uma axiomática, etc. No entanto, na prática é pouco ensinada e muitas vezes com ênfase em aspectos algébricos menos relevantes. Para agravar essa situação, o estudo das construções geométricas está afastado dos currículos da maioria das faculdades de Matemática do nosso país.

Nesse panorama é que surge o livro *Construções geométricas*, do professor Eduardo Wagner. Com uma extrema clareza, inúmeras construções são descritas, justificadas e empregadas para resolver interessantes problemas.

Nos seus cinco capítulos, além das construções elementares, como a da mediatriz ou a do arco capaz, outros tópicos de muito interesse para os professores são abordados, como, por exemplo, a resolução geométrica de equações do 2º grau onde os coeficientes são segmentos dados, como um caso particular da construção geométrica de uma expressão algébrica envolvendo segmentos.

O estudo de figuras equivalentes mereceu um capítulo próprio, assim como um primoroso, sobre construções aproximadas (polígonos de 7, 9, 11, 13, 14, ... lados, o número π, dentre outros).

Transformações geométricas como as translações, rotações, reflexões e homotetias são apresentadas e utilizadas para elegantes soluções de problemas. Aliás, dezenas de bons problemas propostos e um esmerado apêndice do professor José Paulo Q. Carneiro sobre construções possíveis com régua e compasso fazem desse livro referência obrigatória para professores do 1º e 2º graus.

PROGRESSÕES E MATEMÁTICA FINANCEIRA

Augusto Cesar Morgado, Eduardo Wagner, Sheila C. Zani
IMPA-VITAE, 1993

Os dois primeiros capítulos tratam das progressões aritméticas e geométricas e já diferem dos textos mais comuns ao destacar as progressões geométricas como seqüências que possuem taxa de crescimento constante. Esse aspecto das progressões geométricas é explorado em numerosos exemplos. Os exercícios desses capítulos são abundantes e interessantes, com diversas aplicações, destacando-se as escalas de Fechner, equações em diferenças de primeira e segunda ordens, e várias situações de finanças, o que representa uma ótima introdução ao capítulo de Matemática Financeira.

No capítulo três, a Matemática Financeira é abordada da forma mais prática possível, com exemplos reais e utilizando princípios claros e gerais para sistematizar a teoria. Tópicos como: equivalência de capitais, taxa mínima de atratividade, a diferença entre taxas proporcionais e equivalentes, séries uniformes, determinação da vida econômica de um bem, sistemas de amortização (S.A.C., tabela Price), e outros, são tratados com bastante objetividade e numa seqüência que favorece, e muito, a compreensão dos novos temas. Muitos exercícios complementam o capítulo, e os autores inclusive assinalaram aqueles que devem ser resolvidos com o auxílio da calculadora, abolindo aquelas ultrapassadas tabelas.

O livro ainda possui sugestões para a resolução dos exercícios mais difíceis ou "perigosos" e as respostas de todos os 244 exercícios propostos.

MATEMÁTICA E EDUCAÇÃO – Alegorias, tecnologias e temas afins

Nilson José Machado
Coleção Questões da Nossa Época, vol. 2.
Cortez Editora, 1992.

Este é um pequeno grande livro. Nas suas pouco mais de cem páginas, e no formato de bolso, são discutidas questões relevantes aos que se preocupam com o que fazem ou o que podem vir a fazer na sala de aula.

Nele são colocadas e analisadas questões como a utilização de jogos na sala de aula e os mais surpreendentes efeitos gerados com isso. O excesso de formalismo é ridicularizado com deliciosos exemplos, como a teoria axiomática dos fantasmas e a Cocotologia, definida como a ciência de construir passarinhos de papel.

A segunda metade do livro traz interessantes e importantes considerações sobre medida e avaliação, e até sobre a possibilidade e a necessidade da utilização de computadores e outros recursos em sala de aula. Considerações essas embasadas historicamente e levando em conta a realidade brasileira.

O livro do professor Nilson certamente será muito útil a todos os que desejam enriquecer a sua atuação em sala de aula.

As três resenhas acima são da autoria de *Raul Francisco Werneck Agostino*, PUC-RIO.

O leitor pergunta

Vera Helena Giusti de Souza
IME-USP

Envie suas perguntas para
RPM – O leitor pergunta
Caixa Postal 20570
01452-990 São Paulo, SP

– Um leitor de São José do Rio Preto, SP, nos faz a seguinte pergunta: *Como devemos explicar a um aluno da 8ª série o que ocorre numa questão como esta:*
"Calcule o valor de x $(x > 0)$ na divisão

$$\begin{array}{l|l} 3{,}25 & \underline{\ x\ } \\ 1 & x \end{array}$$

Resolução: $x^2 + 1 = 3{,}25 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 2{,}25 \quad \Rightarrow \quad x = 1{,}5\,.$

Verificação: $\begin{array}{l|l} 3{,}25 & \underline{1{,}5\ } \end{array}$. O quociente *não* é 1,5 e o resto *não* é 1."

RPM: O esquema

$$\begin{array}{l|l} 3{,}25 & \underline{\ x\ } \\ 1 & x \end{array}.$$

pode ser interpretado como equivalente a $3{,}25 = x^2 + 1$, mas nada tem a ver com o *quociente* e *resto* da divisão euclidiana.

No conjunto dos números naturais, dados a e b, $b \neq 0$, existe um único par de números, q e r, denominados, respectivamente, *quociente* e *resto*, tais que $a = bq + r$, com $0 \leq r < b$.

Essa afirmação *não* é verdadeira no conjunto dos números racionais. Por exemplo, dados 3,25 e 1,5, existem infinitos pares q e r tais que $3{,}25 = 1{,}5q + r$, com $0 \leq r < 1{,}5$:

$$\begin{array}{rclcl} 3{,}25 & = & 1{,}5 \times 1{,}2 & + & 1{,}45 \\ 3{,}25 & = & 1{,}5 \times 1{,}3 & + & 1{,}3 \\ 3{,}25 & = & 1{,}5 \times 1{,}5 & + & 1 \\ 3{,}25 & = & 1{,}5 \times 2 & + & 0{,}25 \\ 3{,}25 & = & 1{,}5 \times 2{,}1 & + & 0{,}1 \\ & & & & \text{etc.} \end{array}$$

No conjunto dos números racionais, a palavra *quociente* tem outro significado: dados os números racionais a e b, $(b \neq 0)$, existe um único racional q, tal que $a = bq$. Esse número q é o *quociente da divisão de a por b.*

Para obter esse número q podemos usar o algoritmo da divisão:

$$\frac{3{,}25}{1{,}5} = \frac{325}{150} = 2 + \frac{25}{150} = 2{,}1666\ldots\,,$$

mas o *quociente* da divisão euclidiana no conjunto dos números naturais e o *quociente* da divisão no conjunto dos racionais podem não ser o mesmo número.

– Uma leitora de Minas Gerais nos pergunta como explicar a seguinte "igualdade":

$$\left.\begin{array}{rclclcl} \sqrt{(-1)\cdot(-1)} & = & \sqrt{1} & = & 1 & & \\ \sqrt{(-1)\cdot(-1)} & = & \sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} & = & i^2 & = & -1 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad 1 = -1\,!$$

RPM: Na verdade, existem duas definições envolvidas no problema:

1ª) A raiz quadrada de um número real, quando estamos trabalhando no conjunto dos números reais, e

2ª) a raiz quadrada de um número complexo, quando estamos trabalhando no conjunto dos números complexos.

A primeira definição é:

A raiz quadrada de um número real a, $a \geq 0$, é o número real positivo x, tal que $x^2 = a$. Em símbolos:

$$\sqrt{a} = x \quad \iff \quad x^2 = a \ \text{ e } \ x \geq 0\,.$$

E, ao escrevermos $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\,\sqrt{b}$, fica subentendido que $a \geq 0$ e $b \geq 0$.

A segunda definição é:

A raiz quadrada de um número complexo $z = a + bi$ é o conjunto de todos os números complexos $c + di$ tais que $(c + di)^2 = a + bi$.

Assim, $\sqrt{-1} = \{i,\ -i\}$, porque $i^2 = (-i)^2 = -1$.

Analogamente, $\sqrt{1} = \{1,\ -1\}$, porque $1^2 = (-1)^2 = 1$.

No conjunto dos números complexos, "produtos" indicados por $\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} = (\{i,\ -i\}\cdot\{i,\ -i\})$ precisam ser definidos.

Por que definições diferentes?

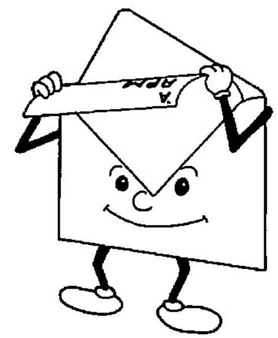
No conjunto dos números reais, se $a > 0$, a equação $x^2 = a$ tem duas raízes: uma é positiva e a outra é negativa, ficando fácil caracterizar uma delas, como é feito na definição, em $\mathbb{R}$, de $\sqrt{a}$.

Acontece que, no conjunto dos números complexos, não se pode falar em "positivo" ou "negativo". Na **RPM 2**, p. 9, na seção *Conceitos e controvérsias*, encontra-se a pergunta: " $2 + 3i$ ou $3 + 2i$: qual destes números é o maior?". A resposta (nenhum dos dois) contém uma clara demonstração do seguinte fato: O corpo dos números complexos não pode ser ordenado.

Assim, no conjunto dos números complexos, não existe o conceito de "positivo" ou "negativo" e torna-se conveniente definir $\sqrt{z}$ como sendo o conjunto de números cujo quadrado é z.

Cartas do leitor

Correspondência:
RPM – Cartas do leitor
Caixa Postal 20570
01452-990 São Paulo, SP



• A ordem dos fatores

Recebemos carta de uma diretora de escola, dando-nos conta de uma dúvida levantada por professores de Matemática da 5ª série quanto à nomenclatura utilizada na multiplicação: em 3×4, qual é o multiplicando e qual o multiplicador?

RPM: A multiplicação de números (naturais, inteiros, racionais ou reais) é comutativa, ou seja, tanto faz calcular 3×4 quanto 4×3. Daí a vantagem de chamar de *fatores* os números que se multiplicam, sem fazer distinção na ordem desses números. Acontece que no algoritmo da multiplicação o papel de cada um dos fatores é diferente, daí a necessidade de escolher um como multiplicando e outro como multiplicador. Quando se pretende, por exemplo, calcular à mão o produto $6\,789 \times 101$, a ordem dos fatores pode facilitar ou complicar o cálculo. Mas é só na montagem do algoritmo que se estabelece a diferença. Ao escrevermos $101 \times 6\,789$ ou $6\,789 \times 101$, não está fixado qual dos fatores será escolhido como multiplicando e qual deles será o multiplicador. Alunos diferentes podem mesmo fazer escolhas distintas, sem que isso represente erro. No cálculo do produto 508×805, por exemplo, essa escolha é indiferente. Só uma observação a mais: ao descrever a introdução feita ao assunto, a colega apresenta alguns passos, em que o professor usa material e desenhos para ilustrar a multiplicação de números naturais como uma simplificação da adição de parcelas iguais. Nessa apresentação aparecem os termos *subconjunto* e *conjuntos equipotentes*. Esses termos podem ser usados entre nós, professores, mas usá-los com as crianças é inverter a ordem natural e histórica do desenvolvimento de tais conceitos. Lembramos aqui o artigo *A carroça na frente dos bois* (**RPM** 7, p. 32).

• Mudança na Coordenação do SPEC

Escreve-nos a Professora *Clélia Maria de Sousa de Oliveira*, comunicando sua decisão, por motivos de ordem pessoal, de afastar-se da função de coordenadora do SPEC (Subprograma de Educação para Ciências), projeto do PADCT (Programa de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico) coordenado pela CAPES/MCT. Em carta de 21 de março de 1994, ela apresenta o novo coordenador, Professor *Paulo Roberto Menezes Lima*. Esse subprograma tem provido grande parte do sustento da **RPM**, desde seus primeiros números. Nesta época em que surgem tantas

informações de malversação de dinheiro público, cabe uma nota de reconhecimento a esse programa, que vem localizando e apoiando equipes interessadas na melhoria do ensino de Ciências e Matemática em nosso país. Temos tido às vezes dificuldades na liberação de verbas, por falta delas, mas contamos sempre com a dedicação, eficiência e sugestões construtivas da coordenação do programa.

• O leitor sugere

– Interior e Exterior.

O colega *Wyrken Paim da Costa*, de Assis, SP, sugere que a **RPM** tenha mais números por ano, ainda que com menor número de páginas e, se possível, que seja distribuída em bancas. Pede ainda que o comitê traga notícias do exterior, com inovações que estejam ocorrendo por lá, e do interior de São Paulo, com informações sobre cursós de aperfeiçoamento em Matemática.

RPM: Os quatro números por ano continuam sendo nossa meta, mas por ora temos problemas financeiros, e teríamos ainda aqueles ligados à estrutura administrativa e talvez mesmo falta de artigos. Quanto à publicação de informações, temos duas seções que não têm saído e que poderiam atender à solicitação do leitor: *De olho no mundo* e *O que vai por aí*. Colegas que coordenam cursos de aperfeiçoamento podem usar a seção *O que vai por aí* para divulgá-los. O problema é que precisa ser com grande antecedência. Quanto às inovações do exterior, temos colegas retornando de estágios em universidades estrangeiras e eles podem contar um pouco do que viram por lá e que interesse aos nossos leitores. Esperamos por essas notícias.

– *Novamente História da Matemática, a sala de aula e as séries do nível Fundamental.*

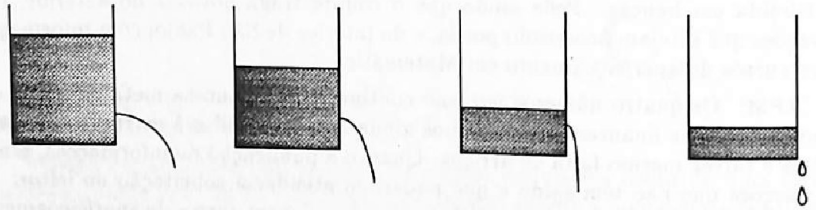
O colega *Jorge Melhado*, de São Paulo, SP, conheceu a **RPM** há poucos meses e ficou entusiasmado com o fato de haver uma revista voltada exclusivamente ao processo de ensino-aprendizagem da Matemática. Sugere que sejam publicados mais artigos sobre a História da Matemática, em que sejam contadas vidas de grandes matemáticos, suas inspirações, suas motivações e aplicações de suas descobertas. Sugere ainda que haja mais detalhes dos assuntos e que estes sejam abordados numa linguagem mais fácil. A colega *Iracilda Viana*, de São José do Calçado, ES, teve uma surpresa quando encontrou a **RPM** na bibliografia do concurso para o Magistério em seu Estado. Na carta em que nos fala sobre isso, sugere a publicação de mais assuntos ligados à prática da sala de aula. E a colega *Maria de Fátima da Silva Pereira*, de Nova Friburgo, RJ, pede a inclusão de atividades relacionadas a assuntos da 5ª a 8ª séries, com sugestões de abordagem em sala de aula.

RPM: Professores e autores que nos lêem, escrevam a respeito! Cremos, entretanto, que são pouquíssimos os fatos históricos que caibam em artigos da Revista com descrição de possíveis motivações de grandes matemáticos. O entendimento de tais motivações exige que se exponha todo o contexto da época. Felizmente as editoras estão acordando para a necessidade de publicar livros de História da Matemática e alguns textos estão sendo traduzidos, onde, então, pode ser feita uma análise mais longa dos fatos e das circunstâncias em que eles se deram.

• **O leitor critica**

– *Vazamento de barris ... e de hipóteses.*

Abílio José Cardoso, de São José dos Campos, SP, professor de Física que lê sempre a RPM de um colega professor de Matemática, faz algumas observações ao enunciado do probleminha sobre o escoamento de vinho (RPM 24, p. 52). Observa que, num vazamento, a vazão não é, em geral, constante, dependendo, por exemplo, da diferença de cotas entre a superfície livre e o local de escoamento. Essa idéia é intuitiva e pode ser observada no funcionamento de uma talha tradicional de água:



Ainda que o orifício seja muito estreito para que se possa pensar em gotas idênticas, ainda assim a freqüência de queda das gotas variaria com o nível do líquido. Sugere, então, que o enunciado do problema inclua a hipótese simplificadora de que a vazão seja suposta constante. De quebra, ainda sentiu falta da informação de que os dois barris estavam completamente cheios no início da contagem de tempo. Na condição de físico, lembra que, embora seja louvável a idéia de "vestir" um problema abstrato com uma "roupa" concreta, é necessário o devido cuidado para fornecer todas as informações. Pois para um aluno soa como "traição" ouvir o professor começar a resolução de um problema dizendo "devemos supor que...". Pior ainda seria o professor usar tais restrições implicitamente, sem declará-las.

RPM. Mais uma vez, agradecemos a atenção e observações tão pertinentes.

– *Cosseno ou co-seno?*

O colega *Fernando Canevazzi*, de Araçatuba, SP, corrige a RPM, que escreveu cosseno (RPM 23, p. 24 e seguintes) ao invés de co-seno. O colega se ampara no dicionário do Aurélio.

RPM: Se o colega for um pouquinho mais adiante no Aurélio, vai encontrar a palavra cosseno, como variante de co-seno. No entanto, na recém-editada Enciclopédia de Koogan e Houaiss, aparece somente a forma co-seno (seno do complemento de um ângulo), como prefere o colega. Coisas da nossa língua!

• **Ponto de encontro**

– *Soluções para os desafios dos dominós*

O colega *André Luís Parreira*, de São João Del-Rei, MG, envia uma solução para cada um dos desafios da RPM 24, p. 31, sem descartar a existência de outras.

Aqui vão elas:

0	0	3	2
1	3	1	0
2	0	1	2
2	2	0	1

(1)

2	4	1	3
4	1	3	2
1	1	5	3
3	4	1	2

(2)

4	4	2	0
1	2	3	4
1	3	2	4
4	1	3	2

(3)

1	6	1	1	0	4
6	2	3	0	2	0
3	4	2	3	0	1
0	0	2	2	5	4
2	1	1	5	3	1
1	0	4	2	3	3

(4)

– *O Magicálculo*

A colega *Sonia Marina do Valle*, de Curitiba, PR, responde à questão da RPM 23, p. 34, da seguinte forma: Qualquer número de 3 dígitos acrescidos dos mesmos 3 dígitos, na mesma ordem, dá um número de 6 dígitos que é igual ao produto de 1001 pelo número inicial de 3 dígitos. Sendo $7 \times 11 \times 13 = 1001$, o número de 6 dígitos dividido pelo produto $7 \times 11 \times 13$ dá o número original de 3 dígitos.

• **Estas nossas crianças...**

Escreve-nos nossa colega *Nilda Helena Mendes Evangelista Amora*, de Nova Iguaçu, RJ, contando a descoberta feita por sua filhinha Natália, de 8 anos. Para construir a tabuada do 9, ela faz o seguinte: para calcular 5×9, por exemplo, ela faz $5 - 1$, obtendo o algarismo das dezenas, 4. O algarismo das unidades é o quanto falta deste para chegar a 9, ou seja $9 - 4 = 5$, chegando ao produto 45. Com duas subtrações ela efetua a multiplicação. A colega conta que participou por cinco anos de um grupo de estudos matemáticos, o GEEMANI, de Nova Iguaçu, e sempre passou para a filhinha os ensinamentos matemáticos de modo a fazê-la descobrir por si própria o ponto de chegada. Ela considera que o interesse demonstrado pela sua filhinha pode servir como um incentivo a professores das séries iniciais para que procedam da mesma forma.

RPM: Com efeito, a Natália, aos 8 anos, descobriu nesses casos particulares, a identidade algébrica:

$$9x = (x-1)10 + [9 - (x-1)].$$

• **Palavras de estímulo**

– O aluno de Engenharia de Computação e Matemática da Universidade de Kansas, nos Estados Unidos, *Marcelo de Castro Guimarães*, escreve-nos de Lawrence, Kansas, EUA, contando que seu professor de Análise, conhecedor de espanhol, folheando uma RPM interessou-se pelos artigos, afirmando que não encontrava esse tipo de matéria interessante em livros comuns. Marcelo resolveu, então, traduzir alguns artigos da RPM para o inglês e distribuir cópias entre seus professores de Matemática e Engenharia. Diz ele que foi um "sucesso total": todos os artigos traduzidos foram comentados em sala de aula.

– A colega *Jane Martins Duarte*, de Astolfo Dutra, MG, afirma que usa a RPM para consultas, preparo de aulas, esclarecimento de dúvidas e atualização nos conteúdos. Não conseguiu ainda receber a Revista (por quê?), mas usa a de uma colega.

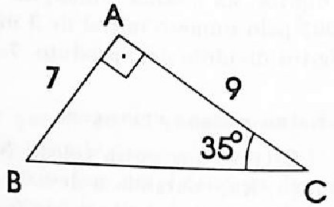
– *Eduardo Grígolo*, de Jundiaí, SP, pede que não deixemos de publicar a **RPM**, ainda que seja preciso provocar um "rebu" nacional, convocar uma "CPI" ...

– O colega *Victor Emanuel Corrêa Lima*, do Rio de Janeiro, RJ, lê a **RPM** há doze anos, o que já se tornou um hábito. Confirma as frases de apoio da página 3 da **RPM** 24.

RPM: A equipe que trabalha para que a Revista chegue às mãos do professor agradece estas e outras manifestações dos seus leitores. De nada adiantará todo o trabalho dessa equipe se a Revista não for realmente utilizada pelos leitores-professores.

• Um problema de precisão

O colega *Marcos Samy Silva*, de Curitiba, PR, chama a atenção, através do seguinte "problema", para a necessidade de trabalhar o estudo de escalas com nossos alunos: Na figura ao lado, calcule $\text{tg } 35°$.



O aluno percebe que alguma coisa não vai bem quando compara o resultado $\text{tg } 35° = 7/9 = 0,777\ldots$ com o da tabela ou aquele obtido numa calculadora, $\text{tg } 35° = 0.7002\ldots$. Com efeito, se o estudante desenhar em escala um triângulo retângulo de catetos 7 e 9, vai encontrar um ângulo de aproximadamente 38° e não 35°, como foi sugerido no enunciado do problema.

RPM: De fato, as escalas estão sempre presentes em nossas atividades cotidianas, mas não têm sido muito trabalhadas em sala de aula.

• Existiu o ano 0?

O colega *Nilton Miguel da Silva*, de Duque de Caxias, RJ, pergunta se Cristo nasceu no ano 0 ou 1; pergunta também qual a necessidade do estudo de complemento, suplemento e replemento, e dos algarismos romanos.

RPM: O ano 1 da Era Cristã é presumivelmente o ano em que Cristo nasceu. Isso significa que não existiu o ano 0 e que Cristo faria 1999 anos no ano 2000. Quanto ao complemento, suplemento e replemento de um ângulo, são alguns nomes que podem facilitar enunciados, como, por exemplo, no Teorema de Tales em que se diz que ângulos colaterais são suplementares. Os exercícios que exigem cálculos algébricos neste capítulo têm o objetivo de trabalhar ao mesmo tempo tópicos de diferentes áreas. Cabe ao professor a dosagem das dificuldades a fim de não torná-los tão "terríveis"! Quanto aos algarismos romanos, eles continuam sendo usados com certa freqüência: escrevemos, por exemplo, século XVI, capítulo IV, volume IX. Eles aparecem em monumentos, relógios, enfim, fazem parte da nossa cultura. Além disso, são um exemplo de um sistema de numeração com regras bem distintas daquelas do sistema que usamos. Há também o fato de não existir um sinal para o zero na numeração romana. A representação do zero teve sua origem na necessidade de indicar uma "casa" vazia no sistema posicional e se deu séculos depois do início da escrita dos números. Isso talvez explique a dificuldade que alguns de nossos alunos têm de operar com o zero, mesmo em séries mais adiantadas.

CONTEÚDO