1º quadrimestre de 1995

Revista do Professor de Matemática

27

Sociedade Brasileira de Matemática

ISSN 0102-4981

EXPEDIENTE

Sociedade Brasileira de Matemática
Presidente: Márcio Gomes Soares; *Vice-Presidente*: Mário Jorge Dias Carneiro; *Secretário-Geral*: Maria Elasir Seabra Gomes; *Tesoureiro*: Pedro Mendes.

Endereço da SBM: Estrada Dona Castorina, 110 - 22460-320 Rio de Janeiro, RJ.

Impressão: Editora "Ave Maria" Ltda.
Tiragem: 23 500 exemplares.
Postagem: 1º semestre de 1995.

Os artigos assinados são da responsabilidade dos autores. É permitida a reprodução de artigos, desde que seja citada a fonte.

ASSINATURAS:

a) A RPM é enviada gratuitamente a todos os professores de Matemática do Brasil que a solicitarem. Ao leitor que recebeu este número será enviado o próximo.

b) Professores de outros países poderão adquirir a RPM mediante o pagamento de US$7,50 que dará direito aos três números previstos para 1995.

ALTERAÇÕES DE ENDEREÇO:

Comunique-nos qualquer mudança de endereço - só assim a RPM chegará regularmente em suas mãos.

NÚMEROS ATRASADOS:

Cada exemplar atrasado custa R$1,00. Os números 1, 2, 3, 4 e 5 estão esgotados. Pedidos devem ser dirigidos à RPM, acompanhados de um cheque em nome do Comitê Editorial da RPM. Não trabalhamos com reembolso ou vales postais.

SBM:

Como se tornar sócio da SBM. Como obter os livros publicados pela SBM. Como se tornar assinante da revista Matemática Universitária. Estas informações podem ser obtidas escrevendo diretamente para a Sociedade Brasileira de Matemática, no Rio de Janeiro.

GRUPO AMIGOS DA RPM:

Anuidade 95: R$7,00. Envie um cheque em nome de Grupo Amigos da RPM. A colaboração dos Amigos permitiu, nos últimos anos, manter a periodicidade da RPM.

ENDEREÇO PARA CORRESPONDÊNCIA:

Revista do Professor de Matemática
NOVA ⇒ Caixa Postal 66281
NOVO ⇒ 05389-970 São Paulo, SP.

A RPM é uma publicação semestral da Sociedade Brasileira de Matemática com apoio da Universidade de São Paulo.

EDITORA RESPONSÁVEL: Alciléa Augusto.

Este número foi financiado por:
MCT/PADCT/SPEC-CAPES e GRUPO AMIGOS DA RPM

Revista do Professor de Matemática nº 27, 1º quadrimestre de 1995.

OBJETIVOS DO ENSINO DA MATEMÁTICA

Geraldo Ávila
Instituto de Matemática e Física, UFG
74001-970 Goiânia, GO

INTRODUÇÃO

Acho que quase todo professor de Matemática já teve a experiência de ser questionado por seus alunos sobre a importância da Matemática e sua utilidade. Eles costumam fazer perguntas deste tipo:

— Professor, para que serve toda essa Matemática que estamos estudando?

— Por que a gente tem de estudar todas essas coisas sobre triângulos, polinômios, equações, trigonometria? Afinal, de que vai me adiantar tudo isso na vida?

E o professor freqüentemente se vê em dificuldades para dar respostas satisfatórias. Na verdade, essas perguntas não têm mesmo respostas fáceis nem breves. Então, como responder a elas?

Nosso objetivo, neste artigo, é o de abordar esse tema, procurando ajudar o professor, primeiro, a bem entender toda a riqueza da Matemática e seu verdadeiro papel na formação do aluno; e, depois, como lidar com essas perguntas sobre o porquê da Matemática.

JUSTIFICATIVAS PARCIAIS

As razões mais freqüentemente mencionadas para justificar o ensino da Matemática são as seguintes:

1ª) *A Matemática é necessária em atividades práticas que envolvem aspectos quantitativos da realidade.*

2ª) *A Matemática é importante porque desenvolve o raciocínio lógico.*

Essas razões, embora legítimas, não são a justificativa mais importante para o ensino da Matemática. A primeira delas, por exemplo, é praticamente irrelevante para uma pessoa interessada em estudos na área de humanidades. De fato, basta um conhecimento elementar de operações com números para atender razoavelmente bem às diversas necessidades do dia-a-dia. Aliás, ironicamente até, o avanço tecnológico criou uma situação curiosa: hoje em dia o cidadão comum necessita de menos Matemática — pelo menos no que diz respeito a "cálculos com números" — do que décadas atrás, quando não dispúnhamos, como hoje, desses instrumentos tão eficazes, que são as calculadoras de bolso.

Como se vê, as técnicas matemáticas de que necessitamos em nosso dia-a-dia são tão modestas que podem ser plenamente atendidas no ensino das primeiras 5 ou 6 séries do 1º grau. Por que, então, ensinar Matemática até a última série do 2º grau? Será que a segunda das razões acima citada justifica esse ensino? A nosso ver, ela também é insuficiente, e vamos explicar por quê.

AS VÁRIAS FACES DO PENSAMENTO MATEMÁTICO

A idéia de que o pensamento matemático se reduz a seus aspectos lógico-dedutivos — uma idéia muito difundida, mesmo entre professores de Matemática — é incompleta e exclui o que há de mais rico nos processos de invenção e descoberta nesse domínio do conhecimento. A verdade é que o pensamento matemático vai muito além do raciocínio lógico.

Em seus aspectos mais criativos, a Matemática está ligada muito mais à intuição e à imaginação do que ao raciocínio lógico-dedutivo, como procuramos explicar a seguir.

A intuição é a faculdade mental que nos permite obter o conhecimento de maneira direta, sem a interveniência do raciocínio. Os matemáticos freqüentemente referem-se a algum fato como "intuitivo", querendo com isso dizer que se trata de algo cuja veracidade é facilmente reconhecível. Mas é bom lembrar que "intuitivo" não é

sinônimo de "fácil". Há muitas verdades profundas e difíceis que são apreendidas pela intuição.

A intuição é, na verdade, uma faculdade mental mais poderosa que o próprio raciocínio. É através dela que ocorrem as grandes criações do homem, nas artes, na filosofia e nas ciências. HENRI POINCARÉ (1854-1912), um dos mais eminentes matemáticos dos últimos 150 anos, testemunhou bem isso, num artigo que escreveu sobre *Criação Matemática*, onde ele conta várias de suas experiências como pesquisador. Uma dessas experiências ocorreu em suas tentativas de demonstrar um certo teorema. Depois de vários dias de trabalho sem sucesso, interrompeu suas pesquisas para fazer uma excursão geológica com várias outras pessoas. Foi como se estivesse tirando umas férias da Matemática, passando dias distraído com outras coisas. Num dos momentos da viagem, segundo ele conta, veio-lhe à mente, assim de súbito, a idéia de utilizar, na demonstração de seu teorema, certos recursos matemáticos que ele já havia empregado tempos antes numa outra situação. E ao voltar para casa, examinando detidamente essa idéia, pôde verificar que ela era realmente a chave da solução que procurava. A "idéia", de fato, tinha seu "mérito".

Idéias são coisas que nos vêm por intuição. Uma idéia não se deduz, "se intui". ALBERT EINSTEIN (1879-1955) concebeu sua Teoria da Relatividade com base na idéia da relatividade do espaço e do tempo, idéia essa que lhe veio por intuição, não por dedução. Exemplos como esse e o de Poincaré existem em abundância na História da Ciência, não apenas em Matemática ou em ciências exatas.

Em Matemática, particularmente, é muito comum um pesquisador, em conversa com colegas, tecer comentários sobre algum resultado novo que ele acredita ser verdadeiro, embora não disponha ainda de uma demonstração. O pesquisador, com sua experiência e familiaridade em determinada área de investigação, valendo-se das várias modalidades do raciocínio (indução, analogia de uma situação com outra, argumentos de plausibilidade) e da intuição, é levado a suspeitar da validade de um novo resultado ou teorema. A demonstração, em geral, é a etapa final, que completa o trabalho de investigação. E muitas vezes, por não conseguir encontrar uma demonstração, o teorema, tendo já adquirido credibilidade na comunidade matemática, impõe-se com o nome de "conjectura", "hipótese" ou mesmo "teorema". Há assim várias conjecturas na literatura matemática, ou seja, resultados ainda não demonstrados, mas que os matemáticos acreditam serem verdadeiros. De vez em quando uma dessas conjecturas é demonstrada, geralmente por algum matemático jovem, que se torna, então, bastante conhecido entre seus pares. Uma das mais famosas conjecturas pendentes é a chamada "Hipótese de Riemann" formulada pelo matemático alemão BERNARD RIEMANN (1826-1856) em meados do século passado; outra é o chamado *último teorema de Fermat* (veja RPM 15, p. 14), de formulação muito simples, mas que vem desafiando os matemáticos por mais de três séculos, e que, nos últimos anos, vem sendo resolvida no contexto de uma ampla teoria pertencente a duas importantes e difíceis disciplinas matemáticas, a Teoria dos Números e a Geometria Algébrica. Dizemos "vem sendo resolvida" porque, de fato, várias vezes a solução foi anunciada para, logo em seguida, revelar falhas. O "teorema" parece finalmente demonstrado, mas, no momento em que escrevemos, está ainda sob verificação dos especialistas.

Essas considerações mostram o quanto de riqueza existe no pensamento matemático para além de seus aspectos lógico-dedutivos. Imaginação e intuição são instrumentos tão importantes na invenção matemática como o são para o pintor que concebe um quadro, para o escritor que planeja uma obra literária ou para o músico em suas criações artísticas.

O PRINCIPAL MOTIVO PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA

Certamente que o ensino da Matemática é justificado, em larga medida, pela riqueza dos diferentes processos de criatividade que ele exibe, proporcionando ao educando excelentes oportunidades de exercitar e desenvolver suas faculdades intelectuais. Mas

a razão mais importante para justificar o ensino da Matemática é o relevante papel que essa disciplina desempenha na construção de todo o edifício do conhecimento humano.

Desde os primórdios da civilização, o homem, como "ser pensante", sempre quis entender o mundo em que vive. Será que a Terra é plana? Como se suporta? Como são seus limites últimos? A

abóbada celeste é uma fronteira última, com as estrelas nela incrustadas? Por que e como alguns corpos celestes — os planetas — se deslocam erraticamente? O que existe para além dessa abóbada? Como explicar os movimentos do Sol e da Lua?

Perguntas como essas certamente atormentaram o espírito humano por muitos milênios, até que, a partir do século VI a.C., começaram a ser respondidas, e com muito sucesso. Foram idéias matemáticas simples de semelhança de figuras geométricas e proporcionalidade que permitiram aos astrônomos, já no século III a.C., calcular o tamanho da Terra (veja nosso artigo na RPM 1), do Sol e da Lua e as distâncias a que se encontram esses astros da Terra. E a solução desses problemas mudou radicalmente a idéia do homem a respeito do mundo em que vivia.

As idéias de COPÉRNICO, GALILEU e KEPLER sobre o sistema solar, bem como os dados de observação de TYCHO BRAHE, culminaram, no século XVII, com a teoria da gravitação de Newton, que dava ao homem um novo e poderoso instrumento de interpretação do universo. Os desenvolvimentos que se seguiram, sobretudo com os trabalhos de LAPLACE (1749-1827), iriam resgatar a antiga idéia de PITÁGORAS de que "o número é a chave para a compreensão dos fenômenos", pois ficava agora evidente que os movimentos dos planetas obedeciam a leis matemáticas precisas. Isso teve influência decisiva no pensamento racionalista do século XVIII, portanto, nas próprias concepções filosóficas dessa época.

Idéias sobre a constituição da matéria ocorreram na antiguidade, sendo bem conhecidas as de LEUCIPO e DEMÓCRITO, cuja eficácia só pode ser comprovada com o desenvolvimento da Química no século XIX. E novamente aqui o instrumental matemático está na base da solução dos problemas.

Já no século XX, e graças a eficazes idéias matemáticas, novamente o homem alargou as fronteiras do mundo em que vive, calculando distâncias astronômicas fantásticas e formulando teorias cosmológicas que indicam que o universo em que vivemos teve origem há uns 15 ou 20 bilhões de anos.

Mais recentemente, os avanços da Biologia Molecular, alicerçados em idéias matemáticas, abrem perspectivas de progressos até há algumas décadas nem sequer sonhados sobre os mistérios da vida, a diversidade das espécies e a engenharia genética.

Até mesmo em vários domínios da Arte, a Matemática tem tido uma influência substancial e direta, como na Arquitetura, na Escultura, na Pintura e na Música.

Na Pintura, particularmente, foi graças a idéias matemáticas de paralelismo e projeção que os pintores da Renascença criaram a ciência da Perspectiva, que lhes tornou possível retratar em suas telas uma realidade marcada por intenso humanismo.

A descoberta de que Matemática e Música estão intimamente relacionadas remonta a Pitágoras. Mas foi só no século XVIII que a teoria musical encontrou bases seguras para se estruturar cientificamente; e aqui, novamente, foram idéias matemáticas que permitiram uma interpretação científica dos fenômenos sonoros.

Há um importante campo de estudos, que é domínio próprio da Matemática, conhecido como *Lógica e Fundamentos*, onde foram realizadas, há pouco mais de seis décadas, notáveis descobertas, que estabelecem ser inalcançável o objetivo de organizar logicamente a Matemática de forma a garantir que todas as suas proposições possam ser testadas como verdadeiras ou falsas. Em outras palavras, o edifício matemático, como resultado do trabalho humano, não tem, nem pode ter, garantida sua consistência. Isso se reflete em todo o conhecimento humano, já que a Matemática é, direta ou indiretamente, instrumento do qual dependem, para sua organização, as demais ciências, como a Física, a Química, a Biologia, a Cosmologia, etc. Em conseqüência, todo o conhecimento construído pelo homem está necessariamente marcado pelas limitações da própria intelectualidade. E é o próprio conhecimento humano que revela essas limitações. Em outras palavras, o homem descobre as limitações de seu intelecto, através do exercício desse mesmo intelecto!

Esse rápido apanhado de vários exemplos serve para mostrar o quanto as "idéias matemáticas" têm estado presentes na construção de todo o edifício do conhecimento, influindo também, de maneira profunda e marcante, nas próprias concepções filosóficas do homem diante de sua existência e do mundo em que vive.

JUSTIFICATIVAS E OBJETIVOS DO ENSINO DA MATEMÁTICA

Tendo em conta essas várias considerações, vemos que o ensino da Matemática tem justificativas mais amplas e abrangentes que apenas aquelas duas citadas no início deste artigo. Cremos poder assim sintetizar essas justificativas e objetivos que o ensino deve atingir:

> *A Matemática deve ser ensinada nas escolas porque é parte substancial de todo o patrimônio cognitivo da Humanidade. Se o currículo escolar deve levar a uma boa formação humanística, então o ensino da Matemática é indispensável para que essa formação seja completa.*
>
> *O ensino da Matemática se justifica ainda pelos elementos enriquecedores do pensamento matemático na formação intelectual do aluno, seja pela exatidão do pensamento lógico-demonstrativo que ela exibe, seja pelo exercício criativo da intuição, da imaginação e dos raciocínios por indução e analogia.*
>
> *O ensino da Matemática é também importante para dotar o aluno do instrumental necessário no estudo das outras ciências e capacitá-lo no trato das atividades práticas que envolvem aspectos quantitativos da realidade.*

É claro que uma pessoa pode prescindir de conhecimento matemático e mesmo assim ser um grande ator, escritor, estadista, enfim, um profissional realizado em muitos domínios do conhecimento. Mas certamente seus horizontes culturais serão mais restritos. A situação é análoga à de uma pessoa que, mesmo possuindo competência matemática, tenha poucos conhecimentos humanísticos; seus horizontes culturais também serão mais limitados.

ENSINO ORGÂNICO E INTEGRADO

Para atingir plenamente seus objetivos, o ensino da Matemática deve ser feito de maneira a atender a certos requisitos básicos, que enumeramos a seguir:

1) O ensino deve sempre enfatizar as idéias da Matemática e seu papel no desenvolvimento da disciplina.

2) Os diferentes tópicos da Matemática devem ser tratados de maneira a exibir sua interdependência e organicidade.

3) O ensino da Matemática deve ser feito de maneira bem articulada com o ensino de outras ciências, sobretudo a Física.

Neste ponto voltamos à questão inicial, que motivou todo este artigo: como deve o professor lidar com as perguntas dos alunos sobre a relevância da Matemática?

Dissemos, no início, que essas perguntas não têm respostas fáceis nem breves. O ideal é que o ensino proceda de maneira a justificar, a cada passo, a relevância daquilo que se ensina. Cada novo tópico a ser tratado deve ser devidamente motivado, o que pode ser feito com a formulação de problemas práticos interessantes; ou pequenas histórias que ajudem a despertar a curiosidade dos alunos (veja, por exemplo, **RPM 25**, pp. 10 a 14); ou, ainda, estimulando a participação ativa dos alunos (veja, por exemplo, a **RPM 26**, pp. 8 a 11). Mas isso nem sempre é possível, pois há questões puramente teóricas, que exibem belas idéias, como aquela de provar que existem infinitos números primos (**RPM 19**, pp. 26 a 28); então é preciso ter o cuidado de fazer uma boa exposição, de preferência que não dure muito tempo, para cativar e manter os alunos atentos. Nos casos que envolvem demonstrações, é de suma importância ressaltar as *idéias* envolvidas, pois são elas que despertarão o interesse do aluno. E esse último exemplo que citamos, da **RPM 19**, ilustra muito bem esse ponto.

Trazendo freqüentemente a suas aulas histórias, problemas e questões interessantes, o professor desperta no aluno uma crescente admiração pelo largo alcance da Matemática, estimulando seu interesse pela disciplina.

Assim procedendo, o professor se antecipa às perguntas do aluno sobre a relevância da Matemática; o aluno nem terá necessidade de fazê-las. Aliás, se faz tais perguntas com certa freqüência, isso já é, em si, um sintoma de que algo deve ser feito para motivar o aluno. Talvez o ensino esteja se desenvolvendo muito abstratamente, sem exibir a relevância dos conceitos introduzidos. É o que pode acontecer, por exemplo, com o ensino de funções a partir do produto cartesiano de conjuntos, seguido de relações, a função sendo definida como um tipo particular de relação; depois funções injetoras, sobrejetoras, bijetoras, etc. É natural que o aluno pergunte: — Mas para que tudo isso? E ele tem razão. Aqui o professor deve questionar o seu próprio ensino, procurando ver o que está deficiente e pode ser melhorado. Mas nunca deve deixar essas perguntas sem respostas ou descartá-las como impertinentes ou extemporâneas.

E, se não estiver preparado para uma resposta satisfatória — o que acontece até mesmo com as pessoas mais experientes —, o certo é dar alguma resposta parcial ou provisória, sem rodeios ou evasivas, por exemplo, dizendo ao aluno: "vou pensar mais nesse assunto" ou "vou procurar mais elementos para melhor esclarecer sua curiosidade".

Não queira também o professor apresentar todas as justificativas e motivações do ensino da Matemática de uma só vez, nem despejar sobre os alunos todas as histórias sobre a relação da Matemática com outras ciências. Tudo deve ser feito aos poucos, em pequenas doses. O ideal é que o professor esteja sempre preparado com algumas historinhas e exemplos de aplicações para serem apresentados nos momentos mais oportunos.

E é importante que as aplicações sejam interessantes e sem artificialismos. Assim, calcular o tamanho da Terra, como fez Eratóstenes na antiguidade, certamente é uma aplicação de grande relevância que, devidamente apresentada, há de motivar os alunos e estimular seu interesse e admiração pela Matemática. Indo a outro extremo, seria contraprodutivo propor o problema de calcular a quantidade de tecido necessária para fazer uma toalha na forma de um trapézio de bases 180 e 240 centímetros e altura 120, pois não se costumam fazer toalhas assim... Melhor seria calcular a área de um terreno com a mesma forma trapezoidal (trocando centímetros por metros, evidentemente); ou, simplesmente, calcular a área do trapézio.

Embora motivação e aplicações sejam importantes, não se pode ir a extremos, querendo que toda a Matemática seja sempre ensinada com aplicações. A apresentação freqüente de aplicações leva o aluno a adquirir entusiasmo e admiração pela Matemática, a ponto de se interessar por questões puramente matemáticas, que exibam idéias ou fatos interessantes, como as que são tratadas na **RPM 21**, pp. 19 a 25; ou a da distância Rio–São Paulo (**RPM 22**, pp. 1 a 3), só para mencionar algumas dentre as muitas discutidas nos vários fascículos da **RPM**.

Para concluir, deve-se ter sempre em mente que nenhuma receita sobre ensino pode ter sucesso se faltar ao professor amor e devotamento à profissão, e um esforço continuado de sempre aprender mais e aprimorar seus conhecimentos de Matemática para melhor motivar e despertar o interesse de seus alunos.

CAIXA ECONÔMICA

Ernesto Rosa Neto
São Paulo - SP

No dia 17/12/91 paguei uma dívida que fizera na CEF. Tempos difíceis..., precisei fazer uma penhora. Como paguei em cheque, fui obrigado a esperar a compensação, para depois retirar os valores. Porém, não pude ir em seguida: sem tempo, av. Paulista, trânsito, estacionamento...chegaram as férias, viajei..., fui deixando e lá voltei no dia 12/04/92.

O caixa fez as contas e me cobrou o equivalente a quase metade do valor guardado. Quase caí de costas. Não tinha como pagar — aquilo era um absurdo — e as jóias nem eram minhas. Pedi que refizesse as contas, era mesmo aquele disparate.

Pedi que me mostrasse as contas. Foi assim (em moeda da época):

Avaliação das jóias .... $ 690.000,00
nº de dias de 20/12/91 até 12/04/92 114
taxa de permanência 0,003334

$$\$690.000 \times 114 \times 0,003334 = \$262.000,00.$$

Fui a um canto pensar preocupado. Conversei com outras pessoas:

— É isso mesmo! Paguei um absurdo para guardar uns poucos dias, disse-me um senhor.

Mas aí fiquei mais calmo, comecei a pensar. A única variável é o número de dias, então, como foi feito, o valor a pagar é função linear do número de dias — mas a inflação é exponencial. Caramba! É só esperar...

Voltei ao caixa e perguntei se podia deixar para retirar outro dia. O caixa disse-me que poderia deixar até cinco anos, só que o valor iria sempre aumentar. Vi o canto da sua boca se mexer como com sarcasmo, mas talvez estivesse mesmo apenas querendo me avisar que o valor aumentaria cada vez mais, todo o dia.

Sabe de uma coisa? O melhor lugar para guardar jóias é na CEF. Fui embora!

No dia 12/08/94, quase três anos depois, telefonaram-me pedindo que retirasse as jóias porque as normas estavam sendo mudadas. Mesmo sabendo que as mudanças de contrato não têm efeito retroativo, mas considerando que a inflação tinha caído naquele momento de vésperas de eleição, fui à Caixa em 15/08/94 e o caixa fez as contas:

Avaliação das jóias .... $ 690.000,00
nº de dias de 20/12/91 até 15/08/94 985
taxa de permanência 0,003334

$$\$690.000 \times 985 \times 0,003334 = \$2.270.031,00.$$

Isso em moeda de 1991. Para fazer a conversão para reais era preciso cortar 3 zeros e dividir por 2.750:

$$\$2.270,03 \div 2.750 = \$0,83.$$

Oitenta e três centavos! Paguei, peguei as jóias e fui devolvê-las. A Caixa cobrava 40% para guardar uns três meses e quase nada para guardar durante três anos.

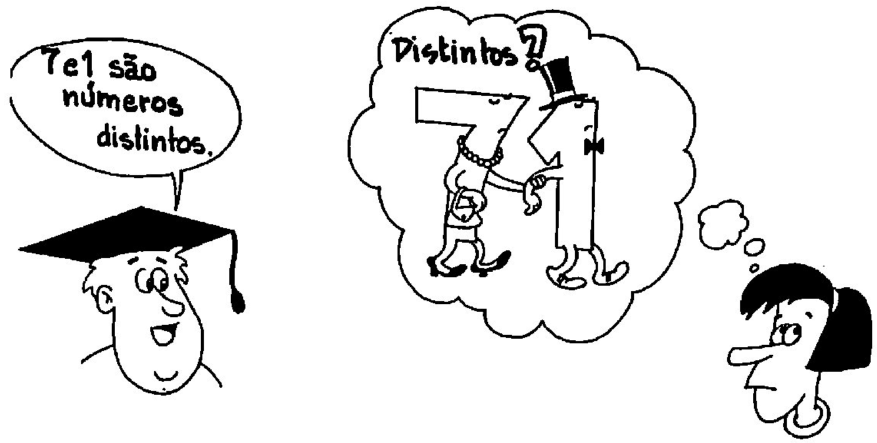
Sim, senhor! Quem será que criou essa sistemática?

Ernesto Rosa Neto é professor de Prática de Ensino da Matemática e de História da Ciência na Universidade Mackenzie, trabalhando na linha construtivista. É autor de livros didáticos e paradidáticos e de roteiros de vídeo e multimídea.

NR. A experiência vivida pelo colega *Ernesto Rosa Neto* (acreditem, isso aconteceu mesmo com ele) é um exemplo curioso e interessante das distorções provocadas pelo processo inflacionário. Achamos importante destacar alguns pontos que permitem uma melhor compreensão do que ocorreu durante o período em que a CEF guardou as jóias do professor Ernesto.

1) Sem dúvida o aspecto mais importante do problema é o fato de que, embora a dívida aumentasse todos os dias, sobre o total da dívida não incidiam nem juros, nem correção, nem qualquer tipo de encargo financeiro.
2) A taxa de aproximadamente 10% ao mês permaneceu inalterada durante um período em que a inflação mais freqüente era de 40 a 50% ao mês. Além disso, o principal que servia de base para o cálculo da taxa diária também permaneceu fixo nos \$690.000,00 iniciais. Em agosto de 1994, o valor desse principal era aproximadamente 25 centavos. Se a CEF permitisse que o processo continuasse, ela receberia menos de 3 centavos por mês para guardar as jóias.

Concluindo, o sistema foi criado para funcionar de modo favorável para a CEF por prazos curtos. Tanto isso é verdade que nosso colega levou um grande susto na primeira vez que tentou retirar as jóias. A questão, portanto, não é perguntar quem criou o sistema, mas, sim, quem permitiu que ele fosse usado para prazos longos e não alterou a taxa num período de inflação galopante.



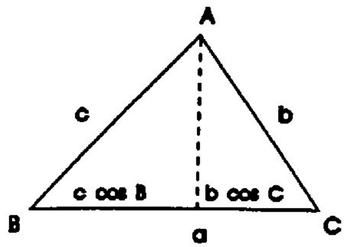
DEMONSTRAÇÕES VISUAIS

José Paulo Q. Carneiro
Rio de Janeiro, RJ

ALGUMAS DEMONSTRAÇÕES VISUAIS

Cada professor tem a sua demonstração favorita das importantes fórmulas de $\operatorname{sen}(a\pm b)$ e $\cos(a\pm b)$. De qualquer forma, é sabido que, deduzida uma delas, as outras podem ser obtidas por complemento, suplemento, etc. Uma das mais simples e rápidas que conheço é uma demonstração "visual", que se baseia, em primeiro lugar, na conhecida fórmula:

$$a = b\cos C + c\cos B \qquad (1)$$



onde a, b, c, A, B, C são os lados e ângulos respectivos de um triângulo. Essa fórmula pode ser visualizada facilmente e diz apenas que o lado a é a soma (ou a diferença, se B ou C for obtuso) das projeções ortogonais dos lados b e c sobre o próprio a, como se vê na figura ao lado.

Por outro lado, é também bastante conhecida a lei dos senos em um triângulo, segundo a qual:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} = 2R, \qquad (2)$$

onde R é o raio do círculo circunscrito. Isso decorre imediatamente da figura na página seguinte

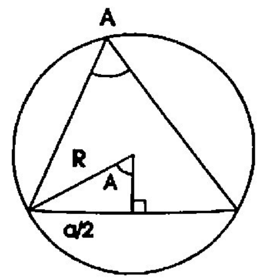
Segue-se de (2) que, num círculo de diâmetro 1, tem-se:

$a = \operatorname{sen} A$, etc.

Então, para um triângulo inscrito nesse círculo, a fórmula (1) se lê:

$\operatorname{sen} A = \operatorname{sen} B \cos C + \operatorname{sen} C \cos B$.

E como, finalmente, o ângulo A é o suplemento de $B + C$, ou seja, têm o mesmo seno, obtém-se a célebre fórmula:



$\operatorname{sen} A = \frac{a/2}{R} \longrightarrow \frac{a}{\operatorname{sen} A} = 2R$

$$\operatorname{sen}(B + C) = \operatorname{sen} B \cos C + \operatorname{sen} C \cos B .$$

Essa dedução é válida para $B + C < 180°$, o que é suficiente para deduzir o caso geral.

A demonstração acima baseia-se numa idéia de S.H. Kung, encontrada na revista *Mathematics Magazine*, v. 64, nº 2, abril de 1991.

DESIGUALDADE DE CAUCHY-SCHWARZ

Intimamente ligada com a fórmula do $\cos(A - B)$ está a desigualdade de Cauchy-Schwarz no plano.

Essa importante desigualdade afirma que, se $(a; b)$ e $(c; d)$ forem vetores de $\mathbb{R}^2$, então o valor absoluto de seu produto escalar não excederá o produto de seus comprimentos, ou seja:

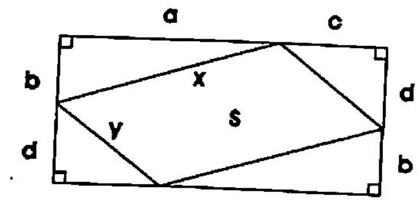
$$|ac + bd| \leq \sqrt{a^2 + b^2}\,\sqrt{c^2 + d^2} \qquad (3)$$

Deve-se notar que, como o cosseno do ângulo de dois vetores não nulos de $\mathbb{R}^2$ é igual a seu produto escalar dividido pelo produto dos seus comprimentos, então a desigualdade (3) traduz o fato de que o valor absoluto desse cosseno não ultrapassa 1. Visto de outro modo, pode-se dizer que a desigualdade de Cauchy-Schwarz justifica aquela definição de cosseno do ângulo de dois vetores, que pode também ser motivada pela fórmula do $\cos(A - B)$.

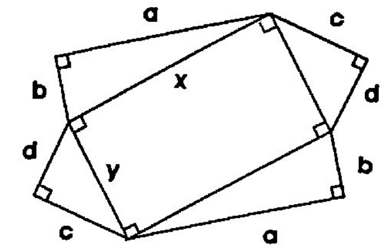
Uma demonstração rápida e "visual" de (3) é devida a *R. Nelsen* na mesma revista citada: v. 67, nº 1, fevereiro de 1994, e baseia-se na observação "evidente" – nada mais que "a oblíqua é maior

que a perpendicular" – de que, fixados os comprimentos dos lados de um paralelogramo, sua área máxima ocorrerá quando ele for um retângulo.

Considere então as figuras:



$S < xy$



Pela observação inicial, a área da figura da esquerda não excede a da direita, isto é:

$$(a + c)(b + d) \leq 2 \cdot \frac{1}{2}\, ab + 2 \cdot \frac{1}{2}\, cd + \sqrt{a^2 + b^2}\,\sqrt{c^2 + d^2} .$$

Simplificando, obtém-se (3) para números positivos. Levando em conta, porém, que

$$|ac + bd| \leq |a|\,|c| + |b|\,|d| \quad \text{e} \quad a^2 = |a|^2, \quad \text{etc.},$$

a desigualdade segue para números de sinais quaisquer.

Essa idéia pode ser usada também para mostrar quando é que ocorrerá a igualdade em (3). De fato, a igualdade das áreas das duas figuras ocorrerá quando o paralelogramo da esquerda for retângulo; nesse caso, a semelhança dos triângulos que o cercam obrigará a que: $a/c = b/d$, ou seja, os vetores de coordenadas positivas $(a; b)$ e $(c; d)$ serão paralelos e de mesmo sentido. Observe que nesse caso ocorre também a igualdade na desigualdade triangular. O leitor poderá estender ainda algebricamente para o caso de a, b, etc. serem de sinais quaisquer.

Finalmente, uma notícia: uma coletânea de 144 "demonstrações visuais" foi reunida por R.B. Nelsen no recente livro *Proofs without Words*, editado pela Mathematical Association of America.

A DESIGUALDADE DE CAUCHY-SCHWARZ

Eduardo Wagner
Rio de Janeiro, RJ

Neste mesmo número da RPM, o professor José Paulo Carneiro nos mostra uma elegante demonstração da desigualdade de Cauchy-Schwarz para o caso $n = 2$:

$$a_1b_1 + a_2b_2 \le \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2} \cdot \sqrt{{b_1}^2 + {b_2}^2}$$

onde a_1, a_2, b_1 e b_2 são reais quaisquer.

Entretanto, é natural a curiosidade sobre o caso geral. Vamos, neste artigo, mostrar uma demonstração simples (sem recursos da Álgebra Linear) e algumas aplicações do caso geral dessa desigualdade.

TEOREMA:

Dados $2n$ números reais: $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$, temos:

$$a_1b_1 + \cdots a_nb_n \le \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + \cdots {a_n}^2} \cdot \sqrt{{b_1}^2 + {b_2}^2 + \cdots {b_n}^2}$$

valendo a igualdade se, e somente se,

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}.$$

Demonstração:

Inicialmemte, vamos observar que, para dois reais quaisquer a e b, temos:

$$(a-b)^2 \ge 0 \Rightarrow a^2 + b^2 \ge 2ab \Rightarrow ab \le \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$$

valendo a igualdade se, e só se, $a = b$.

Façamos agora

$$A = \sqrt{{a_1}^2 + \cdots + {a_n}^2} \quad \text{e} \quad B = \sqrt{{b_1}^2 + \cdots + b_n^2}$$

e consideremos os números

$$\overline{a}_i = \frac{a_i}{A} \quad \text{e} \quad \overline{b}_i = \frac{b_i}{B}.$$

Observe que

$$\overline{a}_1{}^2 + \cdots + \overline{a}_n{}^2 = \frac{{a_1}^2 + \cdots + {a_n}^2}{A^2} = 1$$

e, analogamente, $\overline{b}_1{}^2 + \cdots + \overline{b}_n{}^2 = 1$.

Temos então as desigualdades:

$$\overline{a}_1\overline{b}_1 \le \frac{\overline{a}_1{}^2}{2} + \frac{\overline{b}_1{}^2}{2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\overline{a}_n\overline{b}_n \le \frac{\overline{a}_n{}^2}{2} + \frac{\overline{b}_n{}^2}{2}.$$

Somando, obtemos

$$\overline{a}_1\overline{b}_1 + \cdots + \overline{a}_n\overline{b}_n \le \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Portanto,

$$\frac{a_1}{A} \cdot \frac{b_1}{B} + \cdots + \frac{a_n}{A} \cdot \frac{b_n}{B} \le 1 \qquad \text{ou}$$

$$a_1b_1 + \cdots + a_nb_n \le AB,$$

como queríamos demonstrar.

Observemos ainda que a igualdade vale se, e somente se,

$$\overline{a}_1 = \overline{b}_1, \dots, \overline{a}_n = \overline{b}_n, \qquad \text{ou seja,}$$

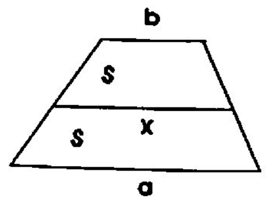
$$\frac{a_1}{A} = \frac{b_1}{B}, \dots, \frac{a_n}{A} = \frac{b_n}{B}, \qquad \text{ou ainda,}$$

$$\frac{a_1}{b_1} = \dots = \frac{a_n}{b_n} \ \left(= \frac{A}{B}\right).$$

EXEMPLOS

Vamos começar com um problema que, aparentemente, não tem relação com o que acabamos de demonstrar.

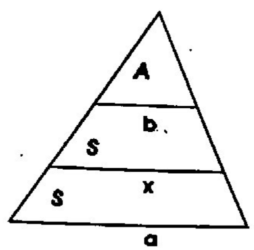
1) *Em um trapézio de bases* a *e* b, *determinar o comprimento* x *de um segmento paralelo às bases que divida esse trapézio em dois outros de mesma área.*



A figura ao lado ilustra o enunciado do problema.

Para resolver, prolongamos os lados opostos não paralelos do trapézio para formar três triângulos semelhantes: o menor de área $\mathcal{A}$ e base b, um outro de área $\mathcal{A}+\mathcal{S}$ e base x, e o maior de área $\mathcal{A}+2\mathcal{S}$ e base a.

Como as áreas de figuras semelhantes são proporcionais aos quadrados dos segmentos homólogos (correspondentes), temos:



$$\frac{\mathcal{A}+2\mathcal{S}}{a^2}=\frac{\mathcal{A}+\mathcal{S}}{x^2}=\frac{\mathcal{A}}{b^2}.$$

Utilizando a seguinte propriedade elementar das proporções:

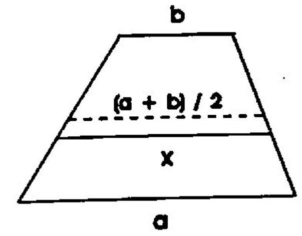
$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a-c}{b-d},\quad \text{concluímos que:}$$

$$\frac{\mathcal{S}}{a^2-x^2}=\frac{\mathcal{S}}{x^2-b^2},\quad \text{ou seja,}\quad a^2-x^2=x^2-b^2,$$

$$\text{donde,}\qquad 2x^2=a^2+b^2 \quad \text{e} \quad x=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Está resolvido o problema. O segmento que divide um trapézio em dois outros de mesma área foi determinado.

Vamos agora observar o seguinte. A base média do trapézio (segmento eqüidistante das bases) tem comprimento $(a+b)/2$. Essa base média divide o trapézio em dois outros onde a área do "de cima" é claramente menor que a área do "de baixo". Então, o nosso segmento x certamente está abaixo da base média do trapézio.



Isso tudo mostra claramente que

$$\frac{a+b}{2}\le\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Essa é a desigualdade entre a *média aritmética* e a *média quadrática* de dois números e, mais uma vez, tivemos a oportunidade de mostrar um resultado sobre números reais positivos "usando áreas".

Podemos, entretanto, demonstrar a desigualdade entre as médias aritmética e quadrática a partir da desigualdade de Cauchy-Schwarz. Vejamos.

Temos, no caso $n=2$, que

$$a_1b_1+a_2b_2\le\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2}.\sqrt{{b_1}^2+{b_2}^2}.$$

Façamos $a_1=a$, $a_2=b$ e $b_1=b_2=1$.

Então, $a+b\le\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{2}$.

Dividindo tudo por 2, temos

$$\frac{a+b}{2}\le\frac{\sqrt{(a^2+b^2)\,2}}{2}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}},$$

como queríamos demonstrar.

O leitor deve reparar, neste ponto, que a mesma idéia que utilizamos para $n=2$ demonstra, no caso geral, que

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\le\sqrt{\frac{{a_1}^2+{a_2}^2+\cdots+{a_n}^2}{n}},$$

valendo a igualdade se, e somente se, $a_1=a_2=\cdots=a_n$.

O segundo problema será deixado como exercício para o leitor.

2) *Prove que para quaisquer números reais* $a_1, a_2, \dots a_n$,

$$(a_1 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2 .$$

Sugerimos ao leitor tentar demonstrar essa desigualdade para $n = 2$ e, em seguida, o caso geral utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

O ÚLTIMO TEOREMA DE FERMAT

A equação $x^n + y^n = z^n$ *não tem solução em inteiros para nenhum expoente* $n \geq 3$.

Muitos leitores nos têm escrito a respeito desse teorema. Alguns leram nos jornais que o teorema havia sido finalmente demonstrado e perguntam se é verdade. Outros pedem que a **RPM** publique a demonstração. Vez por outra, alguém envia uma "demonstração" para a **RPM**.

Reproduzimos aqui, em destaque, as palavras de *Geraldo Ávila*, tiradas do primeiro artigo desta **RPM** (p. 4).

...outra (conjectura) é o chamado *último teorema de Fermat* (veja **RPM 15**, p. 14), de formulação muito simples, mas que vem desafiando os matemáticos por mais de três séculos, e que, nos últimos anos, vem sendo resolvida no contexto de uma ampla teoria pertencente a duas importantes e difíceis disciplinas matemáticas, a Teoria dos Números e a Geometria Algébrica. Dizemos "vem sendo resolvida" porque, de fato, várias vezes a solução foi anunciada para, logo em seguida, revelar falhas. O "teorema" parece finalmente demonstrado, mas, no momento em que escrevemos, está ainda sob verificação dos especialistas.

PROFESSOR BENEDITO CASTRUCCI

É com pesar que a **RPM** comunica a seus leitores o falecimento do professor *Benedito Castrucci*, ocorrido no dia 2 de janeiro do corrente ano.

Benedito Castrucci nasceu em São Paulo, no dia 08/07/1909, e começou a dar aulas particulares de Matemática quando ainda era aluno do ginásio, continuando a exercer essa atividade durante todo o período em que cursou a Faculdade de Direito.

Já advogado, estimulado pelo prazer que sentia ao lecionar, ingressou na recém-criada Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo, onde se formou em Ciências Matemáticas em 1939 e obteve o doutoramento em 1942.

Já como professor da Faculdade, continuou sua carreira acadêmica, obtendo por concurso, em 1950, o cargo de professor catedrático de Geometria Analítica e Projetiva.

Na década de 60 participou ativamente dos primeiros grupos que se dedicaram aos problemas do ensino da Matemática (GEEM), escrevendo trabalhos e livros sobre o assunto. Em 1970, com a reforma universitária, transferiu-se para o Instituto de Matemática e Estatística da USP, onde se aposentou em 1979.

Embora aposentado, não parou de lecionar e de exercer atividades nos grupos que se dedicam ao ensino da Matemática na PUC de São Paulo.

Acreditamos que o professor Castrucci era conhecido pela grande maioria dos leitores da **RPM**, se não pessoalmente (em aulas e palestras), pelo menos através dos trabalhos que ele deixou. O Comitê Editorial da **RPM**, em seu nome e em nome dos inúmeros leitores que o conheceram, registra aqui a nossa gratidão e o reconhecimento pelo trabalho desenvolvido pelo professor Castrucci em prol da melhoria do ensino de Matemática no Brasil.

Flávio Wagner Rodrigues

A GEOMETRIA TORNA-SE ÁLGEBRA

José Orlando Gomes Freitas
Funchal, Portugal

> *A Geometria grega pode ser comparada a um elemento manual, a Álgebra árabe a uma produção automática, à máquina.* (Luci L. Radice)

APRESENTAÇÃO

A **RPM** *recebe colaborações não apenas de colegas aqui do Brasil, mas também de outros países.*

Este artigo veio de Funchal, Ilha da Madeira, Portugal. Optamos pela versão original. O autor já nos mandou outros pequenos trabalhos e numa carta explica: "Um dos meus passatempos é fazer pequenos artigos, (...) por nos dar uma rodagem, pois a formação contínua é importante nos dias de hoje. E sempre podemos apresentá-los aos nossos alunos".

A **RPM** *dá as boas-vindas ao professor José Orlando Gomes de Freitas no rol de seus autores e, em nome dos leitores, agradece a colaboração.*

Já é do nosso conhecimento que a geometria analítica é a "geometria que usa sistemas de coordenadas e métodos algébricos na representação de pontos, rectas e curvas". A geometria analítica parece consistir na associação de três factores: a expressão de uma realidade geométrica por uma relação entre quantidades variáveis, o uso das coordenadas e o princípio da representação gráfica. Ora, se cada um

destes três factores surge desde muito cedo no desenvolvimento da geometria anterior a Descartes, eles não foram no entanto encadeados.

A ideia de caracterizar um ponto do plano por meio das suas coordenadas surge na Grécia antiga. Apolónio (séc. III a.C.) caracterizou as secções cónicas através das suas coordenadas, sem as designar por esse nome e sem lhes atribuir valores numéricos. Também na mais alta antiguidade, a observação astronómica conduzira a referenciar as direcções no espaço por duas coordenadas angulares: altura acima do horizonte e afastamento em relação ao meridiano. Contudo, a interpretação das relações entre essas coordenadas, ou seja, a geometria analítica só aparece muitos séculos depois.

Um diagrama cartesiano é uma coisa que se vê agora todos os dias; compreende-se, ainda que não se saiba, que aquelas "figurinhas" se chamam assim: diagramas cartesianos. Quando jogamos a Batalha Naval, para nos referirmos a um lugar temos uma letra e um número, ou seja, duas coordenadas. Quando analisamos um Mapa do Mundo ou mesmo uma Planta de Lisboa ou Funchal, utilizamos duas coordenadas para indicar o destino desejado. Para os aviões em pleno voo é preciso mais um número para dar a sua altitude. E, se quisermos, usamos uma quarta coordenada para o tempo.

"$y = ax + b$, com a e b constantes reais, é uma recta; $x^2 + y^2 = r^2$ é uma circunferência com centro na origem e raio r; e por aí diante... à Descartes". A primeira vez que afirmei isto às minhas turmas do 10º ano (programa novo), os alunos fizeram uma cara de *espanto* mas, umas aulas depois, eles próprios já chamavam recta a $y = x$ e circunferência a $x^2 + y^2 = 1$, entre outros exemplos.

Descartes terá sido influenciado pelos trabalhos de Nicolau Oresme (bispo de Lirieux), que num seu trabalho (1360) introduz as coordenadas rectangulares (longitude e latitude), bem como a equação da linha recta. Oresme começa por apresentar o princípio de representação gráfica no plano, passando ao espaço a três dimensões e chegando a antever o que hoje é o espaço a quatro dimensões. Mas a sua teoria não pôde evoluir devido à falta de simbolismo algébrico. E é precisamente neste aspecto que Descartes – paralelamente com Fermat, apesar da notação deste último ser antiquada, apegado à linguagem pesada da álgebra dos gregos – desempenha um papel fundamental. Recorrendo a dois eixos perpendiculares e às coordenadas dos pontos do plano, relativamente a esses eixos, desenvolve o estudo das curvas e considera que a definição de cada curva (ou linha) é a expressão da relação algébrica entre as coordenadas x e y dos seus pontos. Estendendo ao espaço o que se passa no plano, Descartes considera três planos perpendiculares dois a dois e estabelece que, fixados esses planos, qualquer ponto do espaço é determinado pelas distâncias a cada um deles, ou seja, por três coordenadas.

O verdadeiro progresso realizado por Descartes reside no facto de, em vez de limitar tal cálculo ao estudo de uma dada figura, como faziam os gregos, ele o erigir em processo geral susceptível de permitir a criação de uma infinidade de novas curvas. As ideias e obras de Descartes vão revolucionar não só a Matemática como também a Filosofia. Após a sua morte é colocado no Índex, o que não impede que a sua obra venha a ser divulgada e influencie as gerações seguintes.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] COSTA, Liliana. *Matemática - 10º ano*, Lisboa, Texto Editora, 1992.

[2] RADICE, L. Lucio. *La Matematica da Pitagora a Newton*, Roma, Editori Riuniti, 1971.

[3] Vários autores. *Galileu, Descartes e o Mecanismo*, Lisboa, Gradiva, 1987.

José Orlando Gomes de Freitas é professor (efectivo) de Matemática e Métodos Quantitativos na E. S. Francisco Franco (Funchal).

O que vai por aí

V ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
16 a 21 de julho, 1995 - Aracaju, SE.
Inf.: Cidade Universitária Prof. José Aloísio de Campos, UFSE
Av. Marechal Rondon s/n
49100-000 São Cristóvão, SE
Telefone: (079)241-2848, r.335 ou 365.

INTUIÇÃO E PROBABILIDADE

Raul F. W. Agostino
Rio de Janeiro, RJ

De tudo que ensinamos aos nossos alunos, os assuntos que despertam mais interesse são os que envolvem situações do cotidiano. Nestes tempos de AIDS, o problema a seguir* tem servido de boa fonte de motivação e participação, em sala de aula.

Num país, 10% da população é portadora de um vírus. Um teste para detectar ou não a presença do vírus dá 90% de acertos quando aplicado a portadores e dá 80% de acertos quando aplicado a não portadores.

Qual o percentual de pessoas realmente portadoras do vírus, dentre aquelas que o teste classificou como portadoras?

Vejamos uma solução que pode ser dada sem citar teoremas de Probabilidade ou Estatística:

Considere que o teste foi aplicado aos I habitantes do país.

O número de testes que indicou a presença do vírus foi:

$$\underbrace{0{,}9\cdot 0{,}1\cdot I}_{\text{90\% dos que realmente são portadores}} + \underbrace{0{,}2\cdot 0{,}9\cdot I}_{\text{20\% dos não portadores}} = 0{,}09I + 0{,}18I = 0{,}27I.$$

Destas, são portadoras $0{,}09I$.

* Problema proposto no projeto Sapiens (uma espécie de vestibular em etapas) para alunos do 2º grau no Rio de Janeiro.

Assim, são realmente portadoras do vírus $0{,}09I/0{,}27I \approx 33{,}3\%$ das pessoas que o teste classificou como portadoras.

Esse número é no mínimo curioso e mostra que uma pessoa que fez o teste e foi classificada como portadora tem grande possibilidade de ser um "falso-positivo" (normalmente, quando uma pessoa faz um teste desse tipo e o resultado é positivo, os médicos recomendam um novo teste).

No entanto, o número de testes que indicaram a ausência do vírus foi $0{,}73I$ e, dentre esses, $0{,}72I$ não são portadores, o que dá

$$0{,}72I/0{,}73I = 98{,}6\%$$

de não portadores dentre os classificados como não portadores.

Algumas variações nos dados também originam resultados interessantes. Por exemplo:

Se 0,5% da população é portadora e o teste acerta em 98% dos casos, *então* somente 20% das pessoas que o teste classificou como portadoras são realmente portadoras.

Dependendo dos objetivos, pode-se a partir daí enunciar o conceito de probabilidade condicional ou mesmo desenvolver tópicos em Estatística; no entanto, a grande qualidade desse problema é apresentar uma situação de real interesse dos nossos alunos, com uma abordagem bastante intuitiva.

PARA APROFUNDAMENTO

[1] MORGADO, A. e outros. *Análise Combinatória e Probabilidade.* Rio de Janeiro, SBM, 1991.

[2] PAULOS, J.A. *Analfabetismo em Matemática e suas conseqüências.* Rio de Janeiro, Nova Fronteira, 1994.

NR. Esperamos que nenhum leitor use este artigo como justificativa para não se submeter a testes e exames clínicos solicitados por seu médico. O que o exemplo permite concluir é que, como todo teste está sujeito a erros, dificilmente se justifica a sua aplicação indiscriminada a toda uma população. É importante observar, no entanto, que, quando o médico pede exames, ele tem razões para suspeitar que exista algo errado com o paciente e, portanto, a probabilidade condicional de que ele esteja doente é, em geral, bem maior do que a incidência da doença na população toda (v. RPM 4, p. 21).

FÓRMULA versus ALGORITMO na resolução de um problema

*Roberto Ribeiro Paterlini**

Departamento de Matemática da UFSCar.

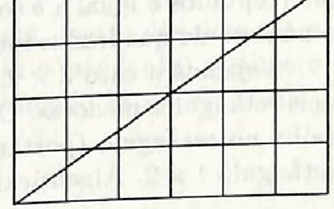
INTRODUÇÃO

No estudo das soluções do problema abaixo deparamos com uma situação **fórmula** *versus* **algoritmo.** O problema comporta dois tipos diferentes de solução. Podemos obter uma fórmula que fornece uma resposta direta. Ou então podemos construir um algoritmo que também nos dá a resposta quando os dados são concretizados.

Uma experiência com este problema em sala de aula nos leva a algumas reflexões sobre o Ensino da Matemática. Não estaríamos nós, professores, enfatizando demasiadamente a associação entre solução de um problema e obtenção de uma fórmula, em detrimento da elaboração de algoritmos?

O PROBLEMA

Sejam b e h inteiros positivos ≥ 1. Considere um retângulo de base b e altura h reticulado por linhas paralelas aos lados, formando bh quadrados unitários. Quantos desses quadrados têm seu interior interceptados por uma diagonal do retângulo?



* O autor agradece as sugestões do colega *Sergio Rodrigues.*

Esse problema pode ser encontrado no artigo *Counting Squares* de David L. Pagni, publicado no periódico *Mathematics Teacher*, vol. 84, nº 9, dezembro de 1991, página 754. Nós o propusemos em uma aula de problemas para alunos de Licenciatura em Matemática da UFSCar. Na figura acima, temos $b = 6$ e $h = 4$, e pode-se ver que o número de quadrados unitários que têm seu interior interceptado pela diagonal é 8.

AS SOLUÇÕES

Na aula a que nos referimos, os estudantes, em sua maioria, se empenharam em encontrar uma fórmula para o número de quadrados unitários interceptados. Passaram a desenhar retângulos de vários tamanhos, contando o número de quadrados interceptados em cada caso. O quadro ao lado traz alguns dos resultados considerados pelos estudantes. n é o número de quadrados interceptados pela diagonal.

b	h	n
3	2	4
5	3	7
5	4	8
6	2	6
6	3	6
6	4	8
7	4	10
15	6	18

Não é fácil visualizar a fórmula correta a partir desses dados. Com a ajuda do professor, os estudantes viram que $n = b + h - \mathrm{mdc}(b, h)$. Passaram então o restante da aula elaborando uma demonstração para essa fórmula.

Paralelamente a essas atividades, um estudante trabalhava de modo diferente, e no final da aula apresentou-nos uma solução, que resumimos a seguir.

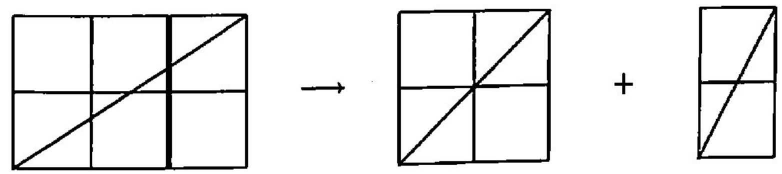
Observou que trocando b por h e vice-versa o resultado não se modifica. Observou ainda que nos seguintes casos o problema é trivial. Primeiro, se $h = 1$ (ou $b = 1$), o número de quadrados unitários interceptados é igual a b (ou h, respectivamente). Segundo, se $b = h$, o número de quadrados interceptados é b.

Vejamos o caso 3×2. Esse retângulo deve ser decomposto em dois retângulos menores. O primeiro é o maior quadrado possível que caiba no retângulo (portanto, um quadrado 2×2). O segundo é o retângulo 1×2. Algebricamente temos

$$3 \times 2 = 2 \times 2 + 1 \times 2.$$

A figura a seguir ilustra como deve ser subdividido o retângulo

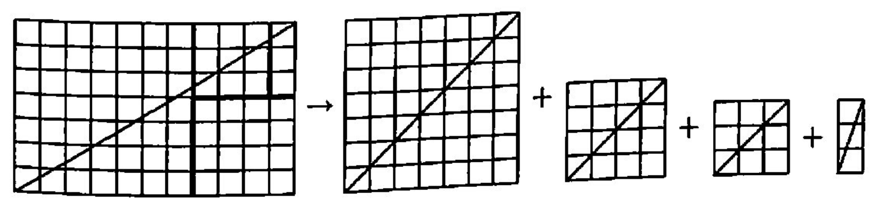
3×2 em retângulos menores.



O estudante observou que os retângulos menores estão dentro dos dois casos triviais já considerados acima. Como o retângulo 2×2 nos fornece 2 quadrados unitários interceptados (caso $b = h$), e o retângulo 1×2 nos fornece também 2 (caso $b = 1$), então (concluiu o estudante) o número de quadrados unitários interceptados no retângulo 3×2 é 4.

Para melhor ilustrar o procedimento, vejamos também o caso 11×7. Esse retângulo é decomposto em 4 retângulos menores. Primeiro retiramos o maior quadrado possível, no caso, um quadrado 7×7. Do restante, repetimos o procedimento: novamente tomamos o maior quadrado possível (no caso, um quadrado 4×4). E assim por diante. Paramos quando o retângulo inicial se esgota ou sobra um retângulo do tipo $b = 1$ ou $h = 1$. No nosso exemplo particular temos a decomposição:

$$11 \times 7 = 7 \times 7 + 4 \times 4 + 3 \times 3 + 1 \times 3.$$



Cada um desses retângulos menores está dentro dos dois casos triviais considerados acima. Então (concluiu o estudante) o número de quadrados unitários interceptados no retângulo 11×7 é a soma

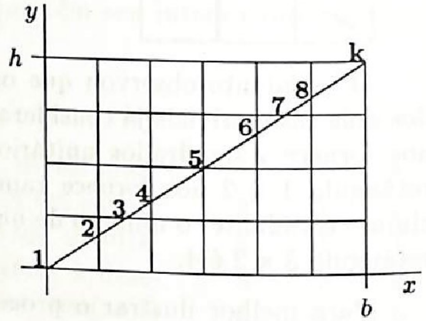
$$7 + 4 + 3 + 3 = 17.$$

Termina aqui a solução de nosso estudante. Não nos apresentou demonstração da validade do algoritmo, mas verificamos que funcionava perfeitamente.

ALGUMAS DEMONSTRAÇÕES

Apresentamos primeiro uma demonstração da fórmula:

o número de quadrados unitários interceptados é $b+h-\mathrm{mdc}(b,h)$ $(*)$



Indicaremos por **1**, **2**,..., **k** os pontos da diagonal que são comuns a uma linha horizontal ou vertical do reticulado. Suponhamos que os pontos estejam ordenados, isto é, **j** está entre **j−1** e **j+1**. Confira a figura ao lado.

Cada um dos segmentos $\overline{\mathbf{12}}$, $\overline{\mathbf{23}}$, ..., $\overline{\mathbf{k-1\,k}}$ está univocamente associado a um quadrado unitário que tem seu interior interceptado pela diagonal. Como temos $k-1$ desses segmentos, nosso problema ficará resolvido quando determinarmos $k-1$ em função de b e h.

Por definição k é o número de pontos da diagonal que são comuns a uma das linhas do reticulado. A diagonal intercepta exatamente uma vez cada uma das $b+1$ linhas verticais e cada uma das $h+1$ linhas horizontais. Mas do número $b+1+h+1$ devemos subtrair o número de pontos da diagonal que são comuns com algum vértice de um quadrado unitário, de modo que estes pontos não sejam contados duas vezes.

Um desses pontos é certamente $(x_0,y_0)=(0,0)$. Os outros pontos $(x_i,y_i), i\geq 1$, são tais que x_i e y_i são inteiros positivos e a inclinação do segmento que une (0,0) a (x_i,y_i) é a mesma que a da diagonal, isto é,

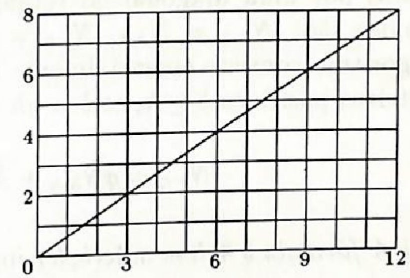
$$\frac{y_i}{x_i}=\frac{h}{b}.$$

Esses pontos podem ser obtidos considerando-se todas as frações m/n equivalentes a h/b tais que $m\leq h$ e $n\leq b$. A "menor" dessas frações é a fração irredutível p/q que é obtida simplificando a fração h/b por $\mathrm{mdc}(b,h)$. Depois, 'multiplicando-se' p/q por 1, 2, 3, ..., $\mathrm{mdc}(b,h)$, obtemos as frações procuradas. Assim, contando com (0,0), existem $\mathrm{mdc}(b,h)+1$ pontos (x_i,y_i), $i\geq 0$.

Por exemplo, sejam $b=12$ e $h=8$ (ver figura abaixo). Como $\mathrm{mdc}(12,8)=4$, simplificando-se $8/12$ por 4 obtemos a fração equivalente irredutível $2/3$. Assim, as frações equivalentes

$$\tfrac{1}{1}\times\tfrac{2}{3}=\tfrac{2}{3},\quad \tfrac{2}{2}\times\tfrac{2}{3}=\tfrac{4}{6},$$
$$\tfrac{3}{3}\times\tfrac{2}{3}=\tfrac{6}{9},\quad \tfrac{4}{4}\times\tfrac{2}{3}=\tfrac{8}{12},$$

fornecem os pontos (3,2), (6,4), (9,6) e (12,8), que pertencem à diagonal.



Voltando aos cálculos anteriores,

$$k=b+1+h+1-(\mathrm{mdc}(b,h)+1)\quad \text{ou}\quad k-1=b+h-\mathrm{mdc}(b,h).$$

Portanto existem $b+h-\mathrm{mdc}(b,h)$ quadrados unitários que têm seu interior interceptado pela diagonal. Fica assim demonstrada a fórmula $(*)$.

Vamos fazer agora algumas considerações sobre a solução do estudante. Trata-se de uma seqüência de procedimentos que, executados corretamente, nos levam à solução, desde que b e h sejam fornecidos em valores numéricos. Dizemos que essa seqüência de procedimentos é um algoritmo.

A princípio ficamos surpresos com essa solução. Mas dois fatos nos levaram a pensar que o algoritmo estava correto. Primeiro, sua semelhança com o algoritmo euclidiano para o cálculo do máximo divisor comum. Segundo, aplicando o algoritmo a alguns exemplos, verificamos que funcionava perfeitamente. Fizemos então um estudo posterior, no qual constatamos:

a) A fórmula $b+h-\mathrm{mdc}(b,h)$ implica a validade do algoritmo;
b) A fórmula $b+h-\mathrm{mdc}(b,h)$ pode ser obtida do algoritmo;
c) A veracidade do algoritmo pode ser obtida independentemente da fórmula.

Provaremos as afirmações a) e b), as quais significam que a fórmula e o algoritmo são equivalentes. A afirmação c) será deixada para o exercício da argúcia do leitor.

Indicaremos por $N_{b\cdot h}$ o número de quadrados unitários interceptados por uma diagonal do retângulo $b \times h$. Algumas identidades óbvias são: $N_{b\cdot h} = N_{h\cdot b}$, $N_{b\cdot b} = b$ e $N_{1\cdot h} = h$. Por outro lado, o algoritmo consiste essencialmente da seguinte propriedade: dados os inteiros positivos $b \geq h$, se $b = qh + r$, onde $0 \leq r \leq h$, então

$$N_{b\cdot h} = qN_{h\cdot h} + N_{r\cdot h} = qh + N_{r\cdot h}. \qquad (**)$$

a) A fórmula $b + h - \text{mdc}(b, h)$ implica a validade do algoritmo.

Supondo válida a fórmula, temos $N_{b\cdot h} = b + h - \text{mdc}(b, h)$. Portanto

$$\begin{aligned} N_{b\cdot h} &= b + h - \text{mdc}(b, h) \\ &= qh + r + h - \text{mdc}(h, r) \\ &= qh + N_{r\cdot h}, \end{aligned}$$

e isso implica a veracidade de $(**)$ e, conseqüentemente, do algoritmo.

b) A fórmula $b + h - \text{mdc}(b, h)$ pode ser obtida do algoritmo.

Para sistematizar, anotaremos $b = a_1$ e $h = a_2$. O algoritmo euclidiano aplicado a a_1 e a a_2 pode ser assim desenvolvido:

$$\begin{aligned} a_1 &= q_1 a_2 + a_3, & 0 \leq a_3 < a_2, \\ a_2 &= q_2 a_3 + a_4, & 0 \leq a_4 < a_3, \\ a_3 &= q_3 a_4 + a_5, & 0 \leq a_5 < a_4, \\ &\vdots \\ a_{n-3} &= q_{n-3} a_{n-2} + a_{n-1}, & 0 \leq a_{n-1} < a_{n-2}, \\ a_{n-2} &= q_{n-2} a_{n-1} + a_n, & 0 \leq a_n < a_{n-1}, \\ a_{n-1} &= q_{n-1} a_n + 0, \end{aligned}$$

onde $a_n = \text{mdc}(a_1, a_2)$. Somando-se todas as equações acima, vem

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} = (q_1 a_2 + \cdots + q_{n-1} a_n) + (a_3 + \cdots + a_n)$$

donde

$$a_1 + a_2 = (q_1 a_2 + \cdots + q_{n-1} a_n) + a_n,$$

ou

$$q_1 a_2 + \cdots + q_{n-1} a_n = a_1 + a_2 - a_n.$$

Aplicando repetidamente a propriedade $(**)$ acima, temos

$$\begin{aligned} N_{b\cdot h} &= N_{a_1\cdot a_2} \\ &= q_1 N_{a_2\cdot a_2} + N_{a_2\cdot a_3} \\ &= q_1 N_{a_2\cdot a_2} + q_2 N_{a_3\cdot a_3} + N_{a_3\cdot a_4} \\ &\vdots \\ &= q_1 N_{a_2\cdot a_2} + q_2 N_{a_3\cdot a_3} + \cdots + q_{n-1} N_{a_n\cdot a_n} \\ &= q_1 a_2 + q_2 a_3 \cdots + q_{n-1} a_n \\ &= a_1 + a_2 - a_n \\ &= b + h - \text{mdc}(b, h), \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

CONCLUSÃO

É principalmente a diversidade de abordagens dos assuntos em estudo que ativa a flexibilidade e a capacidade de compreensão da mente dos estudantes. Essa diversidade faz compreender ao estudante de uma maneira prática que há muitos modos de tratar o mesmo problema intelectual.

No Ensino da Matemática através de Problemas, vimos que devemos colocar nossa atenção na possibilidade de se apresentarem soluções na forma de algoritmos. A elaboração de algoritmos desenvolve qualidades de organização e previsão, e é uma atividade que não deve ser omitida no ensino formal da Matemática.

BIBLIOGRAFIA

Pagni, D. L. *Counting Squares*, em Mathematics Teacher, vol. 84, nº 9, dezembro de 1991, página 754.

Roberto Ribeiro Paterlini é professor de Matemática na Universidade Federal de São Carlos e dedica a maior parte de seu trabalho profissional à formação de professores de Matemática para o 1º e 2º graus.

DE VOLTA AO MAGICÁLCULO

*Hideo Kumayama**
São Bernardo do Campo, SP

Muitas vezes nossos alunos nos trazem desafios e, lendo a **RPM** 23, p. 34, encontrei um que já me havia sido proposto por alunos: por que um número de 6 algarismos, da forma $ABCABC$, é divisível por 7? A explicação é muito simples:

$$ABCABC = 1\,001 \cdot ABC = 7 \cdot 143 \cdot ABC,$$

logo, $ABCABC$ é divisível por 7.

Observando com mais cuidado esse argumento, podemos encontrar um critério de divisibilidade por 7.

Vejamos um exemplo:

O número $1\,916\,544$ é divisível por 7?

$$\begin{aligned} 1\,916\,544 &= 544 + 916 \cdot 1\,000 + 1 \cdot (1\,000)^2 \\ &= 544 + 916 \cdot (1\,001 - 1) + 1 \cdot (1\,001 - 1)^2 \\ &= k \cdot 1\,001 + 544 - 916 + 1. \end{aligned}$$

Fica claro que $1\,916\,544$ é divisível por 7 se, e somente se, $544 - 916 + 1$ o for. Mas $544 - 916 + 1 = -371 = -7 \cdot 53$, o que mostra que $1\,916\,544$ é divisível por 7.

Mas, afinal, que critério de divisibilidade é esse?

* Adaptação do Comitê Editorial da **RPM**, aprovada pelo autor.

Um número é divisível por 7 se, e somente se, a diferença entre a soma de suas classes pares e a soma de suas classes ímpares for um número divisível por 7.

Justificativa: Seja $N = a_i \ldots a_2a_1a_0$, onde a_0 é a classe das unidades, a_1, a classe dos milhares, a_2, a classe dos milhões, e assim sucessivamente.

$$N = a_0(1\,001 - 1)^0 + a_1(1\,001 - 1)^1 + \cdots + a_n(1\,001 - 1)^n.$$

No desenvolvimento de N todas as parcelas serão múltiplas de 1001, exceto a_0, $-a_1$, a_2, $-a_3$, ..., ou seja, as da forma $(-1)^i a_i$.

Assim sendo, para verificar se um número é divisível por 7, basta somar suas classes ímpares, subtrair esse resultado da soma das classes pares e verificar se esse resultado é divisível por 7.

Exemplo: $15\,627\,819\,340$ é divisível por 7, pois:

$$\underbrace{(819 + 15)}_{\text{classes pares}} - \underbrace{(340 + 627)}_{\text{classes ímpares}} = -133 = -7 \cdot 19.$$

$123\,121$ não é divisível por 7, pois

$$\underbrace{(123)}_{\text{classe par}} - \underbrace{(121)}_{\text{classe ímpar}} = 2$$

que não é divisível por 7.

Observe que $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, e daí podemos definir critérios de divisibilidade por 11 e por 13 idênticos ao que definimos para 7.

Hideo Kumayama é professor de Matemática Aplicada na Escola SENAI A. J. Lafer de Santo André e professor de Matemática na EEPG Dr. Baeta Neves de São Bernardo do Campo. Licenciado em Matemática pela FFCL Farias Brito de Guarulhos, vem se interessando, há 10 anos, pelas aplicações da Matemática em diferentes ocupações técnicas.

Artefatos

A MÁGICA DO CUBO

Gildo A. Montenegro
Recife, PE

INTRODUÇÃO

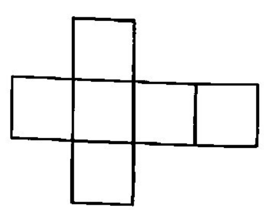
A visualização espacial permite reconstruir mentalmente o mundo físico e antecipar a solução de problemas antes que eles surjam no ambiente real. Nessa linha, a intuição geométrica deve ser estimulada na escola com a construção de modelos de poliedros e objetos da vida cotidiana (maquetes).

Uma forma geométrica conhecida desde a antiguidade e amplamente usada pelo homem é o cubo. Há poucos anos surgiu o "cubo mágico", engenhoso quebra-cabeça que utiliza as combinações de figuras nas faces de cubos interligados. Entretanto, podem-se fazer, em sala de aula, outras "mágicas" com cubos:

UMA APOSTA CÚBICA

Ele: Todos os livros dizem a mesma coisa: com seis quadrados pode-se armar um cubo.

Ela: É verdade. Abra uma caixa cúbica e você verá que ela é formada por seis quadrados, como na figura.



Ele: Isso é o que todos dizem. Mas eu quero mostrar como fazer um cubo com quatro quadrados.

Ela: Com quatro faces você forma uma caixa cúbica, mas ficam faltando duas tampas.

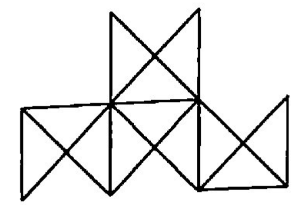
Ele: E se eu fizer um?

Ela: Não existe cubo com quatro faces. Se você quer economizar, experimente viver com menos dinheiro.

Ele: Por falar em dinheiro, você aposta um almoço como eu farei um cubo com menos de quatro quadrados?

Ela: Está fechada a aposta!

Nessa altura, ele apresenta um recorte em cartolina:



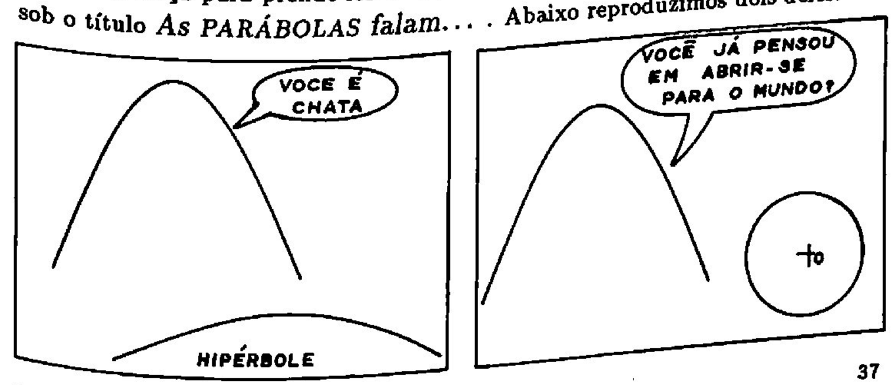
Ele: Aqui havia quatro quadrados e eu recortei triângulos, restam três quadrados. Agora, dobre segundo as retas e veja.

Ela: Não pode ser... bom... de fato, é um cubo. Só que ele é menor do que aquele que eu mostrei.

Ele: A aposta não envolvia medidas. Mas, eu faço um acordo: você paga o almoço e eu, a sobremesa... desde que servida em cubas.

Gildo A. Montenegro é arquiteto e professor aposentado da UFPE. Durante 30 anos ensinou Geometria Descritiva e Desenho. Tem "pós-graduação" em marcenaria, trabalhos manuais, cooper e humor. E amor... ao ensino.

Em uma carta, de 22/11/91, o colega escreveu: "... É verdade que o Desenho foi expulso do 1º e 2º graus; mas a **RPM** tem sempre muitos desenhos e eu espero que os colegas que ensinam Matemática vejam a Geometria e o Desenho como estruturas para ajudar a compreender a natureza e o mundo, não como uma camisa-de-força para prendê-los". Junto com a carta estavam alguns desenhos sob o título *As PARÁBOLAS falam...* . Abaixo reproduzimos dois deles.

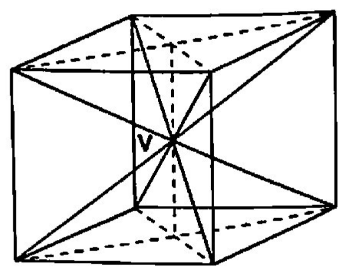


O CUBO E O VOLUME DE UMA PIRÂMIDE

O colega *Wilson Massaro*, de Morro Agudo, SP, também usa o cubo em sala de aula.

Ele observou, ao introduzir o assunto *Volume da Pirâmide*, que os seus alunos tinham dificuldade em enxergar a decomposição de um prisma triangular em três pirâmides equivalentes, como é feito, por exemplo, na **RPM 13**, p. 55. Teve então a idéia de usar um cubo.

Chamando o centro do cubo de V, ficou fácil ver seis pirâmides equivalentes, cada uma com vértice em V e tendo como base uma das faces do cubo.



O volume do cubo, de aresta a, é a^3. Portanto, o volume de cada pirâmide será $a^3/6$. Observando a igualdade:

$$\tfrac{1}{6}a^3 = \tfrac{1}{3} \times a^2 \times \tfrac{1}{2}a,$$

vê-se que o volume de cada pirâmide é $1/3$ da área da sua base (a^2) vezes a sua altura $(a/2)$.

ERRAMOS

RPM 26 – Alguns leitores observaram que a calculadora no topo da página 16 está esquisita. De fato está.

p. 21, ℓ. 06 – versão correta: [÷] [=] [=] [=] [×] [8] [1] [=] [√] [√] [√] [√].

p. 21, ℓ. 21 – no lugar de i_1 leia-se $i_1 + 1$.

p. 53, ℓ. 08 – acrescentar ao subtítulo: (júnior).

Um simples erro tipográfico na sigla de um Estado, feito em 1988 e ainda não corrigido, provocou protestos veementes do leitor *Manoel Eduardo Rocha de Azevêdo*, que, em carta de 05/02/1995, invocando o artigo 29 da Lei 5.250/67, nos "intimou" a fazer a seguinte correção:

RPM 13, p. 63, ℓ. 31 – no lugar de (RJ) leia-se (RN).

TESTES "DIFERENTES"

Compilação: *Renate Watanabe*
RPM, São Paulo

INTRODUÇÃO

Em geral, ao falarmos de testes de Matemática, temos em mente testes de múltipla escolha que apresentam uma questão e 5 alternativas, sendo apenas uma delas a resposta correta à questão.

Nos Estados Unidos, desde 1926, realiza-se um exame, em escala nacional, para estudantes que desejam prosseguir seus estudos após o término do 2º grau. É o chamado SAT (Scholastic Aptitude Test).

O SAT é apresentado em forma de testes mas, na parte referente à Matemática, além dos testes de múltipla escolha com 5 alternativas, há duas outras modalidades de teste: o de *comparação quantitativa* e, mais recentemente, aquele que exige que *o aluno produza a resposta*.

Achando que seus leitores teriam interesse em ver alguns desses testes "diferentes", a **RPM** pediu (e obteve) autorização para publicá-los.

COMPARAÇÕES QUANTITATIVAS

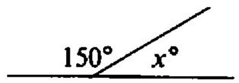
Encabeçando a primeira página que contém esses testes, mas numa disposição diferente da que apresentamos a seguir, encontram-se sempre as instruções e os exemplos:

* INSTRUÇÕES:

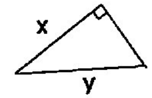
Em cada teste há duas quantidades, uma na Coluna A e outra na Coluna B. Você deve comparar as duas quantidades e na folha de respostas assinalar:

A se a quantidade na Coluna A for a maior;
B se a quantidade na Coluna B for a maior;
C se as duas quantidades forem iguais;
D se a relação entre as quantidades não puder ser determinada a partir da informação dada.

EXEMPLOS:

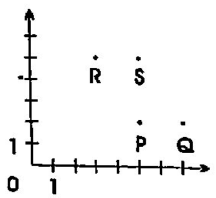
	Coluna A	Coluna B	Respostas
E1	5^2	20	● Ⓑ Ⓒ Ⓓ
E2	 x	30	Ⓐ Ⓑ ● Ⓓ
E3	r e s são inteiros. $r+1$	$s-1$	Ⓐ Ⓑ Ⓒ ●

	Coluna A	Coluna B
1)	$\dfrac{3\cdot 6\cdot 9}{3\cdot 3\cdot 3}$	3
	$x = 5$, $y = -5$	
2)	$x^6 + x^2$	$y^6 + y^2$
	x é um inteiro positivo.	
3)	$\dfrac{x}{3} + \dfrac{1}{3}$	$\dfrac{x}{4} + \dfrac{1}{4}$
	Cidades X, Y e Z distam, cada uma, 10 km da cidade P.	
4)	Distância entre X e Y	Distância entre Y e Z

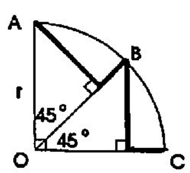
	Coluna A	Coluna B
	x e y são dois inteiros negativos.	
5)	x	$x + y$
		
6)	$\dfrac{x}{y}$	$\dfrac{y}{x}$
	Há 12 pessoas numa sala. Ao todo elas pesam 900 kg.	
7)	O peso de 4 dessas pessoas	300 kg
	A média aritmética de x e y é 4 e $x - y + 2 = 0$.	
8)	x	3

1) A 2) C 3) A 4) D 5) A 6) B 7) D 8) C

Coluna A	Coluna B



9)	Soma das abscissas de P e Q	Soma das abscissas de R e S

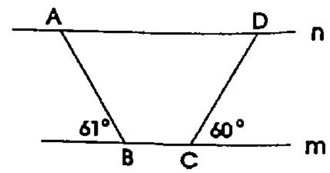


10)	Comprimento total dos quatro segmentos em negrito	2 r

$x < 0$ $\qquad$ $y > 1$

11)	$x\,y$	$\frac{x}{y}$

Coluna A	Coluna B



$m \parallel n$

12)	Comprimento do segmento AB	Comprimento do segmento CD

Para todo a e b, seja $a * b = 2a + b$.

13)	$3 * (0 * 4)$	$(3 * 0) * 4$

$x^2 + 2x - 3 > 0$

14)	x	0

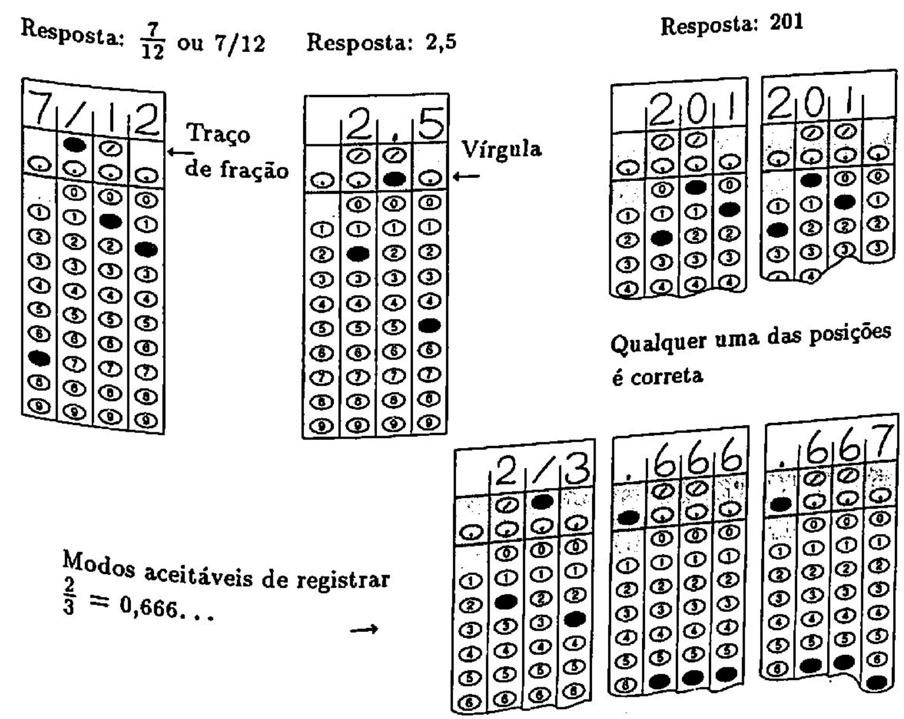
9) A 10) C 11) B 12) B 13) B 14) D

RESPOSTAS PRODUZIDAS PELOS ALUNOS

Os testes são problemas com soluções numéricas. A novidade está no fato de o aluno precisar *produzir* a resposta e não escolhê-la dentre algumas alternativas.

Como o SAT é, atualmente, prestado por mais de um milhão de estudantes, a sua correção, necessariamente, tem que ser feita por máquinas (não por pessoas).

O modo de proceder é o seguinte: para cada problema há, na folha de respostas, uma pequena "grade" onde o aluno colocará a resposta. As "grades" abaixo ilustram o processo:



O NOVO SAT

Em 1990, após três anos de estudos e pesquisas em campo, foram aprovadas mudanças no SAT que entrariam em vigor a partir de 1994.

Na parte de Matemática, as duas maiores novidades foram:

1) problemas com respostas produzidas pelos alunos;
2) calculadoras: uso permitido, porém não necessário.

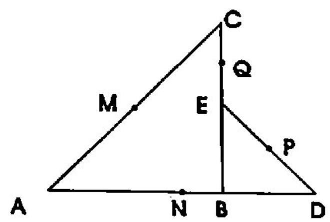
Problemas

Flávio Wagner Rodrigues
IME-USP

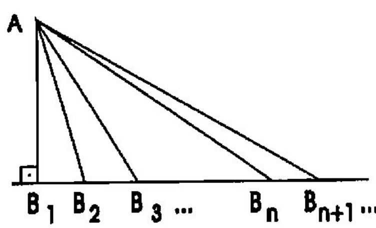
Soluções e Sugestões:
RPM – Problemas
Caixa Postal 66281
05389-970 São Paulo, SP

Problemas

118. Na figura abaixo os triângulos ABC e BDE são retângulos e isósceles. Os pontos M, N, P e Q são respectivamente os pontos médios dos segmentos AC, AD, DE e EC. Prove que o quadrilátero $MNPQ$ é um quadrado.
(Proposto por *Claudio Arconcher*, SP.)



119. Na figura, AB_1, AB_2, AB_3, $\ldots$, AB_n, $\ldots$ crescem em progressão aritmética. Mostre que $B_1B_2 > B_2B_3 > \ldots$
$\ldots > B_nB_{n+1} > \ldots$.
(Enviado por *Antonio Carlos Peixoto de Mello*, DF, que citou como fonte o livro *Elementos de Geometria*, FIC, 16ª ed., p. 38.)



120. Prove que todo número natural tem um múltiplo que se escreve, na base 10, apenas com os algarismos 0 e 1.
(Do livro *Análise Combinatória e Probabilidade*, Morgado, A. e outros, Rio de Janeiro, SBM, 1991.)

Uma sugestão do colega Juarês Saddock de Sá, de Nova Iguaçu, RJ (que aparece nos "probleminhas"), fez com que os responsáveis pela seção lembrassem de um problema que encontraram pela primeira vez em meados da década de 50. Embora, talvez, muitos leitores o conheçam, acreditamos que vale a pena reapresentá-lo aqui por ser essencialmente um exercício de puro raciocínio, exigindo poucos conhecimentos prévios para a sua resolução. E, seguindo o exemplo das televisões, que adaptam para os tempos atuais suas velhas novelas, substituímos por trens metropolitanos os bondes da versão original, que infelizmente (pelo menos para nós da velha guarda) não existem mais.

121. Num sistema elevado de trens metropolitanos existem duas estações, A e B, entre as quais circulam trens nos dois sentidos, com velocidade constante. De 5 em 5 minutos ocorre, simultaneamente, nas duas estações, o cruzamento de dois trens. Um atleta parte da estação A, em direção a B, no instante em que nela se cruzam dois trens, e percorre uma trajetória paralela aos trilhos com velocidade constante, chegando a B num instante em que lá ocorre também o cruzamento de dois trens. Incluindo os trens que viu nas estações, o atleta vê durante o percurso 38 trens, sendo 15 no mesmo sentido e 23 no sentido contrário. Determine o tempo gasto pelos trens para percorrer a distância entre as duas estações. (Considere os trens como objetos pontuais.)

... e probleminhas

1. Você reparou que a **RPM** tem uma nova caixa postal? Mostre que o seu número é produto de dois primos. O novo CEP (sem o 970) também é produto de dois primos. Quais?
(Proposto por *Alciléa Augusto*.)

2. Agora que existem moedas à vontade, de quantos modos distintos você pode pagar 25 centavos?

3. Um trem parte de uma cidade A para uma cidade B no mesmo instante em que outro trem parte de B para A. Os dois se cruzam, cada um em sua trajetória, a 9 km da cidade B. Completam a viagem, partem em sentidos contrários aos iniciais e se cruzam, novamente, a 12 km da cidade A. Supondo constantes as velocidades dos trens, determine a distância entre A e B.
(Enviado por *Juarês Saddock de Sá*, Nova Iguaçu, RJ.)

(V. respostas na p. 62.)

Soluções dos problemas propostos na RPM 25, 1º semestre, 1994

110. Mostre que a equação $x^3 - 6px^2 - 2p^3 = 0$, onde p é um número natural, não admite nenhuma raiz que seja um número natural.

Solução:

Observemos inicialmente que a equação dada é equivalente a $x^2(x - 6p) = 2p^3$. Como o lado direito da igualdade é um número positivo, segue-se que qualquer raiz real da equação será necessariamente maior do que $6p$.

Vamos supor que a equação admita um número natural x_0 como raiz. Nessas condições é fácil ver que o número racional x_0/p é raiz da equação

$$y^3 - 6y^2 - 2 = 0.$$

Como as únicas possíveis raízes racionais dessa equação são ± 1 e ± 2, segue-se que os únicos valores possíveis de x_0 são $\pm p$ e $\pm 2p$. Como nenhum desses valores é maior do que $6p$, conclui-se que não existe nenhum número natural x_0 que seja raiz da equação dada ∎

[*Adaptado de soluções enviadas por vários leitores.*]

Obs.: Os leitores *José Hernandes*, de São José do Rio Preto, SP, *J. Claudio M. Velloso*, do Rio de Janeiro, RJ, e *Sérgio N. Sato*, de Guarulhos, SP, observaram que a equação dada era equivalente a

$$(x - p)^3 + x^3 = (x + p)^3.$$

Segue-se que se existisse uma raiz x_0 que fosse um número natural, como x_0 seria necessariamente maior do que p, existiriam números inteiros positivos, y, z e w tais que $y^3 + z^3 = w^3$, o que contraria o "último teorema de Fermat".
Embora a demonstração no caso geral ainda esteja em suspenso [v. p. 20 nesta RPM], sabe-se que a afirmação do teorema é verdadeira para muitos casos particulares, inclusive para $n = 3$ [v. RPM 15, p. 14].

111. Considere o experimento que consiste em cinco lançamentos independentes de um dado perfeito. Determine a probabilidade de que o produto dos números observados seja múltiplo de 10.

Solução:

O experimento que consiste em cinco lançamentos de um dado perfeito tem $6^5 = 7\,776$ resultados possíveis. Para que o produto dos cinco números observados seja múltiplo de 10 é preciso que pelo menos um deles seja igual a 5 e que pelo menos um deles seja par.

É fácil ver que é bem mais simples contar os elementos do conjunto complementar, isto é, contar o número dos resultados nos quais o produto dos números observados *não* é múltiplo de 10.

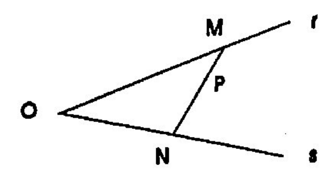
Estão no conjunto complementar todos os resultados que não contêm o número 5, isto é, os resultados formados pelos números 1, 2, 3, 4, 6 que são em número de $5^5 = 3\,125$. Estão também no conjunto complementar os resultados formados

apenas pelos números ímpares, 1, 3, 5, em número de $3^5 = 243$. Observe agora que os resultados formados apenas pelos números 1 e 3 (que são em número de $2^5 = 32$) foram contados duas vezes. Portanto o número dos resultados que não são múltiplos de 10 é $3\,125 + 243 - 32 = 3\,336$.

Segue-se que o número dos que são múltiplos de 10 é $7\,776 - 3\,336 = 4\,440$. Portanto, a probabilidade pedida vale $4\,440 / 7\,776 = 185 / 324$ ∎

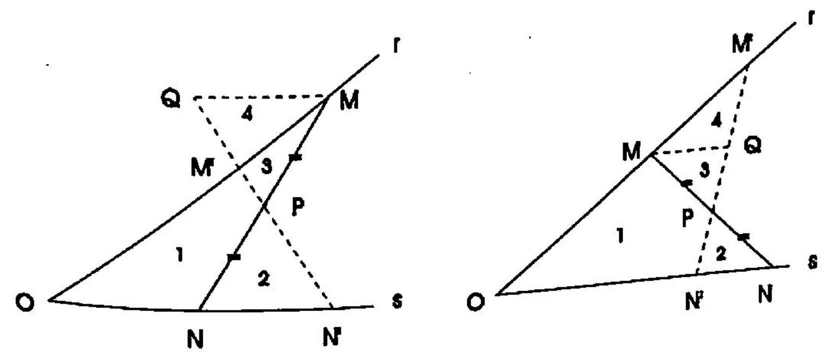
[*Adaptado da solução enviada por* José Bartolomeu de Carvalho, *de Recife, PE.*]

112. Na figura são dadas duas semi-retas r e s, por O, e um ponto P. Entre todos os triângulos OMN, com M e N variando em r e s, respectivamente, tais que $P \in MN$, determinar o de área mínima.



Solução:

O triângulo OMN de área mínima é aquele em que P é ponto médio de MN.



De fato, para qualquer outro triângulo $OM'N'$, traçamos MQ paralela à reta s até encontrar $M'N'$ no ponto Q.
Como os triângulos PQM e PNN' são congruentes, concluímos que a área do triângulo $OM'N'$ é maior do que a área do triângulo OMN ∎

[*Solução de vários leitores.*]

113. Determinar todos os números naturais n para os quais $\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots \binom{n}{n-1}$ são todos números pares.

Solução:

Seja n natural, tal que $\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots \binom{n}{n-1}$ são números pares. Como $n = \binom{n}{1}$ é par, podemos escrever $n = 2^k \cdot p$, onde p é ímpar e k é natural,

$k \geq 1$. Mostraremos que $p = 1$, isto é, $n = 2^k$. De fato, se $p > 1$:

$$\binom{n}{2^k} = \binom{2^k p}{2^k} = \frac{p \cdot (2^k p - 1)(2^k p - 2) \cdots [2^k p - (2^k - 2)][2^k p - (2^k - 1)]}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (2^k - 2)(2^k - 1)}$$

será um número ímpar, já que, para cada $\ell \in \{1, 2, \ldots, 2^{k-1} - 1\}$, $2^k p - 2\ell$ e 2ℓ têm a mesma quantidade de fatores 2.

Falta mostrar que, para s natural, $s \geq 1$, e qualquer $t \in \{1, 2, \cdots, 2^s - 1\}$, $\binom{2^s}{t}$ é um número par. Como $\binom{n}{t} = \binom{n}{n-t}$, então, basta fazer a análise para $t \in \{1, 2, \ldots, 2^{s-1}\}$. O mesmo argumento anterior mostra que, para t par,

$$\binom{n}{t} = \frac{2^s(2^s - 1)(2^s - 2) \cdots [2^s - (t - 1)]}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots (t - 1)t}$$

é par porque $t \leq 2^{s-1}$ e para t ímpar ele é par porque 2^s é um fator do numerador ■

[*Solução enviada por* Carlos Alberto da Silva Victor, *RJ*.]

A volta do professor SERGIO DALMAS

Os responsáveis por esta seção se acostumaram, durante certo período, a receber críticas e sugestões do colega *Segio Dalmas*, de São Vicente, SP. Colaborador assíduo da seção, ele freqüentemente reclamava (algumas vezes com razão) de falhas que descobria nos problemas e nas soluções. De repente as cartas pararam de chegar e a ausência das soluções (geralmente muito boas) do Sergio era compensada pela ilusão de que talvez estivéssemos cometendo um menor número de erros.

Recentemente o Sergio voltou a todo vapor com reclamações, sugestões e até mesmo uma solução para o problema 57 da RPM 11, que pretendemos discutir no próximo número. Descobrimos, então, que ele está agora em Florianópolis, SC (onde faz doutorado em Matemática) e que, provavelmente, os transtornos da mudança (e não uma melhora da qualidade da seção) foram os principais responsáveis pelo seu prolongado silêncio.

Vamos procurar responder agora a uma crítica do Sergio sobre a solução do problema 105, que foi publicada na RPM 25.

Enunciado: Sabendo-se que a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ satisfaz a condição $f(n+1) > f(f(n))$ para todo $n \in \mathbb{N}$, provar que $f(n) = n$.

A solução apresentada começava observando que o conjunto $A = \{f(n) | n \in \mathbb{N}\}$ era um conjunto de números naturais e, portanto, tinha um menor elemento que deveria ser necessariamente $f(1)$. De fato, se $f(k)$, $k > 1$, fosse o menor elemento de A, teríamos uma contradição, uma vez que $f(k) > f(f(k-1))$.

Dissemos a seguir (o que provocou o protesto do Sergio) que o mesmo argumento nos permitia concluir que $f(2)$ era o mínimo do conjunto $B = \{f(2), f(3), \ldots\}$. Embora a afirmação seja verdadeira, a crítica faz sentido, uma vez que a utilização do argumento não é tão simples e óbvia como à primeira vista poderia parecer.

Suponhamos que $f(k)$, $k > 2$, seja o mínimo do conjunto B. Como $f(k) > f(f(k-1))$, $f(f(k-1))$ não pode pertencer a B e, portanto, a única alternativa seria $f(f(k-1)) = f(1)$. Se $f(k-1) = \ell > 1$, $f(\ell) = f(1)$ seria um mínimo de A, o que é absurdo. Se $f(k-1) = 1$, teríamos $f(k-1)$ como um mínimo de A, o que também é absurdo já que k, por hipótese, é maior do que 2. Logo, f(2) é, de fato, o mínimo de B.

Relação dos leitores que enviaram soluções dos problemas 110 a 113 da RPM 25

Andrei W.C. Saraiva (SP) - 110
Carlos A. da S. Victor (RJ) - todos
Edson Roberto Abe (SP) - 111
Evandro de Freitas (RJ) - 110-12
F. W. Leão (RJ) - 112
Geraldo Perlino Jr. (SP) - todos
J. Claudio M. Velloso (RJ) - 110-12
José Aurino da R. Neto (RJ) - 112
José B. de Carvalho (PE) - 111
José Hernandes (SP) - 110-11-13
José R.C. e Carneiro (SP) - 110
Levi B. da Silva (PE) - 110-12-13
Marcelo Guimarães (EUA) - 112
Marco A. Manetta (SP) - 111
Miguel de C. Neves (RJ) - 112
Ricardo R. Ferro (RJ) - 110-13
Roberto P. Chagas (MG) - 112
Sergio Dalmas (SP) - 110-11-12
Ségio N. Sato (SP) - 110-11
Trajano P. da Nóbrega N. (SP) - 110

É só tirar a raiz!

Há algum tempo, trabalhando com turmas noturnas, 1º colegial, um fato inusitado ocorreu.

Era do programa do Colégio repassarmos os assuntos fundamentais da 8ª série durante o 1º bimestre, já que a grande maioria dos alunos carregava sérias deficiências nesses tópicos.

No estudo das equações, era natural rever a equação do 2º grau, com a fórmula de Báskara.

Em meio aos exercícios, um grupo de alunos provenientes todos de uma mesma 8ª série errava, sistematicamente, o cálculo das raízes, quando o delta não era um quadrado perfeito.

Intrigado com o fato, acompanhei, junto ao grupo, a resolução de uma dessas equações. No momento que escreveram a fórmula de Báskara e encontraram o delta, não quadrado perfeito, *eliminaram o radical!*

Sem compreender direito o que eles estavam fazendo, perguntei onde tinham aprendido tal coisa. Apesar da minha incredulidade, foram unânimes em dizer que assim a professora da 8ª série tinha ensinado: *é só tirar a raiz!*

Claudio Arconcher

Augusto Cesar Morgado
Eduardo Wagner

ANALFABETISMO EM MATEMÁTICA E SUAS CONSEQÜÊNCIAS

John Allen Paulos

Editora Nova Fronteira, 1994.

Título original:

Innumeracy: mathematical illiteracy and its consequences

É um livro sobre estatísticas, probabilidades, estimativas e todo o tipo de matemática que interessa ao cidadão comum. De leitura fácil, com dezenas de exemplos bem-humorados e muito bem explicados, o livro pode ser usado pelos alunos, diretamente ou com a orientação do professor.

A maioria das situações descritas são casos reais e vêm sempre acompanhadas de uma pequena história. Algumas são realmente inacreditáveis, como a divulgação, no boletim de meteorologia numa rede de TV, de que a probabilidade de chover num certo final de semana era de 100%, já que a probabilidade de chover no sábado era de 50% e a probabilidade de chover no domingo também era de 50%.

Uma das maiores preocupações do autor é como uma sociedade baseada em ciência e tecnologia pode ser, ao mesmo tempo, tão mal-informada e acreditar tão facilmente em explicações nada científicas para determinados fenômenos.

O trecho a seguir trata disso e ilustra o estilo do autor:

Admita que há uma probabilidade em dez mil de que um sonho específico corresponda com alguns detalhes nítidos a uma seqüência de eventos na vida real. Essa é uma ocorrência bastante improvável e significa que as chances de um sonho não premonitório são de esmagadores 9 999 em 10 mil. Admita também que a correspondência ou não de um sonho à experiência de um dia independe da correspondência ou não de algum outro sonho com a experiência de algum outro dia. Assim, a probabilidade de se ter sucessivamente dois sonhos não correspondentes é, pelo princípio da multiplicação para probabilidade, o produto de 9 999/10 000 e 9 999/10 000. Da mesma maneira, a probabilidade de se ter N noites comuns de sonhos não correspondentes é $(9\,999/10\,000)^N$; para um ano, a probabilidade de sonhos não correspondentes ou não premonitórios é $(9\,999/10\,000)^{365}$.

Uma vez que $(9\,999/10\,000)^{365}$ é cerca de 0,964, podemos concluir que cerca de 96,4% das pessoas que sonham todas as noites terão somente sonhos não correspondentes no intervalo de um ano. Mas isso significa que cerca de 3,6% das pessoas que sonham todas as noites terão sonhos premonitórios. Não é uma fração tão pequena assim; ela se traduz em milhões de sonhos aparentemente pré-cognitivos a cada ano. Mesmo se mudarmos a probabilidade desse tipo de sonho premonitório para uma em um milhão, ainda assim alcançaremos números enormes deles, por mero acaso, somente num país do tamanho dos Estados Unidos. Não há necessidade de invocar nenhuma capacidade parapsicológica; a banalidade de sonhos aparentemente premonitórios não requer explicação. O que precisaria ser explicado seria a não-ocorrência desse fenômeno.

O livro também traz:

- reflexões sobre o ensino da Matemática nos Estados Unidos, em todos os níveis, e aí é interessante notar que algumas dificuldades de lá são as mesmas que temos aqui, como dúvidas sobre o que ensinar, como fazê-lo, como preparar professores, etc.;
- análise de quando levantamentos de opinião (como pesquisas de mercado ou eleitorais) são seguros, bem-feitos ou descompromissados;
- a convicção do autor quanto ao caráter dinâmico da evolução das idéias matemáticas e a opinião de que essas não são propriedade exclusiva dos especialistas, mas pertencem, sim, a todos os cidadãos.

Em resumo, é um ótimo livro, com boa informação matemática, além de analisar o impacto da falta dessa informação na sociedade.

INTRODUÇÃO À GEOMETRIA ESPACIAL

Paulo Cezar Pinto Carvalho

IMPA / VITAE, 1993.

Aprender Geometria Espacial não é uma tarefa fácil. Possivelmente, a principal dificuldade é a falta de modelos tridimensionais adequados e variados o suficiente para que os alunos possam manipular e, mais claramente, visualizar conceitos e propriedades.

Ensinar Geometria Espacial também não é nada fácil. O professor quase nunca tem certeza de quanto rigor é necessário, ou mesmo suficiente, nas explicações e demonstrações.

O primeiro grande mérito do livro do professor Paulo Cezar é identificar, já na Introdução, que as tais dificuldades de *ensinar* e de *aprender*, longe de serem questões distintas, são causa e efeito uma da outra. Além disso, há o destaque para o fato de a Geometria Espacial ser uma ótima (e talvez única) oportunidade de apresentar aos nossos alunos, no 2º grau, uma teoria mais rigorosamente organizada.

A partir daí são apresentados os principais conceitos da Geometria Espacial, como paralelismo de retas, de reta e plano, de planos, com a vantagem adicional da apresentação de figuras espaciais no momento em que já há teoria suficiente para tal. Por exemplo, a construção de pirâmides se dá já na página 9, logo após as propriedades iniciais. Por causa disso, é claro que não há a usual e meio forçada separação em Geometria de posição e Geometria métrica.

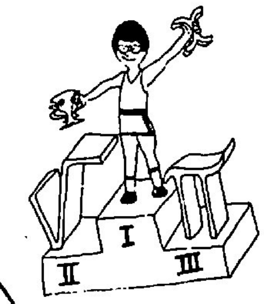
Quase uma centena de exercícios complementam o livro, assim como um capítulo sobre Geometria Descritiva fechando com perfeição as idéias desenvolvidas no texto.

Ao professor este livro será duplamente útil: como fonte de consulta para aprofundar conhecimentos e para verificar uma mais natural (e, para muitos de nós, uma nova) forma de apresentar o assunto em sala de aula.

[*As duas resenhas são da autoria de* Raul F. W. Agostino, PUC-RIO.]

Está previsto para maio o lançamento de mais um livro sobre História da Matemática. Trata-se de uma tradução do excelente livro de Howard Eves: *An Introduction to the History of Mathematics*.

Elio Mega
Etapa, SP

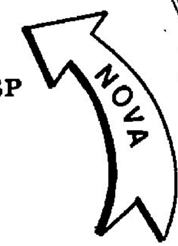


Correspondência:

RPM - Olimpíadas

Caixa Postal 66281

05389-970 São Paulo, SP



OLIMPÍADAS E ENSINO

As Olimpíadas de Matemática, sob as mais variadas formas, estão se disseminando pelo mundo todo. Muito já se discutiu sobre o valor pedagógico dessas olimpíadas e tudo leva a crer que o assunto está longe de encerrar-se. Entretanto, o fato de cada vez mais e mais pessoas estarem se engajando nessa atividade, em praticamente todos os países, pode ser um indicador da sua importância.

As olimpíadas ditas *culturais*, das quais as de Matemática são as mais conhecidas, diferem das olimpíadas esportivas num aspecto aparentemente despercebido: as olimpíadas esportivas constituem-se num fim em si mesmas, isto é, o atleta olímpico treina explicitamente para ganhar medalhas. As olimpíadas de Matemática, pela natureza do evento, não têm a possibilidade de se tornarem seus próprios fins. Não existe nenhum participante de olimpíadas de Matemática que tenha a pretensão de permanecer muito tempo competindo, nem que faça da obtenção de alguma medalha o projeto máximo de sua vida. É claro que há competição, é possível que haja rivalidades, mas os organizadores dessas olimpíadas sempre sublinham o fato de que mais importante do que ganhar medalhas é participar do evento: o estudante olímpico vive uma série de experiências enriquecedoras de sua personalidade e de sua consciência como cidadão do mundo.

Estão sendo discutidos novos formatos de olimpíadas, que buscam minimizar características tidas como negativas e que alguns educadores atribuem a esses eventos, como o elitismo, o estímulo à competitividade doentia, a eliminação de estudantes com potencial que não se enquadram nas normas supostamente rígidas das olimpíadas, etc., etc. Voltaremos a esta discussão em outra oportunidade.

Relatos de todas as partes do mundo evidenciam que as escolas envolvidas com as olimpíadas de Matemática obtiveram algum tipo de melhoria em seu ensino: dedicação maior por parte dos professores envolvidos e um aumento no entusiasmo pelo estudo em geral, não somente da Matemática, são alguns desses aspectos positivos.

OLIMPÍADAS DE 1995

Como tem acontecido nos últimos anos, o Brasil irá participar, em 1995, de três Olimpíadas de Matemática:

Olimpíada Internacional de Matemática, no Canadá, em julho;

Olimpíada Ibero-Americana de Matemática, no Chile, em setembro;

Olimpíada de Matemática do Cone Sul, na Bolívia, em junho.

Além dessas, em 1995 será realizada pela primeira vez a *Olimpíada de Maio*, por correspondência, envolvendo estudantes de várias faixas etárias de países ibero-americanos.

Neste momento, estudantes de várias partes do Brasil, selecionados pela Olimpíada Brasileira de Matemática de 1994, estão participando do treinamento que se estende do início do ano até o mês de maio, quando se submeterão a uma prova adicional. A composição das três equipes levará em conta a classificação na Olimpíada, o desempenho no treinamento e o resultado da prova final, como já tivemos oportunidade de explicar em artigos anteriores.

Apresentamos a seguir as questões das provas das olimpíadas Mundial (35ª OIM) e Ibero-Americana (9ª OIAM) de Matemática de 94. O leitor que desejar receber as resoluções dessas questões (≈ 6 folhas, tamanho ofício) deverá encaminhar o pedido, juntamente com um envelope auto-endereçado e selado, para:

Professor Elio Mega
ETAPA / Olimpíadas de Matemática
Rua Vergueiro, 1987
04101-000 São Paulo, SP

QUESTÕES DA 35ª OIM — (Hong Kong)

A duração das provas de cada dia é de 4,5 horas e cada problema vale 7 pontos.

Primeiro dia

13 de julho de 1994

1. Sejam m e n inteiros positivos e $a_1, a_2, \ldots, a_m$ elementos distintos de $\{1, 2, \ldots, n\}$, tais que sempre que $a_i + a_j \leq n$, para $1 \leq i \leq j \leq m$, então existe algum $k, 1 \leq k \leq m$, tal que $a_i + a_j = a_k$. Prove que

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_m}{m} \geq \frac{n+1}{2}.$$

2. Seja ABC um triângulo isósceles com $AB = AC$. Suponhamos que
   i) M é o ponto médio do segmento $\overline{BC}$ e O é o ponto da reta $\overleftrightarrow{AM}$ tal que $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BO}$ são perpendiculares;
   ii) Q é um ponto do segmento $\overline{BC}$ diferente de B e C;
   iii) E é um ponto da reta $\overleftrightarrow{AB}$ e F é um ponto da reta $\overleftrightarrow{AC}$ tais que E, Q e F são distintos e colineares.

   Prove que $\overleftrightarrow{OQ}$ e $\overleftrightarrow{EF}$ são perpendiculares se, e somente se, $QE = QF$.

3. Para todo inteiro positivo k, seja $f(k)$ o número de elementos do conjunto $\{k+1, k+2, \ldots, 2k\}$, cuja representação na base 2 tem exatamente três algarismos 1.
   a) Prove que, para cada inteiro positivo m, existe pelo menos um inteiro positivo k tal que $f(k) = m$.
   b) Determine todos os inteiros positivos m para os quais existe um único k tal que $f(k) = m$.

Segundo dia

14 de julho de 1994

4. Determine todos os pares de inteiros positivos (m, n) tais que

$$\frac{n^3+1}{mn-1} \quad \text{seja um inteiro.}$$

5. Seja S o conjunto dos números reais estritamente maiores que -1. Determine todas as funções $f : S \longrightarrow S$ que verificam as duas condições seguintes:
   i) $f(x + f(y) + xf(y)) = y + f(x) + yf(x)$ quaisquer que sejam x e y em S;
   ii) $f(x)/x$ é estritamente crescente em cada um dos intervalos $-1 < x < 0$ e $x > 0$.

6. Mostre que existe um conjunto de inteiros positivos A verificando a seguinte propriedade: dado qualquer conjunto infinito de números primos S, existem dois inteiros positivos $m \in A$ e $n \notin A$, cada um dos quais sendo o produto de k, $k \geq 2$, elementos distintos de S.

QUESTÕES DA 9ª OIAM — (Fortaleza)

A duração das provas de cada dia é de 4,5 horas e cada problema vale 10 pontos.

Primeiro dia
20 de setembro de 1994

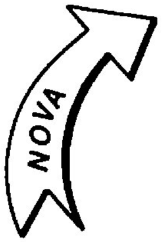
1. Diz-se que um número natural n é *sensato* se existe um inteiro r, com $1 < r < n - 1$, tal que a representação de n na base r tem todos os seus dígitos iguais. Por exemplo, 62 e 15 são sensatos, já que 62 é 222 na base 5 e 15 é 33 na base 4. Demonstrar que 1993 *não* é sensato mas 1994 *é*.
2. Seja um quadrilátero inscrito em uma circunferência, cujos vértices se denotam consecutivamente por A, B, C e D. Suponha que exista uma semicircunferência com centro em $\overline{AB}$, tangente aos outros três lados do quadrilátero.
   i) Demonstrar que $AB = AD + BC$.
   ii) Calcular, em função de $x = AB$ e $y = CD$, a área máxima que pode atingir um quadrilátero que satisfaz as condições do enunciado.
3. Em cada casa de um tabuleiro $n \times n$ há uma lâmpada. Ao ser tocada uma lâmpada, mudam de estado ela própria e todas as lâmpadas situadas na linha e na coluna que ela determina (as que estão acesas se apagam e as que estão apagadas se acendem).
   Inicialmente todas estão apagadas. Demonstrar que é sempre possível, com uma sucessão adequada de toques, fazer com que todo o tabuleiro fique aceso e encontrar, em função de n, o número mínimo de toques para que se acendam todas as lâmpadas.

Segundo dia
21 de setembro de 1994

4. São dados os pontos A, B e C sobre uma circunferência K de maneira que os ângulos do triângulo ABC sejam agudos. Seja P um ponto interior a K. São traçadas as retas $\overleftrightarrow{AP}, \overleftrightarrow{BP}$ e $\overleftrightarrow{CP}$, que cortam novamente a circunferência em X, Y e Z. Determinar o ponto P para que o triângulo XYZ seja equilátero.
5. Sejam n e r dois inteiros positivos. Deseja-se construir r subconjuntos $A_1, A_2, ..., A_r$ de $\{0, 1, ..., n-1\}$, cada um deles com exatamente k elementos, tais que, para cada inteiro x, $0 \leq x \leq n - 1$, existem x_1 em A_1, x_2 em $A_2, ..., x_r$ em A_r (um elemento em cada conjunto), com
   $$x = x_1 + x_2 + ... + x_r\,.$$
   Achar o menor valor possível de k em função de n e r.
6. Demonstrar que todo número natural $n \leq 2^{1\,000\,000}$ pode ser obtido a partir de 1 fazendo-se menos de 1 100 000 somas; mais precisamente, há uma sucessão finita de números naturais $x_0, x_1, ..., x_k$ com $k < 1\,100\,000$, $x_0 = 1$, $x_k = n$, tal que, para cada $i = 1, 2, ..., k$, existem r, s com $0 \leq r < i, 0 \leq s < i$ e $x_i = x_r + x_s$.

O leitor pergunta

Vera Helena Giusti de Souza
IME-USP



Envie suas perguntas para

RPM – O leitor pergunta

Caixa Postal 66281

05389-970 São Paulo, SP

– Um leitor de Jataí, GO, pergunta sobre *Diofante*.

RPM: Pouco se sabe sobre a vida do grego *Diofante*. Crê-se que tenha vivido em Alexandria, por volta de 250 d.C. Sua grande obra, *Arithmetica*, tem 6 volumes preservados, mas acredita-se que foi escrita em 13 volumes.

Quanto ao seu trabalho matemático, destacamos alguns pontos interessantes:

- Embora escrita em grego, sua obra não apresenta as mesmas características dos trabalhos gregos do período - por exemplo, seu enfoque na Álgebra, incipiente na Matemática grega da época, ou, ainda, sua não-preocupação com métodos gerais. Assim, a resolução de equações indeterminadas do tipo $Ax^2 + Bx + C = y^2$, ou $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = y^2$, consistia em obter *uma* solução e não se preocupar com as demais. Entre as equações que estudou estão, por exemplo, $x^2 - 26y^2 = 1$ e $x^2 - 30y^2 = 1$, hoje conhecidas como *equações de Pell*.
- Diofante só se interessava por soluções racionais positivas, não aceitando as negativas ou as irracionais.
- Na obra de Diofante encontramos pela primeira vez o uso sistemático de símbolos algébricos. Equações algébricas são expressas

por símbolos algébricos e seu tratamento é puramente analítico, desvinculado de métodos geométricos. Identidades como $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$, que, para *Euclides*, eram teoremas da Geometria, para Diofante eram conseqüências imediatas das propriedades algébricas das operações.

• Diofante era muito hábil no manuseio algébrico. Por exemplo, para *calcular dois números, sabendo que a sua soma é 20 e a soma de seus quadrados é 208*, ele representava esses números por $10-x$ e $10+x$ e não por x e y. Tal procedimento, em muitos casos, simplificava a resolução de um problema.

• Outro problema abordado por ele: *dividir um quadrado em dois quadrados*, isto é, encontrar inteiros a, b e c tais que $a^2+b^2 = c^2$, parece ter despertado a atenção de *Fermat*, que, ao ler a cópia do livro de Diofante, fez diversas anotações nas margens, entre elas o famoso "último teorema de Fermat" (v. **RPM 15**, p. 14 e nesta revista p. 20).

• Os problemas estudados por Diofante são problemas indeterminados que exigem soluções inteiras (ou racionais) positivas e envolvem, em geral, equações de grau superior ao primeiro. Mesmo assim, hoje em dia, equações indeterminadas do primeiro grau, com coeficientes inteiros, são chamadas *equações diofantinas* em homenagem ao pioneirismo de Diofante nessa área.

• A título de curiosidade, reproduzimos um problema que apareceu sob forma de poema no quinto ou sexto século. Ele permite calcular quantos anos Diofante viveu:

Diofante passou 1/6 de sua vida na infância, 1/12 na juventude e mais 1/7 antes de se casar; 5 anos após seu casamento, nasceu um filho que morreu 4 anos antes do pai com a metade da idade que este tinha ao morrer.

(Para redigir essa resposta, e por estarem à mão, os seguintes livros foram consultados:

[1] BOYER, C.B. *História da Matemática*. São Paulo, Edgar Blücher, 1974.
[2] CAJORI, F. *A history of Mathematics*. 2. ed. New York, Macmillan, 1919.
[3] MONTEIRO, L.H.J. *Elementos de Álgebra*. Rio de Janeiro, Ao Livro Técnico, 1969.
[4] STRUIK, D. J. *A concise history of Mathematics*. London, G. Bell and Sons, 1954.)

– Um leitor de Valença, RJ, quer saber qual a taxa de juros embutida na seguinte situação:

Um CD custa R\$23,00 à vista, mas pode ser pago em 3 prestações de R\$10,00, uma de entrada, uma em 30 dias e outra em 60 dias.

RPM: Cuidado ao fazer compras — a taxa de juros embutida em pagamentos parcelados pode ser muito elevada! Veja como proceder:

Supondo juros simples, faça a seguinte conta:

- você paga R\$10,00 no ato da compra e fica devendo R\$13,00;
- esses R\$13,00, após 60 dias, transformam-se em R\$20,00;
- portanto, temos: $20-13=7=\dfrac{13\times i\times 2}{100}$ e $i=26{,}92\%$ ao mês.

Supondo juros compostos, a conta fica:

- você paga R\$10,00 no ato da compra e fica devendo R\$13,00;
- ao fim de 30 dias essa dívida de R\$13,00 transforma-se em $13(1+\frac{i}{100})$ reais;
- você paga R\$10,00; portanto, ao fim de 30 dias, você fica devendo $13\,(1+\frac{i}{100})-10$;
- ao fim de 60 dias, você deve $\left[13\,(1+\dfrac{i}{100})-10\right](1+\dfrac{i}{100})$
- e tem que pagar R\$10,00; portanto,
$$10=\left[13\,(1+\frac{i}{100})-10\right](1+\frac{i}{100});$$
- calculando o valor de i, chega-se a $i\approx 34{,}15\%$ ao mês.

Para explicações mais detalhadas, veja **RPM 8**, p. 11, **RPM 20**, p. 23 ou **RPM 22**, p. 13.

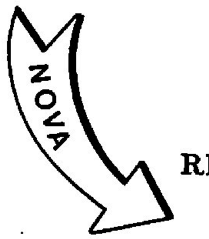
– Uma leitora de Sobradinho, DF, quer saber a origem das palavras *cateto* e *hipotenusa*.

RPM: Ambas vêm do grego:

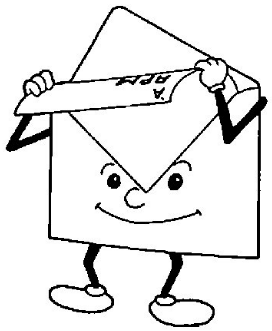
- cateto vem de *kátetos* e quer dizer "vertical" ou "perpendicular";
- hipotenusa vem de *hypoteínousa* e significa "linha estendida por baixo".

Não localizamos nenhum outro fato ligado a essas palavras. Algum leitor teria maiores informações?

Cartas do leitor



Correspondência:
RPM – Cartas do leitor
Caixa Postal 66281
05389-970 São Paulo, SP



- **O leitor sugere**

— De Fortaleza, CE, escreve-nos o colega *Antonio Flávio Ribeiro* sugerindo que a RPM crie uma seção que informe aos professores quanto ao que existe no Brasil sobre Informática na Educação Matemática.

— De Hortolândia, SP, o colega *Ilson Tercio Caetano* pede que a Revista traga mais artigos sobre o currículo do 2º grau e a posição da sociedade quanto ao fim dos vestibulares.

— De Aiuruoca, MG, o colega *Celso Martinez Rodrigues* conta que sente falta de artigos na área de Informática, como aquele da professora Gilda de La Rocque Palis (**RPM 26**, p. 30) e que gostaria de ter informações sobre softwares educativos. Diz também que sente o interesse da Revista na modificação do currículo do 2º grau, especialmente através dos artigos do professor Geraldo Ávila, mas constata que pouco tem sido feito nessa direção.

RPM. Boas sugestões! Estaremos pensando nelas.

- 5×6? ou 6×5?

O colega *Rubens Linhares da Páscoa*, de Fortaleza, CE, não concordou com a resposta da Revista sobre "A ordem dos fatores" (**RPM 25**, p. 58). Apresenta o exemplo do número total de jogadores em 5 equipes de vôlei ou em 6 equipes de basquete.

RPM. De fato, $5+5+5+5+5+5$ e $6+6+6+6+6$ são operações distintas que têm o mesmo resultado. Apenas não há necessidade de distinguir qual delas seja 5×6 e qual seja 6×5 porque $5 \times 6 = 6 \times 5$. Além disso, qual seria a diferença entre pi vezes raiz de 2 e raiz de 2 vezes pi?

- **A reencarnação da Geometria**

Do Rio de Janeiro, escreve-nos o colega aposentado *Joaquim Trotta* enviando o informativo mensal do Grupo de Estudo Sistematizado da Doutrina Espírita, em que ele publica um artigo com o título acima. Nesse artigo, ele lamenta que o estudo da Geometria venha sendo relegado a um segundo plano e reforça seus argumentos com dados extraídos do currículo chinês (**RPM 25**, p. 33).

- **"Socorro, Tartaglia!"**

De Mogi das Cruzes, SP, escreve-nos o estudante *Clodovaldo Lessa* propondo-se a escrever um artigo sob o título acima, sobre equações do 3º grau. Pergunta como deve escrever para que ele seja publicado na Revista, como pode assinar a **RPM** e como fazer para receber os números atrasados.

RPM. A equação do 3º grau já foi objeto de vários artigos (**RPM 7**, p. 26, **RPM 25**, p. 23). A equação citada na carta está no artigo *A emergência dos números complexos* (**RPM 24**, p. 8). Se o artigo proposto, entretanto, não for repetição de tópicos já vistos e se estiver dentro dos parâmetros traçados na 3ª capa da **RPM 24**, basta enviar uma cópia, de preferência datilografada, ao endereço da Revista e será submetido ao Comitê Editorial. Quanto à assinatura da **RPM**, ela é gratuita para professores de Matemática e está à venda para outros leitores interessados. Quanto aos números atrasados, a informação está na 2ª capa deste número.

- **Par ou ímpar**

O colega *Artur Pires Custódio*, de Santa Luzia, MG, escreve para agradecer a publicação do artigo *Par ou ímpar*, de sua autoria (**RPM 25**, p. 31). Junto com os votos de Feliz Ano Novo, manifesta o desejo de que a **RPM** continue a existir em 1995.

RPM. Quem agradece ao autor é a equipe da Revista. A **RPM** existe para ser o ponto de encontro entre professores de Matemática dos vários recantos do país. Sua existência futura depende, em grande parte, da colaboração de seus leitores com artigos interessantes.

• Será mesmo solução?

O colega e colaborador *Paulo Argolo*, do Rio de Janeiro, RJ, pede uma prova de que, no processo de substituição usado na resolução de um sistema linear, a solução obtida seja mesmo solução do sistema de partida: resolvido um sistema linear com n equações nas variáveis $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ pelo método de substituição, de forma que

- o valor de x_1 em função das demais variáveis obtido na 1ª equação e
- substituído na 2ª permita o cálculo de x_2 em função de $x_3, x_4, \dots, x_n$ e,
- por substituições sucessivas, se obtenha $x_n = a_n$ na última equação e,
- voltando, se obtenham $x_{n-1} = a_{n-1}$, $x_{n-2} = a_{n-2}, \dots$ $x_1 = a_1$,

mostrar que $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ é de fato solução do sistema dado inicialmente.

RPM. A esse respeito, há alguns pontos a considerar:

1º A pergunta faz sentido pois muitas vezes, durante um processo de resolução, são introduzidas soluções estranhas ao problema de partida ou mesmo algumas são perdidas, embora isso não se dê no caso aqui apresentado.

2º O método de substituição para a resolução de sistemas lineares pode ser "substituído" com vantagens pelo processo de escalonamento (**RPM 23**, p. 12).

3º A prova solicitada é uma conseqüência do fato de que, a cada passo, o sistema de partida é substituído por um outro (em que as primeiras equações são substituídas pelas expressões das primeiras variáveis em relação às demais) que lhe é equivalente, ou seja, ambos têm exatamente as mesmas soluções. Isso decorre do fato de que, a cada passo, o coeficiente da variável que se pretende isolar é diferente de 0 (daí a possibilidade de que ela seja calculada em função das demais).

Respostas dos probleminhas (p. 45)

(1) 66 281 = 79 × 839; 5 389 = 17 × 317.
(2) 13. (3) 15 km.

CONTEÚDO