Nº 1

# Revista do Professor de Matemática



INSTITUTO DE EDUCAÇÃO
LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA

Vol. 1, nº 1, 1982

## ASSINATURAS

O leitor que preencheu o formulário do folheto de lançamento da Revista receberá também os próximos números. Comunicações de alteração no endereço ou novos pedidos de assinatura devem ser enviados à:

Revista do Professor de Matemática
Caixa Postal 20570
01000 - São Paulo - SP

Cada novo pedido deve conter: nome, endereço completo para correspondência (com CEP) e a informação de que o leitor recebeu, ou não, este primeiro número da Revista.

Os pedidos de alteração devem incluir, ainda, a etiqueta que acompanha este número.

A assinatura continua sendo gratuita.


## EXPEDIENTE

**Sociedade Brasileira de Matemática**
Presidente: Imre Simon
Secretário: Carlos Edgard Harle
Tesoureiro: Alfredo Jones

**Comitê Editorial da Revista do Professor de Matemática:**
Alciléa A. H. de Mello (Editora-Chefe) - Instituto de Matemática e Estatística, USP.
Elon Lages Lima - Instituto de Matemática Pura e Aplicada, RJ.
Geraldo S. S. Ávila - Universidade de Brasília, DF.
Mario Barone Júnior - Instituto de Matemática e Estatística, USP.
Renate G. Watanabe - Universidade Mackenzie, SP

Cadastro e revisão deste número: Maria Elisa G. G. de Oliveira, Sakuya A. Honda, Maria Takishita.
Capa: Coruja Fotolito Ltda. - São Paulo.

Fontes de financiamento: SBM, FINEP, CNPq e MEC.
Tiragem deste número: 14.000 exemplares.
Vol I, nº 1, 1982.


*Da esquerda para a direita os jovens Ricardo Teixeira de Carvalho, Luis Alberto dos Santos, Paulo Sergio Vieira de Brito e Alair Pereira do Lago, que formaram a equipe que representou o Brasil na recente Olimpíada Internacional de Matemática na Hungria (ver notícia na página 20).*

## AO LEITOR

A Revista do Professor de Matemática é uma publicação semestral da *Sociedade Brasileira de Matemática*. O escopo da revista é o de se constituir num ponto de encontro de professores de Matemática atuantes nos 1º e 2º graus, contando experiências, procurando respostas, discutindo sugestões, divulgando notícias.

Professor, colabore com a sua Revista, escrevendo para

Revista do Professor de Matemática
Caixa Postal 20570
01000 - São Paulo - SP

## ÍNDICE

# Para que serve?

Luis Márcio Pereira Imenes e
José Jakubovic
Rua Mar Paulista, 574
04464 - Santo Amaro - SP

P'rá que serve isto, professor?

Onde vou usar isto, professora?

Todos nós, professores de matemática, já ouvimos estas perguntas em sala de aula.

E foram poucas as vezes em que conseguimos dar a elas uma resposta que satisfizesse e convencesse o aluno.

As respostas clássicas que costumamos dar são estas:

—Mais tarde você vai usar na física.
—Se você quer estudar engenharia precisa saber isto.
—Estude porque mais tarde vai cair no vestibular.

Com estas respostas a gente mais se livra do problema do que atende realmente a uma justa curiosidade do aluno.

É fácil entender por que não temos respostas satisfatórias para estas perguntas. Ensinamos o que aprendemos e a matemática que aprendemos também é desligada da realidade. Nós também, muitas vezes, não sabemos para que serve a matemática, embora saibamos que ela serve para alguma coisa.

É preciso romper o ciclo vicioso e esta seção da revista tentará colaborar neste sentido. Vamos ver para que servem certos temas matemáticos estudados no primeiro e no segundo grau.

Entretanto melhor que dar um peixe é ensinar a pescar. Nós, autores deste artigo, temos conseguido algumas respostas para a pergunta: p'rá que serve isto ou aquilo na matemática? Gostaríamos de contar aos nossos colegas como temos conseguido isto.

O mundo está à nossa volta e a matemática está presente nele, cotidianamente, nas atividades de muitas pessoas. É preciso sair em busca disso e conversar com outras pessoas. Desenhistas mecânicos, projetistas, agrimensores, engenheiros, mestres de obra, comerciantes, bancários, ferramenteiros, torneiros mecânicos e outros utilizam muito a matemática nas suas atividades profissionais. Interrogá-los e saber que matemática usam é uma experiência bastante rica.

Essa é uma sugestão aos colegas que trabalham com alunos adolescentes ou adultos em cursos noturnos principalmente (por exemplo nos cursos supletivos). Muitos deles trabalham naquelas profissões que relacionamos acima. Peçam-lhes que tragam os problemas que enfrentam nos seus trabalhos e que usam a matemática.

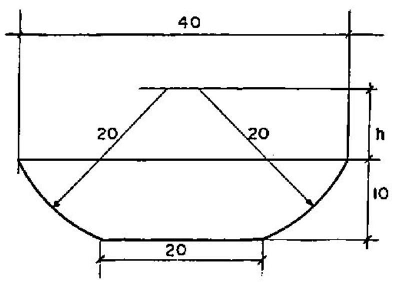
Temos feito isto e aos poucos têm aparecido problemas interessantes, onde surge uma matemática viva, presente no trabalho diário daquelas pessoas. Os alunos gostam disto. Passam até mesmo a contar conosco para a resolução de problemas que lhes surgem no seu trabalho.

Certa vez um aluno nos procurou apresentando o seguinte problema: o desenho a seguir é o perfil de uma peça usada na fabricação de bacias de plástico.

Para fundir as bacias é necessário fazer um molde e antes disso é necessário projetá-lo, desenhá-lo, conhecer suas dimensões.

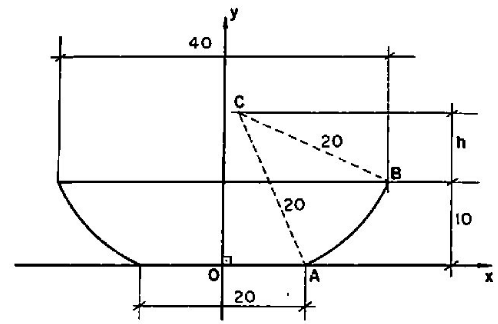
O problema que ele me pedia para resolver era este: conhecidas as medidas indicadas no esquema, calcular h.






Este problema pode ser resolvido usando os métodos da geometria analítica.

Aproveitando a simetria da figura vamos escolher um sistema de coordenadas assim:




Nestas condições, temos:
A(10;0), B(20;10), C(x;10+h) e CA = CB = 20.

Vamos calcular as distâncias CA e CB:

$$CA = \sqrt{(x-10)^2 + (10+h-0)^2} = 20$$
$$CB = \sqrt{(x-20)^2 + (10+h-10)^2} = 20$$

ou

$$\begin{cases} x^2 - 20x + 100 + 100 + 20h + h^2 = 400 & (1) \\ x^2 - 40x + 400 + h^2 = 400 & (2) \end{cases}$$

Fazendo (*1*) − (*2*) vem: $20x - 200 + 20h = 0$
donde: $x - 10 + h = 0$
logo: $x = 10 - h$ (*3*)

Substituindo (*3*) em (*2*) chegamos a:
$$h^2 - 10h - 150 = 0$$

Resolvendo esta equação do segundo grau e lembrando que $h \neq 0$ obtemos: h=8,2 cm.

Veja bem, este não é simplesmente um exercício de matemática. Com um exemplo destes é possível mostrar ao aluno onde serve a matemática.

É claro que nem sempre é fácil responder a pergunta: para que serve isto, professor?

Em alguns capítulos da matemática esta resposta é realmente complicada. Por exemplo: para que estudar os polinômios? Para que aprender a dividir polinômios? Talvez neste caso não haja outro jeito senão dizer ao aluno que o conhecimento dos polinômios é necessário no estudo de certas equações (é fácil mostrar a importância prática de se saber resolver equações). Nossa experiência revela que o aluno não se aborrece quando, *às vezes*, lhe damos a resposta: "isto será usado mais adiante". O que não o convence é ouvir esta resposta o tempo todo.

Além disso, vivemos num mundo extremamente utilitarista, onde as coisas têm sempre que servir a um fim material específico. No entanto, o homem continua gostando de fazer certas coisas que não têm utilidade imediata, no sentido utilitarista do termo. A arte é um exemplo disto.

Às vezes, na matemática, estudamos certos assuntos, resolvemos certos problemas, simplesmente com a intenção de vencer desafios, brincar com a matemática, divertir-nos com ela. Esta dimensão também deve ser mostrada ao aluno: é possível sentir prazer brincando com a matemática.

### A Matemática e o caipira

Esta história tem dois personagens: o caipira e o advogado e ela me foi contada por um amigo do advogado. Passa-se há sete ou oito anos atrás, nas proximidades de São Paulo.

Vai lá um dia em que nosso amigo advogado resolve comprar um sítio, de poucos alqueires, com a intenção de construir uma casa e nela passar seus fins de semana. Como não havia nascente no sítio, resolveu mandar cavar um poço, quando ficou sabendo que seu vizinho, um caipira que ali morava há muito tempo, tinha em sua propriedade uma nascente com água boa e farta. Procurou o vizinho e fez a proposta:

—Eu instalo um cano de uma polegada de diâmetro na sua nascente, conduzo a água para o meu sítio e lhe pago $x$ cruzeiros por mês.

A proposta foi aceita na hora.

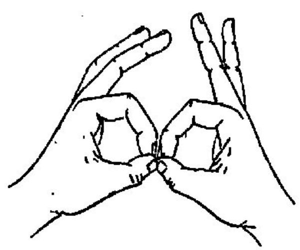
Passa-se o tempo e o advogado resolve implantar no sítio uma criação racional de porcos e, para isso, iria precisar de mais água. Voltou a procurar o caipira e lhe propôs trocar o cano de uma polegada por um outro de duas polegadas de diâmetro e pagar $2x$ cruzeiros por mês a ele.

O caipira escutou a proposta, não deu resposta imediata, pensou, e passados alguns minutos respondeu que *não* aceitava a proposta.

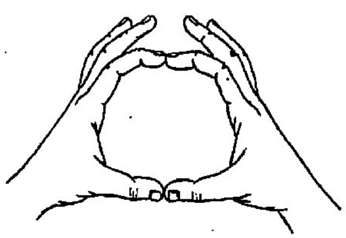
—Mas como? Perguntou o advogado. Tem água sobrando, por que não me vende mais e assim também ganha mais?

—É que num tá certo, retrucou o caipira, e explicou com um gesto. A água que vosmecê me paga passa por aqui:

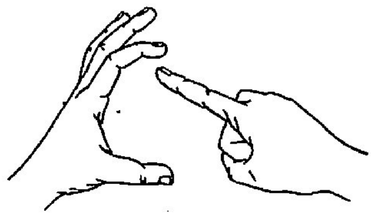
E vosmecê qué me pagá o dobro.



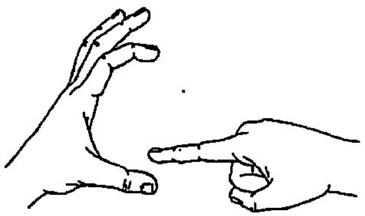
Acontece que o cano que ocê vai ponhá é assim:



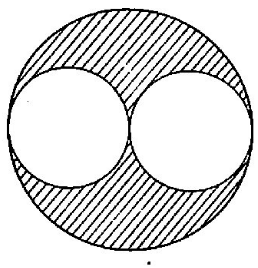
Pois é, quem me paga a água que passa por aqui.



e a que passa por aqui?



Com a nossa linguagem a questão fica assim: um círculo de diâmetro 1 cabe 2 vezes num círculo de diâmetro 2 e ainda fica sobrando espaço:



Ou ainda: se o diâmetro de um círculo dobra, sua área não dobra. Ela "mais que dobra".

O que o caipira não tinha condições de perceber era que o pagamento correto seria $4x$ (quando duas figuras são semelhantes a razão entre suas áreas é igual ao quadrado da razão entre seus comprimentos correspondentes). Mas para perceber que $2x$ é pouco basta visualizar um cano dentro do outro.



## Conceitos e controvérsias



Elon Lages Lima
Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA
Edifício Lélio Gama
Estrada Dona Castorina 110
22460 - Rio de Janeiro - RJ

Minha intenção aqui é a de apresentar opiniões e esclarecimentos sobre pontos controvertidos, dúvidas, dificuldades e questões em geral que preocupem o professor de Matemática. Os assuntos de que tratarei, gostaria que fossem sugeridos pelo leitor, motivados por seu desejo de aprimorar-se, provocados por sua curiosidade, suscitados às vezes por sua perplexidade diante de opiniões divergentes. Prefiro e darei sempre prioridade a questões relativas à Matemática propriamente dita, embora possa eventualmente discutir problemas correlatos, como os didáticos, por exemplo. Por favor, dirijam sua correspondência a mim no seguinte endereço:

Instituto de Matemática Pura e Aplicada
(I.M.P.A.)
Edifício Lélio Gama
Estrada Dona Castorina 110
CEP 22460 - Rio de Janeiro - RJ

Enquanto não chegam as indagações dos leitores, vamos começar com algumas perguntas que me foram feitas, em diferentes ocasiões e lugares, por pessoas interessadas em ensinar Matemática.

### Zero é um número natural?

Sim e não. Incluir ou não o número 0 no conjunto N dos números naturais é uma questão de preferência pessoal ou, mais objetivamente, de conveniência. O mesmo professor ou autor pode, em diferentes circunstâncias, escrever $0 \in N$ ou $0 \notin N$. Como assim?

Consultemos um tratado de Álgebra. Praticamente em todos eles encontramos $N = \{0, 1, 2, ...\}$. Vejamos um livro de Análise. Lá acharemos quase sempre $N = \{1, 2, 3, ...\}$.

Por que essas preferências? É natural que o autor de um livro de Álgebra, cujo principal interesse é o estudo das operações, considere zero como um número natural pois isto lhe dará um elemento neutro para a adição de números naturais e permitirá que a diferença $x-y$ seja uma operação com valores em N não somente quando $x>y$ mas também se $x=y$. Assim, quando o algebrista considera zero como número natural, está facilitando a sua vida, eliminando algumas exceções.

Por outro lado, em Análise, os números naturais ocorrem muito freqüentemente como índices de termos numa seqüência. Uma seqüência (digamos, de números reais) é uma função $x: N \to R$, cujo domínio é o conjunto N dos números naturais. O valor que a função x assume no número natural n é indicado com a notação $x_n$ (em vez de $x(n)$) e é chamado o "n-ésimo termo" da seqüência. A notação $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ é usada para representar a seqüência. Aqui, o primeiro termo da seqüência é $x_1$, o segundo é $x_2$ e assim por diante. Se fôssemos considerar

$N = \{0, 1, 2, \ldots\}$ então a seqüência seria $(x_0, x_1, x_2 \ldots, x_n, \ldots)$, na qual o primeiro termo é $x_0$, o segundo é $x_1$, etc. Em geral, $x_n$ não seria o n-ésimo e sim o (n+1)-ésimo termo. Para evitar essa discrepância, é mais conveniente tomar o conjunto dos números naturais como $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Para encerrar este tópico, uma observação sobre a nomenclatura matemática. Não adianta encaminhar a discussão no sentido de examinar se o número zero é ou não "natural" (em oposição a "artificial"). Os nomes das coisas em Matemática não são geralmente escolhidos de modo a transmitirem uma idéia sobre o que devem ser essas coisas. Os exemplos abundam: um número "imaginário" não é mais nem menos existente do que um número "real"; "grupo" é uma palavra que não indica nada sobre seu significado matemático e, finalmente, "grupo simples" é um conceito extremamente complicado, a ponto de alguns de seus exemplos mais famosos serem chamados (muito justamente) de "monstros".

**Por que $(-1)(-1) = 1$?**

Meu saudoso professor Benedito de Moraes costumava explicar, a mim e a meus colegas do segundo ano ginasial, as "regras de sinal" para a multiplicação de números relativos da seguinte maneira:

1ª) o amigo do meu amigo é meu amigo, ou seja, $(+)(+) = +$ ;

2ª) o amigo do meu inimigo é meu inimigo, isto é, $(+)(-) = -$ ;

3ª) o inimigo do meu amigo é meu inimigo, quer dizer, $(-)(+) = -$;

e, finalmente,

4ª) o inimigo do meu inimigo é meu amigo, o que significa $(-)(-) = +$ . Sem dúvida esta ilustração era um bom artifício didático, embora alguns de nós não concordássemos com a filosofia maniqueísta contida na justificação da quarta regra (podíamos muito bem imaginar três pessoas inimigas entre si).

Considerações sociais à parte, o que os preceitos acima dizem é que multiplicar por $-1$ significa "trocar o sinal" e, evidentemente, trocar o sinal duas vezes equivale a deixar como está. Mais geralmente, multiplicar por $-a$ quer dizer multiplicar por $(-1)a$, ou seja, primeiro por $a$ e depois por $-1$, logo multiplicar por $-a$ é o mesmo que multiplicar por $a$ e depois trocar o sinal. Daí resulta que $(-a)(-b) = ab$.

Tudo isto está muito claro e as manipulações com números relativos, a partir daí, se desenvolvem sem maiores novidades. Mas, nas cabeças das pessoas mais inquisidoras, resta uma sensação de "magister dixit", de regra outorgada pela força. Mais precisamente, insinua-se a dúvida: será possível *demonstrar*, em vez de impor, que $(-1)(-1) = 1$?

Não se pode demonstrar algo a partir do nada. Para provar um resultado, é preciso admitir uns tantos outros fatos como conhecidos. Esta é a natureza da Matemática. Todas as proposições matemáticas são do tipo "se isto então aquilo". Ou seja, admitindo isto como verdadeiro, provamos aquilo como conseqüência. Feitas estas observações filosóficas, voltemos ao nosso caso. Gostaríamos de provar que $(-1)(-1) = 1$. Que fatos devemos admitir como verdadeiros para demonstrar, a partir deles, esta igualdade?

De modo sucinto, podemos dizer que $(-1)(-1) = 1$ é uma conseqüência da lei distributiva da multiplicação em relação à adição, conforme mostraremos a seguir.

Nossa discussão tem lugar no conjunto Z dos números inteiros (relativos), onde cada elemento $a$ possui um simétrico (ou inverso aditivo) $-a$, o qual cumpre a condição $-a+a=a+(-a)=0$. Daí resulta que o simétrico



$-a$, é caracterizado por essa condição. Mais explicitamente, se $b+x=0$, então $x=-b$, como se vê somando $-b$ a ambos os membros. Em particular, como $-a+a=0$, concluímos que $a=-(-a)$, ou seja, que o simétrico de $-a$ é $a$.

Uma primeira conseqüência da distributividade da multiplicação é o fato de que $a.0 = 0$, seja qual for o número a.

Com efeito,

$a+a.0 = a.1+a.0 = a(1+0) = a.1 = a = a+0.$

Assim,

$$a+a.0 = a+0,$$

logo

$$a.0 = 0.$$

Agora podemos mostrar que $(-1).a = -a$ para todo número a.

Com efeito,

$a+(-1).a = 1.a+(-1)a = [1+(-1)].a = 0.a = 0,$

logo

$$(-1).a \text{ é o simétrico de } a,$$

ou seja,

$$(-1)a = -a.$$

Em particular,

$$(-1)(-1) = -(-1) = 1.$$

Daí resulta, em geral, que

$$(-a)(-b) = ab,$$

pois

$(-a).(-b) = (-1)a.(-1)b = (-1)(-1)ab = ab.$

**Qual é o valor de $0^0$?**

A resposta mais simples é: $0^0$ é uma expressão sem significado matemático. Uma resposta mais informativa seria: $0^0$ é uma expressão indeterminada.

Para explicar estas respostas, talvez seja melhor examinar dois exemplos mais simples de fórmulas desprovidas de significado matemático, que são $\frac{0}{0}$ e $\frac{1}{0}$. De acordo com a definição de divisão, $\frac{a}{b}=c$ significa que $a=b.c$. Portanto, se escrevêssemos $\frac{0}{0}=x$ e $\frac{1}{0}=y$, estas igualdades significariam que $0=0.x$ e $1=0.y$. Ora, TODO número x é tal que $0.x=0$ e NENHUM número y é tal que $0.y=1$. Por isso se diz que $\frac{0}{0}$ é uma "expressão indeterminada" e que $\frac{1}{0}$ é uma "divisão impossível". (Mais geralmente, toda divisão do tipo $\frac{a}{0}$, com $a\neq 0$ é impossível.)

Voltando ao símbolo $0^0$, lembramos que as potências de expoente zero foram introduzidas a fim de que a fórmula $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, que é evidente quando $m>n$, continue ainda válida para $m=n$. Pondo $a^m = b$ teremos então $\frac{b}{b}=b^0$, logo $b^0=1$ se $b\neq 0$. No caso $b=0$, a igualdade $\frac{b}{b}=b^0$ tomaria a forma $\frac{0}{0}=0^0$, o que leva a considerar $0^0$ como uma expressão indeterminada. Esta conclusão é ainda reforçada pelo seguinte argumento: como $0^y=0$ para todo $y\neq 0$, seria natural pôr $0^0=0$; por outro lado, como $x^0=1$ para todo $x\neq 0$, seria também natural pôr $0^0=1$. Logo o símbolo $0^0$ não possui um valor que se imponha naturalmente, o que nos leva a considerá-lo como uma expressão indeterminada.

As explicações acima têm caráter elementar e abordam o problema das expressões indeterminadas a partir da tentativa de estender certas operações aritméticas a casos que não estavam enquadrados nas definições originais dessas operações. Existe, porém, uma razão mais profunda, advinda da teoria dos limites, em virtude da qual $\frac{0}{0}$ e $0^0$, (bem como outras fórmulas análogas) são expressões indeterminadas.

Escreve-se $\lim_{x\to a} f(x)=A$ para significar que o número A é o limite para o qual tende o valor f(x) da função f quando x se aproxima de a. Sabe-se que se $\lim_{x\to a} f(x)=A$ e $\lim_{x\to a} g(x)=B$ então $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}$, desde que seja $B\neq 0$. Por outro lado, quando $\lim_{x\to a} f(x)=0$ e $\lim_{x\to a} g(x)=0$ nada se pode garantir a respeito do limite do quociente $\frac{f(x)}{g(x)}$ quando x se aproxima de a. Dependendo das funções f e g que se escolham, pode-se conseguir que o quociente $\frac{f(x)}{g(x)}$ tenha como limite qualquer valor c dado de antemão, ou mesmo que não tenda para limite algum. Por exemplo, se tomarmos $f(x)=c(x-a)$ e $g(x)=x-a$ então $\frac{f(x)}{g(x)}=c$ para todo $x\neq a$, logo $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=c$. Por este motivo se diz que $\frac{0}{0}$ é uma expressão indeterminada.

Analogamente, dado a priori qualquer número real $c>0$, podemos achar funções f, g tais que $\lim_{x\to a} f(x)=0$, $\lim_{x\to a} g(x)=0$, enquanto $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}=c$. Basta, por exemplo, tomar $f(x)=x$ e $g(x)=\frac{\log c}{\log x}$; isto faz com que $f(x)^{g(x)}=x^{\frac{\log c}{\log x}}=c$ para todo $x>0$, logo $\lim_{x\to 0} f(x)^{g(x)}=c$. (Para convencer-se de que $x^{\frac{\log c}{\log x}}=c$, tome logaritmos de ambos os membros desta igualdade.) Portanto, quando $\lim_{x\to a} f(x)=0$ e $\lim_{x\to a} g(x)=0$ então $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ pode ter qualquer valor c, dado de antemão, desde que escolhamos convenientemente as funções f e g. Então se diz que $0^0$ é uma expressão indeterminada.

Nosso quarto tópico é uma pergunta enviada pela professora Susi Pozza, de Piraju, SP. Podemos resumi-la assim:

**Qual a diferença entre círculo e circunferência?**

Explica a Professora Susi que os guias curriculares para as matérias do 1º grau orientam os professores a não fazer distinção entre circunferência e círculo, alegando que não há tal diferenciação no caso de polígonos (fala-se tanto no *perímetro* como na área de um polígono). Mas todos os livros de 2º grau que a professora já viu fazem a distinção: circunferência é a linha, círculo é a região limitada pela circunferência. Daí sua perplexidade.

No meu caso pessoal, Susi, ocorreu o oposto, ou quase. No ginásio e no colégio me ensinaram a distinguir entre circunferência e círculo. Na universidade, e em livros estrangeiros mais avançados, essa diferença desapareceu. Para ser mais exato, o que desapareceu quase inteiramente foi a palavra "circunferência". Quanto ao termo "círculo" ele tornou-se ambíguo (como "polígono"); ora quer dizer a curva, ora a região por ela limitada.

Para livrar-se da ambigüidade, quando isso é necessário, costuma-se usar a palavra "disco" para significar a região do plano limitada por uma circunferência. Aí não resta dúvida.

Em resumo: *circunferência* e *disco* são palavras de sentido bastante claro, cada uma com um único significado na língua portuguesa. Por outro lado, *círculo* é uma palavra que tanto pode ser usada no sentido de circunferência como no sentido de disco. (Paciência...)

Quanto à orientação dada pelos guias curriculares, ela contém uma atitude bem razoável. Afinal de contas, não é só "polígono" que quer dizer tanto a linha poligonal como a região que ela limita. Também *poliedro, prisma, cilindro, esfera,* etc. às vezes são superfícies (pois têm área) e às vezes são corpos sólidos, pois têm volume. No caso da esfera, a palavra *bola* pode ser usada para significar o sólido, ficando *esfera* para a superfície, mas nos outros casos não há distinção.

O melhor a fazer na sala de aula é aceitar a terminologia do livro adotado, que deve ser sensata. (Se não for, troque de livro). Caso ache necessário, esclareça aos alunos que a nomenclatura não é universal, havendo quem prefira outros nomes para indicar as mesmas coisas. O mais importante é ser coerente com a linguagem que você escolheu, a fim de evitar malentendidos. Lembrar sempre o que Humpty Dumpty falou para Alice (no País das Maravilhas): "Quando eu uso uma palavra, ela significa exatamente aquilo que eu decidi que ela significasse - nem mais nem menos". (E lembrar também de avisar aos seus ouvintes qual foi esse significado escolhido.)



# A Geometria e as distâncias astronômicas na Grécia Antiga

Geraldo Ávila
Depto de Matemática
Universidade de Brasília
70910 - Brasília - DF

Os tamanhos do Sol e da Lua e as distâncias desses astros à Terra já eram calculados na antiguidade, séculos antes de Cristo; mas poucas pessoas sabem como eram feitos esses cálculos. Eles se baseiam em idéias que são muito simples e geniais ao mesmo tempo e que estão intimamente ligadas a noções fundamentais de Geometria, como semelhança de triângulo e proporcionalidade, servindo, pois, como excelente motivação ao estudo dessa disciplina. Por isto mesmo essas questões devem ser divulgadas, já que elas ainda não aparecem nos livros de 1º e 2º graus.

**Qual o mais distante: o Sol ou a Lua?**

Para constatar que o Sol está mais distante da Terra que a Lua, basta observar atentamente as várias fases da Lua. Se ela estivesse mais longe de nós que o Sol, então, por simples análise de suas várias posições relativamente ao Sol e à Terra (a Fig. 1 ilustra quatro dessas posições), concluímos que ela estaria sempre iluminada pelo Sol quando vista da Terra. Em particular, não haveria lua nova! E haveria duas posições da Lua, em 1 e em 3, onde ela seria lua cheia, esta última em pleno meio-dia, o que nunca acontece realmente. A hipótese contrária, de que o Sol está mais distante da Terra que a Lua, é a única compatível com as várias fases da Lua, em particular com a ocorrência de luas novas. Outro fato a corroborar esta hipótese é a ocorrência de eclipses do Sol, que só são possíveis com a Lua mais próxima da Terra que o Sol.

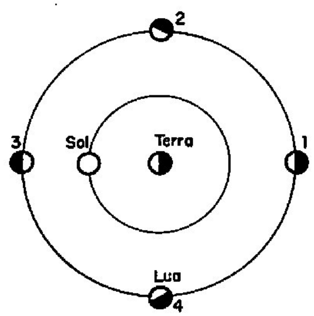


Fig. 1

**Quão mais distante? A idéia de Aristarco**

Para descobrir quão mais distante que a Lua se encontra o Sol, devemos aprofundar um pouco mais nossa observação do ciclo lunar. O que vamos descrever agora é o método que o sábio grego Aristarco de Samos (séc. III A.C.), da escola de Alexandria, usou para comparar as distâncias da Terra à Lua e da Terra ao Sol.

Existem duas posições da Lua em sua órbita, o "quarto crescente" e o "quarto minguante", quando o disco lunar apresenta-se, para um observador terrestre, com metade iluminada e outra metade escura (Fig. 2). Quando isso acontece, o triângulo Terra-Lua-Sol é retângulo, com ângulo reto no vértice ocupado pela Lua. Qualquer pessoa pode fazer uma observação simples e notar que nessa configuração o ângulo $\alpha = \widehat{LTS}$ (Fig. 3) é muito próximo de 90°, indício de que o Sol está efetivamente muito mais longe da Terra que a Lua. Esse fato é mais facilmente notado ao nascer e ao pôr do Sol, evidentemente com a Lua em quarto crescente ou quarto minguante (meia-lua), como ilustra a Fig.3. Aristarco teria medido esse ângulo $\alpha$, encontrando para ele o valor de 87°. Então, o ângulo $\beta = \widehat{LST}$ seria de 3°. Basta agora construir um triângulo retângulo com esses ângulos e verificar o valor da razão TS/TL, que é a mesma para todos os triângulos a ele semelhantes. Aristarco verificou que essa razão estava compreendida entre 18 e 20, de sorte que a distância da Terra ao Sol seria cerca de vinte vezes a distância da Terra à Lua.

Voltemos a considerar o problema de medir o ângulo $\alpha$ (Fig.2). Na verdade é mais fácil calcular esse ângulo do que medí-lo diretamente. Basta observar o tempo gasto pela Lua para completar uma volta em torno da Terra e o tempo de passagem de minguante a crescente; com estes dados uma proporção simples resolve o problema. O ciclo lunar dura 29,5 dias e, ao que tudo indica, Aristarco teria observado que a passagem de minguante a crescente durava 14,25 dias, um dia menos que a passagem de crescente a minguante. Admitindo uma velocidade uniforme da Lua em sua órbita, os ângulos descritos pelo seu raio vetor são proporcionais aos tempos gastos nos deslocamentos correspondentes. Então, com referência à Fig. 2, podemos escrever

$$\frac{360°}{29,5} = \frac{2\alpha}{14,25},$$

donde obtemos $\alpha = 86,95° = 86°57'$, portanto,

$$\frac{TS}{TL} = \sec\alpha = \sec 86,95° \simeq 18,8,$$

logo TS = 18,8 TL.

É preciso que se diga que o resultado de Aristarco está muito longe do valor correto, pois sabemos hoje que a distância da Terra ao Sol é cerca de 400 vezes a distância da Terra à Lua. Em conseqüência, o ângulo $\alpha$ está próximo a 89,86°, portanto muito perto de 90°! Os raios solares que se dirigem à Terra e à Lua são praticamente paralelos. Isto põe o problema de explicar como Aristarco teria chegado ao cálculo de $\alpha$. Ao que parece, a diferença que ele teria notado entre o tempo gasto pela Lua numa volta completa em torno da Terra e o tempo para ir de minguante a crescente se deve à peculiaridade do movimento da Lua naquela época, conforme G. Abell em seu livro ([1], p. 21).

**Tamanhos do Sol e da Lua**

Aristarco observou que o Sol e a Lua têm o mesmo "tamanho angular". Em outras palavras, o ângulo $2\alpha$ sob o qual um observador terrestre vê o Sol é o mesmo sob o qual ele vê a Lua (Fig. 4). Esse fato, aliás, é comprovado pela observação de um eclipse total do Sol. De fato, quando ocorre tal eclipse, o disco lunar coincide com o disco solar, encobrindo-o por inteiro.

Aristarco estimou o ângulo $2\alpha$ da Fig. 4 como sendo 2°; na verdade ele é de cerca de apenas 0,5°. Mas isto, como o leitor deve notar, não prejudica o resultado que obteremos a seguir, baseado na semelhança dos triângulos TLL' e TSS'. Esta semelhança nos permite escrever

$$\frac{SS'}{LL'} = \frac{TS}{TL}$$

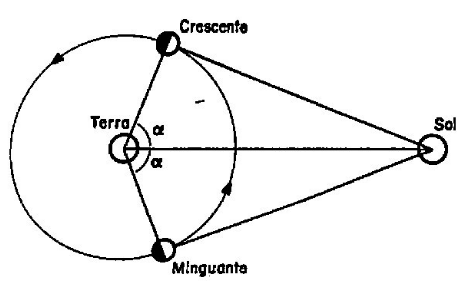


Fig. 2

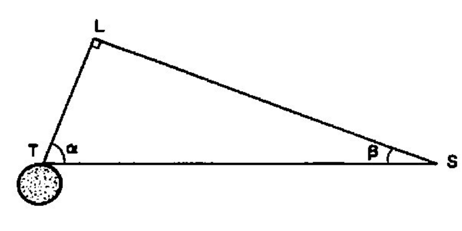


Fig. 3



isto é, os raios do Sol e da Lua estão entre si como as distâncias TS e TL respectivamente. Mas, pelo que vimos anteriormente,

$$\frac{TS}{TL} \simeq 20,$$

de sorte que SS' ≃ 20 LL', segundo Aristarco, ou seja, o raio do Sol é aproximadamente igual a vinte vezes o raio da Lua.

Tendo em vista referências futuras, vamos resumir aqui resultados já obtidos. Sejam $D_S$ = TS (Fig. 4) a distância da Terra ao Sol, $D_L$ = TL a distância da Terra à Lua, $R_S$ = SS' o raio do Sol e $R_L$ = LL' o raio da Lua. Então,

$$\frac{R_S}{D_S} = \frac{R_L}{D_L} = a \simeq tg\alpha, \quad \frac{D_S}{D_L} = b,$$

onde, para Aristarco, $\alpha \simeq 1°$ e $b \simeq 20$, quando, na realidade, $\alpha \simeq 0,25°$ e $b \simeq 400$.

**Relações com o raio da Terra**

Para relacionar as distâncias e os tamanhos do Sol e da Lua ao raio da Terra, Aristarco observou o que acontece durante um eclipse da Lua, quando este satélite atravessa o cone de sombra da Terra (Fig. 5). Pelo tempo gasto nessa travessia, ele calculou que o diâmetro do cone de sombra da Terra, na altura da Lua, era 8/3 do diâmetro da Lua.

Na Fig. 6, L, T, S são os centros da Lua, da Terra e do Sol, respectivamente; $LH = R_L$, $TC = R_T$ e $SA = R_S$ são os respectivos raios; LD é o raio do cone de sombra na altura da Lua, de sorte que $LD = 8R_L/3$. Da semelhança dos triângulos DFC e CEA resulta

$$\frac{CF}{DF} = \frac{AE}{CE}$$

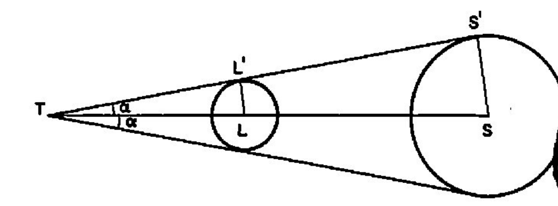



Fig. 4

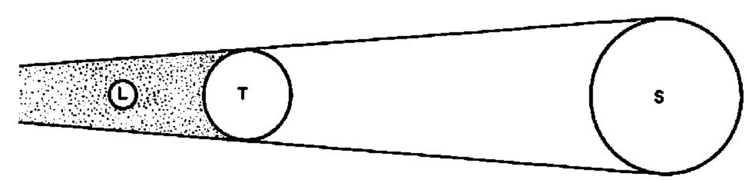


Fig. 5

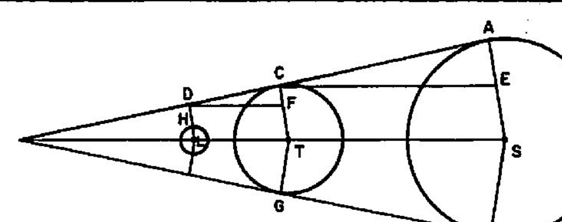


Fig.6

Mas

$CF=TC-TF=R_T-LD=R_T-8R_L/3;\ DF=D_L;$

$AE=AS-SE=R_S-R_T;\ CE=D_S.$

Substituindo estes valores na igualdade anterior,

$$\frac{R_T-\frac{8}{3}R_L}{D_L}=\frac{R_S-R_T}{D_S}$$

Da seção anterior temos que

$$D_S=bD_L,\ R_S=aD_S=abD_L,\ R_L=aD_L,$$

de sorte que a igualdade anterior pode ser escrita na forma

$$\frac{R_T-\frac{8}{3}aD_L}{D_L}=\frac{abD_L-R_T}{bD_L}.$$

Daqui segue-se que

$$\left(1+\frac{1}{b}\right)R_T=\left(\frac{8}{3}+1\right)aD_L,$$

ou ainda

$$D_L=\frac{3(b+1)R_T}{11ab}.$$

Então,

$$D_S=bD_L=\frac{3(b+1)R_T}{11a},$$

$$R_S=abD_L=\frac{3(b+1)R_T}{11}$$

e

$$R_L=aD_L=\frac{3(b+1)R_T}{11b}.$$

Deste modo, substituindo $a=\text{tg}\ 1^\circ \simeq 0{,}017$ e $b\simeq 20$, podemos obter as quatro grandezas, $D_L$, $D_S$, $R_S$, e $R_L$, em termos do raio da Terra $R_T$, com os dados de Aristarco:

$$D_L \simeq 16{,}8\ R_T,\quad D_S \simeq 337\ R_T,$$

$$R_S \simeq 5{,}7\ R_T,\quad R_L \simeq 5{,}7\ R_T.$$

Ao contrário, com os valores mais corretos $a=\text{tg}\ 1/4^\circ \simeq 0{,}0044$ e $b=400$, encontramos valores bem próximos dos valores modernos:

$$D_L \simeq 62\ R_T,\quad D_S \simeq 24855\ R_T,$$

$$R_S \simeq 109\ R_T \text{ e } R_L \simeq 0{,}27\ TR_T.$$

Os cálculos que vimos descrevendo encontram-se num livro de Aristarco, intitulado "Sôbre os tamanhos e distâncias do Sol e da Lua". Esta é a única obra de Aristarco que chegou até nós. Dela existe uma primorosa edição comentada, com uma história da Astronomia Grega até os tempos de Aristarco, devida ao eminente historiador da ciência Thomas Heath [3]. Mais acessível para o leitor menos experiente são: o cap. 10 de Boyer [2], o cap. 2 de Abell [1] e os dois primeiros capítulos de Polya [4].

### Eratóstenes e o raio da Terra

Pelo que vimos até agora, basta saber o raio da Terra para podermos calcular os tamanhos e as distâncias a que se encontram o Sol e a Lua.

Foi Eratóstenes (276-196 A.C.), outro sábio de Alexandria, quem fez o cálculo do raio da Terra mais célebre da antiguidade. Era sabido que quando o Sol se encontrava mais ao norte (solstício de inverno para nós, habitantes do hemisfério Sul), os raios solares caiam verticalmente, ao meio dia, na localidade de Siene, hoje Assuã, pois a imagem do Sol podia ser vista refletida nos poços mais fundos daquela cidade. Ao mesmo tempo, em Alexandria, os raios solares caiam inclinadamente, fazendo um ângulo aproximado de 7,2° com a vertical (Fig. 7), ou seja, 1/50 da circunferência completa, que é de 360°. Como os raios solares são praticamente paralelos, isso significa que o ângulo central $\widehat{ACS}$ também mede 7,2°. Pela proporcionalidade entre arcos e ângulos,

$$\frac{2\pi R}{\widehat{AS}}=\frac{360^\circ}{7{,}2^\circ}$$

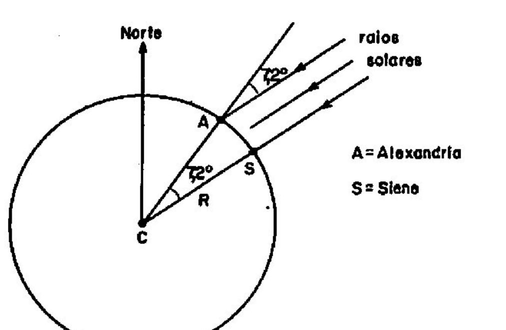



Fig. 7



onde R é o raio da Terra. Como a distância $\widehat{AS}$ de Alexandria a Siene era conhecida e igual a 45 000 estádios, podemos calcular a circunferência terrestre:

$$2\pi R = 5\,000 \times \frac{360}{7{,}2} \simeq 250\,000 \text{ estádios} \simeq$$

$$\simeq 46\,300 \text{ km}.$$

Até hoje não se sabe ao certo o valor do estádio usado por Eratóstenes. Segundo uma interpretação, esse estádio seria de aproximadamente 185 metros, o que dá para o raio da Terra o valor (note-se que $2\pi \simeq 6{,}28$)

$$R \simeq \frac{250\,000 \times 185}{6{,}28} \simeq 7\,365 \text{ km}.$$

O valor atual, no equador, é de 6 378 km, mostrando que o resultado de Eratóstenes é bastante razoável.

### Ptolomeu e a distância da Terra à Lua

Cláudio Ptolomeu foi o último grande astrônomo da antiguidade. Sua famosa obra, o Almagesto, inclui, além de suas contribuições próprias, as de seus vários predecessores. Pelos muitos fatos citados nesse livro, dentre eles vários eclipses, infere-se que Ptolomeu teria vivido por volta do ano 150 de nossa era.

Ptolomeu propôs um método bastante engenhoso e simples para calcular a distância da Terra à Lua. Para isso imaginemos que um observador em A (Fig. 8) veja a Lua na posição L, sobre a vertical de A. Depois de um certo tempo t, o observador passa da posição A à posição A', devido ao movimento de rotação da Terra. Ao mesmo tempo a Lua passará à posição L'. Como os ângulos $\widehat{ACA'}$ e $\widehat{ACL'}$ são conhecidos (pois os movimentos da Terra e da Lua são conhecidos), também é conhecido o ângulo $\gamma = \widehat{ACA'} - \widehat{ACL'}$. O ângulo $\alpha$ é medido diretamente, o que permite conhecer seu suplementar $\beta$. Assim, o triângulo CA'L' fica completamente determinado pelo lado CA' = R (raio da Terra) e os ângulos $\beta$ e $\gamma$. Portanto, a distância CL' da Terra à Lua pode ser determinada em termos de R.

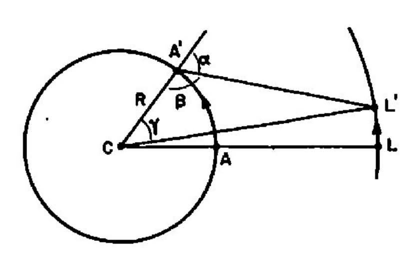



Fig. 8

### Referências bibliográficas


[1] G. O. Abell, Exploration of the Universe, Holt, Rinehart and Winston (1975).

[2] C. B. Boyer, História da Matemática, Editora Edgard Blücher Ltda. (1974).

[3] T. Heath, Aristarcus of Samos, Oxford University Press (1959).

[4] G. Pólya, Mathematical Methods in Science, the Mathematical Association of America (1977).


*N. da R.* Somos freqüentemente procurados por estudantes à busca de novas idéias para serem apresentadas nas Exposições de Ciências. Achamos que, com um pouco de imaginação e alguns cartazes ou maquetes, as perguntas e respostas deste artigo se constituem em material interessante para essas Exposições.

## As coisas que ensinamos

# O que é um número transcendente?

Roberto C. F. Costa
Instituto de Matemática e Estatística - USP
Cx. P. 20 570
01000 - São Paulo - SP

Desde que o homem conseguiu um grau razoável de civilização, ele começou a interessar-se por problemas de medidas de comprimentos, áreas, etc.. Isto foi a origem da Geometria. Um problema particularmente importante, foi o cálculo do comprimento de uma circunferência cujo diâmetro era conhecido. O primeiro fato importante notado pelos geômetras da antiguidade foi que "quanto maior o diâmetro maior o comprimento", mais ainda, que o comprimento da circunferência é proporcional ao seu diâmetro. Se indicarmos por C o comprimento e por D o diâmetro, isto significa que o quociente $\frac{C}{D}$ é constante, qualquer que seja a circunferência considerada. Medidas experimentais mostravam que esta constante era um pouco maior do que 3. Os geômetras antigos usaram, com muito sucesso, valores aproximados para esta constante, como por exemplo, 22/7.

Hoje sabemos que esta constante é um número real muito famoso (e complicado... ) chamado $\pi$, aproximadamente igual a 3,141592... .

Uma tabela com aproximações do número $\pi$, obtidas quando se substitui o comprimento da circunferência pelos comprimentos de polígonos regulares de $n$ lados inscritos e circunscritos a esta circunferência, encontra-se no volume dois do texto "Matemática Aplicada" de Trotta, Imenes e Jakubovic (v. **Livros**, neste mesmo número da Revista), à página 106. Nesta tabela, chega-se aos valores

$$3{,}1415 < \pi < 3{,}1416$$

com polígonos de 500 lados. O leitor entenderá melhor esta construção ao ler todo o parágrafo 10, que trata do comprimento da Circunferência, com início na página 102. Lembramos que os números racionais são da forma $x = \frac{m}{n}$ onde m e n são inteiros e n é diferente de zero. Isto significa que o número racional x é solução da equação de 1º grau $nx = m$, cujos coeficientes n e m são inteiros. No entanto, existem muitos números reais que não são racionais e por isso são chamados irracionais. Dentre estes, alguns são relativamente simples, como por exemplo $\sqrt{2}$(1), $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt{2}/\sqrt{3}$, etc. Estes números são soluções das equações $x^2 - 2 = 0$, $x^2 - 3 = 0$, $x^2 - 6 = 0$, $x^3 - 4 = 0$, $3x^2 - 2 = 0$, respectivamente.

Por essa razão eles são chamados de *irracionais algébricos*. Vamos deixar claro o que

(1) - Para provar que $\sqrt{2}$ não é racional, verifique que se $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, com m e n inteiros positivos, então $m^2 = 2n^2$, o que nos leva a uma contradição porque, enquanto, na decomposição em fatores primos, $m^2$ admite um número par de fatores 2 (que pode ser 0), o número $2n^2$ admite um número ímpar destes fatores. Modificando um pouco este raciocínio, mostra-se que os demais números citados: $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt{2}/\sqrt{3}$, não podem ser racionais.



é um número algébrico: é um número real que satisfaz *alguma equação* da forma

$$a_0x^k + a_1x^{k-1} + \ldots + a_{k-1}x + a_k = 0$$

onde os números $a_0, a_1, \ldots a_k$ são inteiros. Vejamos mais um exemplo de *irracional algébrico:* $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

Sendo

$$x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$$

temos

$$x^2 = (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 2 + 2\sqrt{2}\sqrt{3} + 3 = \\ = 5 + 2\sqrt{6}$$

e daí

$$x^2 - 5 = 2\sqrt{6}$$

e portanto, elevando ao quadrado novamente

$$(x^2 - 5)^2 = 4.6$$

ou seja

$$x^4 - 10x^2 + 25 - 24 = 0.$$

O cálculo que fizemos mostra que $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ é raiz da equação $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$ e portanto é algébrico. Verifique você mesmo que $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ é irracional!

Mas acontece que muitos números irracionais não são algébricos. Por isso são chamados de irracionais transcendentes. Estes não são raízes de equações do tipo

$$a_0x^k + a_1x^{k-1} + \ldots + a_{k-1}x + a_k = 0$$

como acima. Afinal, o $\pi$ é o quê? Racional ou Irracional? Se for irracional, é algébrico ou transcendente? A resposta a esta pergunta foi dada em 1881 por um matemático chamado Lindemann que provou: $\pi$ é transcendente.

Resumo desta pequena história: nos primórdios da Matemática já apareciam números muito "complicados" que só viriam a ser bem compreendidos no século XIX quando os matemáticos começaram a preocupar-se com a boa fundamentação da própria Matemática. Sabemos que existem "muito mais" números transcendentes do que algébricos. Em outra ocasião, explicaremos o significado desta frase.

Sabemos também que os números racionais estão "bastante espalhados", isto é, perto de cada número irracional (tanto faz algébrico como transcendente), sempre existe um número racional. Isto significa que, para efeito de aplicações práticas da Geometria, podemos tomar aproximações racionais de $\pi$, como por exemplo, 3,1416. Como dissemos, os geômetras da antiguidade usaram 22/7 como aproximação de $\pi$ e 22/7 = 3,1428... .

N. da R.

O texto de Djairo G. de Figueiredo, "Números Irracionais e Transcendentes", da Coleção Fundamentos da Matemática Elementar (v. anúncio na segunda contra-capa deste número da Revista) consiste numa exposição sobre a irracionalidade de certos números reais, a construção de alguns números transcendentes e a transcendência de $e$, $\pi$ e outros. Este é um campo em que os problemas têm enunciados, quase sempre, de fácil compreensão, mas alguns deles, surpreendentemente, exigem técnicas mais elaboradas em suas soluções, algumas delas acima do conhecimento do estudante regular do segundo grau. Este texto, entretanto, é de leitura acessível a quem tenha formação equivalente à dos programas de Cálculo Diferencial e Integral dos cursos de Licenciatura.

# Irrelevâncias

Paulo Ferreira Leite
Instituto de Matemática e Estatística - USP
Cx. P. 20 570
01000 - São Paulo - SP

Nestes dias em que tanto se discutem as relações e as dicotomias entre a matemática pura e a matemática aplicada, talvez seja salutar relembrar que muitos dos grandes matemáticos de todas as épocas mostraram pouco interesse nessa distinção e, com freqüência, produziram matemática de primeira classe em ambas as categorias.

Um exemplo proeminente dessa estirpe de matemáticos é Norbert Wiener (1894-1964).

Wiener nasceu em Columbia, Missouri, nos Estados Unidos e era filho de um imigrante que mais tarde se tornou professor de língua e literatura eslava na Universidade de Harvard.

Foi uma criança prodígio que, aos três anos, sabia ler e escrever.

Bacharelou-se em matemática aos 14 anos e estudou zoologia durante um ano. Doutorou-se com uma tese sobre Lógica Matemática, na Universidade de Harvard em 1913, quando tinha apenas 18 anos. Apesar dessa precocidade, seu processo de amadurecimento, até tornar-se renomado matemático, foi bastante lento.

Após algumas experiências profissionais não muito felizes, fixou-se em 1919 como professor do Departamento de Matemática do M.I.T. (Massachussets Institute of Technology) onde permaneceu até sua aposentadoria, tornando-se um dos seus mais famosos membros.

Em 1933 foi eleito para a Academia Nacional de Ciências dos Estados Unidos, mas após um curto período desligou-se por não concordar com alguns aspectos da ciência institucionalizada.

No decorrer de sua vida viajou por diversos países e recebeu inúmeros prêmios e distinções.

Sua figura bizarra e caricata foi motivo de muitas piadas e não passou desapercebida de seus biógrafos: "Em aparência e comportamento", afirma Freudenthal em [1], "Norbert Wiener era uma figura barroca, baixo, rotundo e míope combinando isso e muitas qualidades em grau extremo. Sua conversa era uma curiosa mistura de pomposidade e galhofa. Era mau ouvinte. Sua auto exaltação era jocosa, convincente e nunca ofensiva. Falava muitas línguas mas não era fácil entendê-lo em nenhuma delas. Era um famoso mau conferencista".

Após doutorar-se, Wiener obteve de Harvard uma bolsa de estudos que lhe permitiu estudar lógica matemática em Cambridge sob a supervisão de Bertrand Russel e matemática em geral em Göttingen, na Alemanha, sob a supervisão de David Hilbert, um dos maiores matemáticos de sua época. O analista inglês G. H. Hardy foi outro matemático que exerceu influência marcante em sua formação.

Logo que se estabeleceu no M.I.T. seu interesse científico se direcionou para determinadas áreas da matemática aplicada onde realizou trabalho da maior importância, Durante a segunda guerra mundial desenvolveu uma teoria para a construção de mecanismos automáticos para apontar armas para alvos em movimento. Esses trabalhos introduziram métodos estatísticos na teoria do controle e da comunicação e levaram-no a formular o conceito de cibernética, definida por ele como "a ciência do controle e da comunicação no animal e na máquina". O étimo do vocábulo inglês cybernetics é o grego Kubernetes cujo significado é timoneiro - o homem do leme.



Como se pode deduzir da definição acima, a cibernética se interessa pelo estudo de "mecanismos" tomando-se o termo num sentido suficientemente amplo para incluir máquinas e organismos animais. Devemos notar, no entanto, que, do ponto de vista do cibernético, é o aspecto comportamental e não o mecânico o relevante.

Terminada a guerra, além de dar continuidade a seus trabalhos ligados a cibernética fez importantes contribuições à teoria da predição matemática, à mecânica quântica e à matemática aplicada à biologia.

Escreveu, ao longo de sua vida, diversos livros; alguns de cunho popular sobre cibernética e suas implicações filosóficas. Dentre estes, um foi traduzido para o português: "Cibernética e Sociedade - o uso humano de seres humanos". O leitor deve ser advertido de que seu estilo expositório torna a leitura desses trabalhos bastante difícil. Ainda segundo Freudenthal, no local já citado, "o leitor para o qual ele (Wiener) aparentemente se dirige parece alternar ao acaso entre o leigo, o estudante de graduação, o matemático médio e o próprio Wiener".

Como todo grande matemático, Wiener amava sua ciência e comparava o seu trabalho criador ao do artista. Em uma passagem de sua autobiografia [2] expressou claramente esses sentimentos. "A matemática", diz ele, "é um campo demasiadamente árduo e inóspito para agradar àqueles a quem não oferece grandes recompensas. Recompensas que são da mesma índole do que as do artista". Acrescenta ainda que é no ato de criar que o matemático encontra a sua culminância e que "nenhuma quantidade de trabalho ou correção técnica pode substituir este momento de criação na vida de um matemático, poeta ou músico".

Discorrendo sobre suas atividades de pesquisa faz interessantes considerações a respeito de como a memória intervém nesse processo. "Em meu trabalho matemático o grande esforço da memória deve-se, não tanto a retenção de uma vasta quantidade de fatos da literatura, mas, principalmente, à fixação dos aspectos simultâneos do problema no qual estive trabalhando e a conversão de minhas fugazes impressões em algo suficientemente permanente para ter lugar na memória". Justifica essas afirmações dizendo que a identificação e síntese das dificuldades do enunciado resolve metade do problema. "Muito frequentemente o que resta ser feito é a abstração daquele grupo de idéias que não é pertinente a solução do problema. Essa rejeição do irrelevante e purificação do relevante, posso fazê-la melhor nos momentos em que sou atingido por um mínimo de impressões exteriores".

É possível que essa atitude de concentração no trabalho e conseqüente fuga das impressões exteriores irrelevantes tenha contribuído para fazer de Wiener o estereótipo do homem distraído.

Conta-se que, certa vez, mudou sua residência para uma casa situada na mesma rua. No fim da tarde, ao retornar do trabalho, sentindo-se perdido, dirigiu-se a uma garotinha de rosto familiar que brincava na rua:

—Por favor, será que você saberia me dizer para qual destas casas mudou-se o professor Wiener?

—Não se preocupe, papai, eu o levo para casa.

**Bibliografia**

[1] Dictionary of Scientific Biography, Charles Scriber & Sons. Ver artigo de Hans Freudenthal sobre Wiener.

[2] Wiener, Norbert, Ex. Prodigy (1953) e I am a Mathematician (1956). MIT Press. Autobiografia de Wiener escrita em duas partes.

[3] Artigo sobre Norbert Wiener na 15ª Edição da Enciclopédia Britânica.

[4] Wiener, Norbert. Cibernética e Sociedade - o uso humano de seres humanos. Editora Cultrix. São Paulo, 1958.

## Livros

Nilza Eigenheer Bertoni
Depto. de Matemática
Universidade de Brasília
70910 - Brasília - DF

MATEMÁTICA APLICADA, Fernando Trotta, Luiz Márcio Pereira Imenes e José Jakubovic (Editora Moderna, 3 volumes).

A coleção destina-se às três séries do 2º grau e cobre o programa todo de Matemática deste nível (Funções, Polinômios, Geometria Espacial, Análise Combinatória, Trigonometria, Sistemas Lineares e Determinantes, Probabilidade, Limites, Derivadas, Números Complexos, Geometria Analítica). Inclui ainda tópicos de matemática do 1º grau, quando constituem pré-requisitos essenciais e naturais para o assunto a ser exposto; e apresenta freqüentes comentários históricos.

Trata-se de uma obra bastante diferenciada das demais correlatas e inovadora na concepção de um livro texto de matemática destinado ao 2º grau. A apresentação de um mesmo assunto é às vezes dividida em diversas etapas, no mesmo ou em diferentes volumes. Da Geometria temos no primeiro livro o estudo dos polígonos e os teoremas de Thales e Pitágoras, no segundo volume temos áreas de figuras planas e perímetros. A Trigonometria aparece no primeiro volume apenas referente ao ângulo agudo, no segundo volume aparece referente ao círculo todo e num outro capítulo, finalmente, temos uma trigonometria generalizada. Encontramos diversos aspectos positivos nessa opção didática. Primeiro, o fato do contacto inicial do aluno com um novo assunto deixar de ser muito amplo e repentino, mas começar pelos seus aspectos mais acessíveis. Ao aluno é apresentado um desenvolvimento paulatino da teoria, que lhe possibilita a percepção de cada novo conceito como um elo da teoria global. Há ainda a vantagem de um assunto não se dar por acabado (e esquecido) após certo capítulo - ele torna a voltar em abordagens cada vez mais gerais e profundas, dando margem a um conhecimento mais sedimentado.

A preocupação pedagógica levou os autores a começarem a maioria dos segmentos da teoria com uma situação problema - viável, prática e motivante. Em seguida, são levantadas suposições, juntadas informações e, através do método indutivo-dedutivo, construído e explorado o segmento da teoria desejado. Ao final volta-se à situação problema inicial, a qual, com auxílio da teoria elaborada, poderá então ser resolvida.

A lista de exercícios proposta também apresenta inovações - bastante ligados a situações práticas, bem dosados, apresentando uma matemática que perde a sua configuração de teoria dedutiva abstrata e passa a ser uma teoria lógica com amplo significado real. Nesse sentido o livro é apropriado a todos os alunos de 2º grau, tanto aos que precisam estudar matemática para o vestibular, como aos que a terão como matéria central de seus estudos posteriores, como aos que nunca cursarão uma universidade.

A correção dos conceitos matemáticos está sempre presente. Pontos realmente notáveis são a inferência da fórmula do comprimento da circunferência e o capítulo sobre números complexos. No primeiro, um equilíbrio sutil, quase mágico, entre o aspecto pedagógico e o rigor matemático foi alcançado. A idéia das seqüencias de polígonos inscritos e circunscritos à circunferência, com crescente número de lados, e a avaliação de seus respectivos perímetros está muito clara e bem conduzida, levando o leitor a inferir a existência de um número, não racional, que separa as duas seqüências. Conceitos matemáticos importantes estão envolvidos, embora não mencionados: número real, seqüência convergente, limite de uma seqüência; e a idéia destes conceitos foi transmitida, conseguindo-se evitar a formalização matemática dos mesmos, que não seria conveniente para este nível. No início dos Números Complexos encontramos uma muito bonita motivação para a introdução dos mesmos. Um problema de Geometria Espacial é proposto: nossa visão espacial nos assegura que êle terá solução. Entretanto nossos cálculos algébricos nos levam a uma raiz quadrada de número negativo. Seria a matemática impotente para achar a solução? O texto introduz e desenvolve os fatos fundamentais do conjunto dos números complexos, que nos possibilitam extrair a raiz desejada. Cálculos finais nos levam depois a um número real que é a solução do problema.



Cabe observar que os livros, embora de tamanho normal, requerem tempo de leitura atenta. Não são livros para se recordar os conceitos matemáticos, são livros que propiciam a formação dos conceitos matemáticos na mente dos alunos. Isto pode representar um desconforto para os professores, desde que é impossível usar os livros para se apresentar rapidamente algumas regras básicas da teoria e passar à resolução dos exercícios. Em contrapartida, a elaboração cuidadosa da teoria evitará dispêndio posterior de energia, pelo professor, para fazer os alunos vencerem inúmeros tropeços que surgiriam ao resolver exercícios. Também evitará que o professor necessite apresentar soluções que, embora corretas, são mal percebidas pelos alunos em suas razões de ser.

Pode ocorrer que o professor apressado não tenha tempo de ler os comentários históricos. Mesmo assim, a obra será válida. Pudemos notar pessoalmente a eficiência do livro em diversas experiências. Num curso de verão para alunos do 2º grau, na UnB, foi dado o capítulo sobre sólidos, seus volumes e áreas externas. Numa classe heterogênea, mal preparada em geometria, e com representantes de todas as cidades satélites do D.F., notamos grande entusiasmo pelos tópicos históricos e construção de modelos, sendo que a experiência sensorial originou um rápido domínio da teoria. Os alunos da UnB que fazem Estágio Supervisionado em Matemática têm usado estes livros, já diversas vezes, com bastante êxito, em suas aulas nas escolas do D.Federal. Esse é, finalmente, um ponto que desejamos salientar. Além de altamente recomendáveis para alunos do 2º grau, os livros são apropriados a certas disciplinas da Licenciatura em Matemática. O contacto com esta obra poderá ser, para os licenciandos em Matemática, um revigorante poderoso do conhecimento destes tópicos de matemática, além de ponto de partida para uma convergência das linhas pedagógicas com o conteúdo matemático, possibilitando aos futuros professores uma postura mais reflexiva frente ao ensino da matemática, propiciando novas concepções sôbre currículos, livros textos, modos de aprendizado desta ciência que, já há tempo, urgem aparecer.

## O leitor pergunta

Mário Barone Júnior
Instituto de Matemática e Estatística - USP
Cx. P. 20 570
01000 - São Paulo - SP

—Uma professora de Gravataí, RS, envia a seguinte pergunta: "... Alguns professores de matemática ensinam que $\sqrt{9} = \pm 3$ pois $3^2 = 9$ e $(-3)^2 = 9$, porém, no livro de 8ª série da FTD, pág. 78, na verificação de uma equação irracional encontra-se o seguinte:

$$\sqrt{x+5} = x-1$$

$$x = -1 \Rightarrow \sqrt{-1+5} = -1-1$$

$$\sqrt{4} = -2$$

$$2 = -2 \text{ (falso)}$$

Como se explica?"

É uma questão de convenção.

O número 9, como todo o número real estritamente positivo, tem duas raízes quadradas: uma positiva, igual a 3 e outra negativa, igual a $-3$.

Porém, quando trabalhando com números reais, é uma convenção universalmente adotada que o símbolo $\sqrt{\ }$ represente *sempre* a raiz quadrada positiva.

Então, se x é positivo, isto faz que $\sqrt{x}$ tenha um valor bem determinado, representando um único número real e evitando dúvidas como a sua. Neste caso as raízes quadradas de x são os números $\sqrt{x}$ e $-\sqrt{x}$.

Com esta convenção $\sqrt{4}$ representa unicamente o número 2 e a igualdade $\sqrt{4} = -2$ é falsa.

O que ocorreu no seu exemplo é que, na equação dada,

$$\sqrt{x+5} = x - 1$$

o número x−1 deve ser positivo pois, por causa da convenção, o primeiro membro é positivo.

Mas para obter o valor x"=−1, ambos os membros foram elevados ao quadrado, dando origem à igualdade

$$x + 5 = (x-1)^2$$

que é verificada quando $x = -1$; mas esta solução não serve no problema original pois então

$$x-1 = -1-1 = -2 < 0.$$

Sem a convenção você poderia ter também dificuldades do seguinte tipo: escolhendo $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{16} = -4$ e $\sqrt{64} = 8$ viria $\sqrt{4}.\sqrt{16} = -8$ e $\sqrt{4.16} = \sqrt{64} = 8$ e então $\sqrt{4}.\sqrt{16} \neq \sqrt{4.16}$.

Quando você adota esta convenção não deve esquecer, porém, que $(-3)^2 = 9$. Assim sendo se $x^2 = 9$ então $x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$. Veja por exemplo que se, na dedução da fórmula para resolver uma equação do 2º grau, você esquecer disto, só encontrará uma das soluções.

Cartas para esta seção devem ser endereçadas à

**Revista do Professor de Matemática**

**O Leitor Pergunta**

Caixa Postal 20570

0100 - São Paulo - SP

## O que vai por aí

— **Olimpíadas de Matemática** - A SBM mantém um programa de Olimpíadas de Matemática que consta essencialmente de dois eventos anuais:

a) A Olimpíada Brasileira de Matemática, da qual podem participar todos os estudantes de 2º grau. A prova se realiza simultaneamente em várias cidades brasileiras incluindo quase todas as capitais de estado.

Conclamamos os professores de 2º grau a incitarem seus estudantes talentosos a participarem desta Olimpíada, contactando o coordenador local (em geral um docente do depto. de Matemática da Universidade Federal de seu Estado) ou a própria SBM.

A 28 de agosto p.p. realizou-se a 4ª Olimpíada Brasileira de Matemática cujos resultados serão publicados no próximo número da Revista.

Os alunos vencedores, além de outros prêmios, têm recebido bolsas de estudo (iniciação científica) durante o seu curso de graduação nas Universidades, bem como treinamento para posterior seleção da equipe que representará o Brasil na Olimpíada Internacional.

b) Olimpíada Internacional de Matemática, para a qual a SBM coordena a participação dos estudantes brasileiros.

Em julho p.p. o Brasil fez-se representar, através da SBM, em Budapest, Hungria, onde o nosso estudante Luíz Alberto dos Santos logrou um terceiro prêmio.

As olimpíadas consistem na resolução de problemas que dependem muito mais de criatividade do que de conhecimento.



Entre seus objetivos incluem-se a identificação de estudantes com especial talento para a Matemática, a divulgação e o estímulo da atividade matemática entre os jovens.

Alguns estados, como São Paulo, Paraná, Ceará e Distrito Federal, já fazem suas Olimpíadas Regionais.

Comissão da Olimpíada (SBM):
Ângelo Barone Netto, IME-USP
João Bosco Pitombeira (Coordenador), PUC-RJ
Renate Watanabe, Univ. Mackenzie
Said Sidki, UnB

Para maiores informações, escreva para:

Sociedade Brasileira de Matemática
Estrada Dona Castorina, nº 110
22460 - Rio de Janeiro - RJ

— **GEPEM** - é a sigla pela qual se apresenta o Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática, entidade fundada em 1976 por professores de Matemática nos três graus de ensino e que a partir de 1978 firmou convênio com a Universidade Santa Úrsula (USU), Rio de Janeiro.

O GEPEM promove reuniões mensais, cursos, seminários, outras atividades de pesquisa e publica dois boletins anuais (junho, dezembro), tendo já sido publicados doze números. Além disto, baseado em pesquisa realizada durante 20 meses com o apoio do INEP, o GEPEM está oferecendo assessoria a escolas interessadas. A pesquisa citada acima recebeu o nome de "Binômio Professor-Aluno na Iniciação à Educação Matemática" e a 2ª edição do resumo de seu relatório foi publicada pela Fundação José Bonifácio da Universidade Federal do Rio de Janeiro.

A partir de março de 1981, o GEPEM mantém, ainda, o Curso de Pós-Graduação "lato-sensu" em Educação Matemática com as disciplinas obrigatórias: Álgebra Linear, Análise Real I, Cálculo Avançado, Geometria, Idéias Fundamentais da Matemática, Metodologia da Aprendizagem. A duração mínima do curso é de quatro semestres, num total de 360 horas.

Notícia enviada por Vera Maria F. Rodrigues (Secretária)

GEPEM
Rua Fernando Ferrari, 75-s.405A, prédio VI
Botafogo
22231 - Rio de Janeiro - RJ

— **A arte de resolver problemas** - Você sabia que o livro de G. Polya, How to solve it? já foi traduzido para o Português, sob o título: "A arte de resolver problemas", pela Editora Interciência, RJ. É um livro bastante interessante para o Professor de Matemática. Estaremos apresentando uma resenha deste livro num próximo número. Procure conhecê-lo.

— **Cursos de Verão** - O Instituto de Matemática e Estatística da USP (IME-USP) promoverá nos meses de Janeiro e Fevereiro de 1983, o XII Curso de Verão. Dentre as atividades previstas, destacamos dois cursos destinados a professores do Ensino Médio: Tópicos Especiais para professores do 1º Grau" e "Cálculo - Noções introdutórias com Aplicações à Geometria a nível do 2º Grau". Os cursos começarão em 10/01 e terminarão em 11/02.

Maiores informações poderão ser obtidas com a

Comissão dos Cursos de Verão - 1983
IME-USP C. Postal 20570-Ag./Iguatemi
CEP 01000 S. Paulo, SP

*Envie à Revista do Professor de Matemática, Cx. Postal 20570 CEP 01000 - São Paulo - SP, as notícias de interesse para os colegas. Chamamos a atenção para a antecedência com que estas notícias devem ser enviadas, de vez que a Revista só sai uma vez por semestre.*

*Gratos,*
*O Comitê.*

# Problemas

Zoárd A. L. Geöcze
Depto de Matemática
Universidade Federal de Viçosa
36570 - Viçosa - MG

## Problemas propostos

4. Construímos dois triângulos equiláteros: ABE interno e BFC externo ao quadrado ABCD. Prove que os pontos D, E e F se localizam na mesma reta. (Sug.: comece por uma figura e... ).

5. Sejam M e N, respectivamente, os pontos médios das arestas BC e AD do quadrilátero convexo ABCD. Sejam, ainda: P a intersecção dos segmentos AM e BN e Q a intersecção de CN e DM. Prove que a área do quadrilátero MPNQ é igual à soma das áreas dos triângulos ABP e CDQ. (Obs.: Neste exercício, a figura também pode ajudar).

6. Determine as soluções inteiras e positivas da equação

$$x^3 - y^3 = 602$$

(Sug.: fatore $x^3 - y^3$ e 602).

7. Sejam a, b, c positivos. Prove que

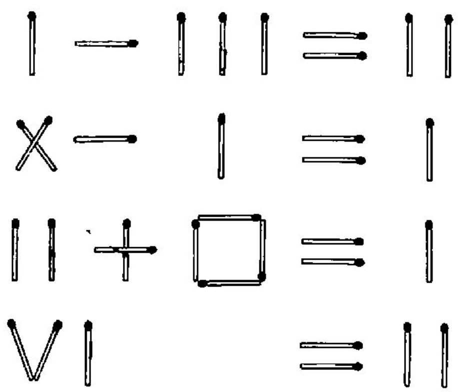
$$\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} \geqslant \frac{2}{a} + \frac{2}{b} - \frac{2}{c}.$$

8. O produto de 3 números pares e consecutivos é 88 XXXXX 2, onde cada X representa um algarismo que falta. Determine estes 5 algarismos.

## ... e Probleminhas:

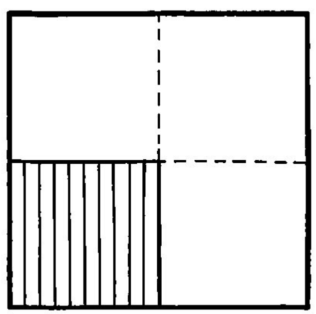
a) No verão 81/82, a fábrica de sorvetes Kibon trocava 10 palitos de sorvete por um sorvete de palito. Que fração do sorvete é o valor do palito? (Não é $\frac{1}{10}$!).

b) Nas figuras abaixo, desloque *um só* fósforo para obter uma sentença verdadeira



(Sugestão da colega Feres Cury - Formosa do Oeste-PR)

c) Um fazendeiro que vive num terreno quadrado decide aposentar-se. Ele retém para si um quarto do terreno como na figura e doa o resto para seus quatro filhos. Como se pode dividir o terreno a ser doado de modo que cada filho receba porção de mesmo tamanho e forma?



(V. Respostas na pág. 25)



## Soluções dos Problemas propostos no lançamento da "Revista do Professor de Matemática"

*1. Calcule o valor da expressão*

$$\frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+xz}$$

*quando xyz = 1.*

Solução:
Sendo xyz = 1, temos que $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$, pois caso um dos fatores de xyz fosse igual a zero teríamos o produto xyz = 0, uma contradição. Assim, podemos escrever:

$$\frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+xz} =$$

$$= \frac{z}{z+zx+xyz} + \frac{x}{x+xy+xyz} + \frac{1}{1+z+zx} =$$

$$= \frac{z}{1+z+zx} + \frac{zx}{z+zx+xyz} + \frac{1}{1+z+zx} =$$

$$= \frac{1+z+zx}{1+z+zx} = 1$$

*Alberto Hassen Raad*

*2. A área de um triângulo é dada pela fórmula $A = (a^2 + b^2)/4$ onde a e b são dois de seus lados. Determine os ângulos do triângulo.*

Solução:
Como a área de um triângulo é dada pela fórmula

$$A = \frac{ab \operatorname{sen} C}{2}, \text{ temos } \frac{a^2+b^2}{4} = \frac{ab \operatorname{sen} C}{2},$$

daí $\operatorname{sen} C = \frac{a^2+b^2}{2ab}$ e

$$\operatorname{sen} C - 1 = \frac{a^2+b^2}{2ab} - 1 = \frac{(a-b)^2}{2ab}$$

como $\operatorname{sen} C \leqslant 1$, $a > 0$, $b > 0$ e $(a-b)^2 \geqslant 0$

temos $0 \leqslant \frac{(a-b)^2}{2ab} = \operatorname{sen} C - 1 \leqslant 0.$

Daí $\frac{(a-b)}{2ab} = \operatorname{sen} C - 1 = 0$

o que acarreta sen C = 1 e a = b. Assim, o triângulo é isósceles. Os ângulos são $A = B = 45^\circ$ e $C = 90^\circ$.

*Augusto César Morgado*

*3. Uma calculadora estragada pode somente somar, subtrair e obter o inverso dos números. Como podemos calcular o produto de dois números com esta máquina? (Sugestão: tente obter uma expressão para calcular o quadrado de um número)*

Solução:
Calculemos o quadrado de um número. Suponhamos que tal número seja diferente de ±1. Sejam A: soma, S: subtração e I: inversão.

$$\text{Dado } x \left\{ \begin{matrix} \xrightarrow{S} x-1 \xrightarrow{I} \dfrac{1}{x-1} \\ \\ \xrightarrow{A} x+1 \xrightarrow{I} \dfrac{1}{x+1} \end{matrix} \right\} \xrightarrow{S}$$

$$\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{2}{x^2-1} \xrightarrow{I} \frac{x^2-1}{2} \xrightarrow{A} x^2-1 \xrightarrow{A} x^2$$

Assim, se $x \neq 1$, já podemos obter o seu quadrado

$$xy = \frac{(x+y)^2 - x^2 - y^2}{2},$$

e esta expressão se obtém pela técnica de determinar o quadrado descrita em detalhes.

*Profano Pires da Nóbrega Neto*

**Enviaram soluções:**

Alberto H. Raad (Juiz de Fora - MG): 1 - 2 - 3
Augusto C. Morgado (R. de Janeiro - RJ): 1 - 2 - 3
Eurípedes A. Silva e Júlio Cézar C. Martins (em conjunto) (São José do Rio Preto - SP): 1

Paulo César R. Nobre (Rio de Janeiro - RJ): 2
Profano Nóbrega (Campinas - SP): 1 - 2 - 3
Susi Ferreira Pozza (Pirãju - SP): 1 - 2

Estas soluções foram recebidas até o dia 03 de agosto de 1982.

Continuaremos publicando nomes de pessoas que enviaram soluções corretas.

Soluções e Sugestões
Devem ser enviadas para:

PROBLEMAS

Departamento de Matemática
Universidade Federal de Viçosa
36570 - Viçosa - MG

## Cartas do leitor

O Comitê Editorial agradece as muitas mensagens de apoio à iniciativa da SBM e espera que estes elogios se traduzam em colaboração como o envio de notícias, perguntas, sugestões, soluções de problemas, etc. ... .

**Ponto de Encontro**

—Uma colega da cidade de São Paulo, SP, "gostaria de obter informações sobre como dar aula."

*Revista:* Esta é uma pergunta tão geral que não admite resposta única nem completa ou definitiva. Entendemos que ensinar seja uma atividade dinâmica, que o modo de dar aula não só depende dos alunos, do assunto, do mestre, como de tantas outras circunstâncias ocasionais ou não. Pretendemos que cada número da Revista dê ao leitor algum subsídio que o auxilie em suas tarefas didáticas. A título de sugestões iniciais, entretanto, e exercendo a função de "ponto de encontro" de mestres brasileiros, transcrevemos, a seguir, trechos extraídos de duas cartas endereçadas à Revista:

A colega Silvânia M. Rio (São Caetano do Sul, SP) conta

"... leciono há pouco tempo ... notei a "aversão" dos alunos pela Matemática ... Procurei, sempre que possível, ao iniciar um novo tópico, colocar uma introdução histórica ou algum problema prático, bem como orientar atividades diferentes ... individuais ou em grupo. Resultados: maior interesse do aluno e melhora sensível no aproveitamento..."

E a colega Terezinha V. Chassot (Montenegro, RS) escreve:

"Costumo entregar aos alunos uma folha com Curiosidades Matemáticas. Num mural ... colocava também perguntas ..."

—Um colega da Ilha do Governador, RJ, entre outras sugestões — que iremos apresentando em próximos números—pergunta sobre a possibilidade de dividir o curso para as séries de 5ª à 8ª em duas aulas de Álgebra e duas de Geometria.

*Revista:* Eis a experiência que nos é relatada pelo colega João Batista Gasparini (São Carlos, SP):

"É sabido que os alunos do segundo grau, na sua quase totalidade não têm conhecimentos suficientes de Geometria Plana que lhes assegurem perspectiva de sucesso no estudo de Geometria no Espaço.

A Geometria Plana, na maioria dos livros didáticos destinados ao primeiro grau, vem na segunda parte do livro. Seguindo a ordem dos assuntos, o professor ensina esta matéria no segundo semestre; qualquer atraso na parte algébrica acarreta prejuízo na Geometria.



Uma experiência realizada na "EEPSG Jesuíno de Arruda" de São Carlos, SP, que mostrou ser eficiente com turmas destas séries, foi a separação, a partir do início do segundo semestre, do curso de Matemática em duas aulas semanais de Álgebra e duas de Geometria. O que no final do terceiro bimestre normalmente se transforma em quatro aulas de Geometria".

**Novas idéias:**

Os colegas Marco Antonio B. Abdalah (Niterói, RJ) e Nilton Matheus (Sorocaba, SP) sugerem que a Revista trate do assunto "O Computador e o Ensino da Matemática".

*Revista:* Aguardem nos próximos números.

Estamos também estudando sugestões enviadas pelos colegas Clélio Berti, Dalva Teles, Leila D. Franzini, Valdeí Silva e Viviane Schumacher.

**As coisas que ensinamos:**

O colega Francisco C. de Figueiredo (Nilópolis, RJ), responde à pergunta do folheto de lançamento da RPM atribuindo o "fracasso" na demonstração da fórmula da soma dos ângulos de um triângulo quando pedida numa prova de vestibular da FUVEST aos seguintes "problemas básicos": unificação dos vestibulares (que não mais são feitos por áreas), "vício dos exercícios de múltipla escolha" e "pouco tempo de contacto professor - turma".

**Publicações:**

Recebemos: prospecto do CEVEC (Centro de Estudos Vera Cruz, SP) , Jornalzinho do Laboratório de Ensino de Matemática (IGCE-UNESP, Rio Claro, SP), Programa da 1ª Semana da Matemática da UFSCar (São Carlos, SP de 18 a 22/10); Boletins da "SERVIR" (Cruzeiro, SP) e Suplemento Científico Micronews (São Paulo, SP).

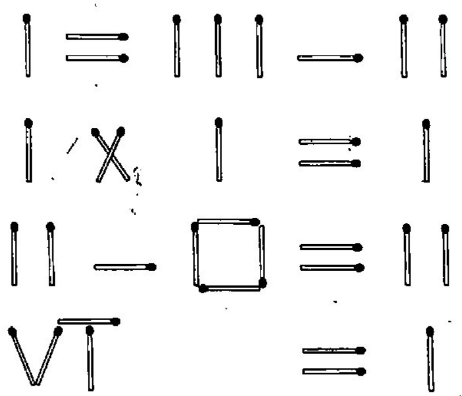
Gratos.

As opiniões expressas nesta Seção são da responsabilidade de quem as assina.

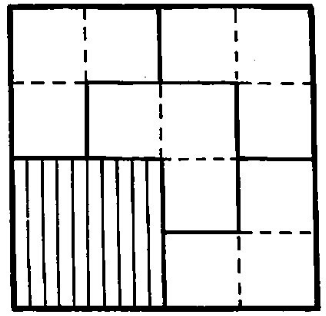
**Respostas dos probleminhas**

a) $\frac{1}{9}$

b)



c)



# MATEMÁTICA
## CONCEITOS E OPERAÇÕES

### UM TEXTO PREPARADO PARA A ESCOLA BRASILEIRA

A EDITORA SARAIVA apresenta para o ano letivo de 83 o seu mais novo lançamento: MATEMÁTICA — CONCEITOS E OPERAÇÕES, de autoria do Prof. SCIPIONE DI PIERRO NETTO. Um texto didático onde o autor reuniu a experiência e o resultado de anos de observações e trabalhos em salas de aula de diferentes níveis. Uma coleção preparada e produzida para atender ao estudante e ao professor, desde a escola carente até aquela diferenciada pelo nível de ensino que consegue apresentar.

### DUAS VERSÕES; DUAS OPÇÕES:


A coleção será distribuída aos professores de 5.ª a 8.ª série de todo o Brasil em duas versões:

- uma, destinada a atender o Guia Curricular do Estado de São Paulo, onde prevalece a seqüência que apresenta o Conjunto dos Inteiros na 5.ª série;
- outra, atendendo à seqüência onde o Conjunto dos Racionais Não Negativos aparece na 5.ª série.

Ambas *atribuindo e proporcionando ao professor a escolha de uma linha de comportamento para dirigir seus trabalhos.*

editora **SARAIVA**

Matriz — São Paulo: Av. Marquês de São Vicente, 1697 — 826.8422 - ramal 246
Bauru: 23.1357 • Belém: 222.9034 • Belo Horizonte: 461.9962 • Brasília: 224.1658 • Campina Grande: 321.4686 • Campinas: 41.4564 • Campo Grande: 382.3682 • Curitiba: 234.2622 • Fortaleza: 227.9889 • Goiânia: 224.1018

Matéria Publicitária

### DESENVOLVIMENTO DA OBRA:
### SIMPLES PARA O ALUNO — VERSÁTIL PARA O MESTRE

Cinco partes em cada unidade:

1.ª Parte: *Exposição e apresentação dos temas* — A forma expositiva, através de exemplos e situações concretas, permite ao professor o desenvolvimento inicial da matéria segundo seus critérios.

2.ª Parte: *Primeiros exercícios de classe* — Visam fixar a aprendizagem imediata e a conquista da segurança necessária ao principiante.

3.ª Parte: *Exercícios de classe e fixação* — Numerosas séries de exercícios, graduados desde os "*primeiros exercícios de classe*" até os de revisão, permitem ao mestre a escolha de "até onde chegar".

4.ª Parte: *Exercícios de aprofundamento e revisão* — Destinados a melhorar o conhecimento médio e a estimular os mais interessados.

5.ª Parte: *Exercícios na forma de testes* — Visam proporcionar ao estudante a aquisição gradual de uma habilidade necessária aos exames de seleção.

Grátis
Inédito fascículo com questões para provas

### ASSISTÊNCIA AO PROFESSOR

Além do **MANUAL DO PROFESSOR**, com subsídios para um planejamento adequado, o AUTOR e a EDITORA oferecem um **FASCÍCULO DE AVALIAÇÕES** para cada série. São — pelo menos — *cinco baterias de questões preparadas para avaliar cada Unidade do texto, apresentando até 900 exercícios ou questões que avaliarão o rendimento escolar.*

### É IMPORTANTE RESSALTAR

- Um texto bem cuidado.
- Apresentação compatível com o seu conteúdo.
- Impressão a duas cores em papel de boa qualidade.
- Não custa mais.
- A EDITORA SARAIVA *garante um preço igual à média das obras para o mesmo grau de ensino.*

• Governador Valadares: 30.0808 • Juiz de Fora: 212.8311 • Londrina: 223.3320 • Maceió: 223.6228 • Porto Alegre: 43.1467 • Recife: 224.1748 • Rib. Preto: 34.0546 • R. de Janeiro: 201.7149 • Salvador: 244.0139 • São José do Rio Preto: 32.4635 • São Luiz: 222.5872 • Vitória: 223.5202

Matéria Publicitária

## FUNDAMENTOS DA MATEMÁTICA ELEMENTAR

Sob o título acima, a Sociedade Brasileira de Matemática criou uma coleção de pequenos livros, contendo exposições sobre certos temas clássicos da Matemática que são ensinados nas escolas (principalmente nas de segundo grau) ou que, embora não pertençam ao currículo atual, estão ao alcance do entendimento dos alunos e professores nesse nível.

Nos livros dessa coleção, os assuntos, mesmo tradicionais, são abordados de modo não comumente encontrado nos textos usuais. Eles devem, de preferência, retratar a maneira como um matemático não participante do dia-a-dia da escola secundária, enxerga esses tópicos e os apresenta de modo elementar.

Os livros já publicados nesta coleção são os seguintes:

1. Trigonometria e Números Complexos .................... Cr$250,00
   *por Manfredo Perdigão do Carmo*
2. Áreas e Volumes .................................................. Cr$200,00
   *por Elon Lages Lima*
3. Logaritmos ........................................................... Cr$350,00
   *por Elon Lages Lima*
4. Números Irracionais e Transcendentes ................. Cr$250,00
   *por Djairo Guedes de Figueiredo*

Os pedidos para a aquisição destes livros, contendo nome e endereço completo do remetente (inclusive CEP), devem ser enviados à:

Secretaria da SBM
Estrada Dona Castorina, 110
22460 - Rio de Janeiro - RJ



O atendimento será feito pelo *reembolso postal*. O remetente só fará o pagamento, acrescido das despesas postais, ao retirar a encomenda na agência do correio.

Arquivado em 7/3/83
Wesley

Uma Publicação da
Sociedade Brasileira de Matemática