Lab. Matemática I.E.

Dienes, prd 11/10/77

MENSAGEM INICIAL

Depois de muito pensarmos no que tínhamos para te dizer neste encontro de estudo com o professor Dienes, encontramos em suas próprias palavras a melhor expressão:

"Sempre houve os chamados "professores natos, que saberão explorar as tendências naturais das crianças a serviço do estudo da Matemática, mas há poucos assim. Como o número e a qualidade dos novos professores continuam a cair, tendo em vista melhores condições de trabalho e de pagamento em outros campos, haverá um número cada vez menor deles para animar nossas aulas de Matemática.

Apesar de toda a organização das turmas dos sistemas de recompensas e punições e dos esforços individuais de alguns professores, a atitude das crianças, em muitos casos, ainda é absolutamente negativa; ou se há uma atitude positiva, ela é devida, na maioria das vezes, a uma sensação de realização ou ao prazer de manipular um conjunto de regras bem ordenado, sem muita compreensão daquilo que as regras permitem realmente fazer.

Será vantajoso voltar nossa atenção para o problema dos objetivos do ensino da Matemática. Estaremos concientes de que uma sala de aula tem crianças reais, com suas necessidades reais que esperam dos professores que lhes desvendem as maravilhas do mundo e que jamais perguntarão se alguma coisa é útil, desde que seja interessante?

Consideremos mais especificamente os diversos objetivos, tanto econômicos quanto pessoais, habitualmente apresentados sempre que se pergunta pela finalidade do estudo da Matemática. Os objetivos econômicos parecem estar compreendidos em dois grupos:

a)as necessidades da vida diária

b)as necessidades do progresso científico

Se considerarmos o primeiro deles, em si mesmo, seremos forçados a concluir que poucas situações na vida exigem o emprêgo de técnicas de cálculo ou das propriedades dos números.

Quantas vezes o leitor já efetuou uma multiplicação esta semana, fora da sala de aula? Ou uma divisão? Que situações na vida exigem essas aperfeiçoadas formas de cálculos ? E mesmo que assim fôsse, quantas delas não poderiam ser resolvidas, quase tão fàcilmente, com os princípios básicos, por sucessivas adições e subtrações? É quase desnecessário indagar-se quantas vêzes, esta semana, o leitor estêve em situações em que fôsse, essencial a extração de uma raiz quadrada ou de uma raiz cúbica.

Terá tido ocasião de resolver mesmo a mais simples das equações no decorrer de suas atividades diárias? Certamente que a pequena economia do tempo resultante de tais técnicas não parece valer suficientemente os anos de agonia que tão grande número de crianças atravessa para adquiri-las. Se as necessidades de nossa vida diária determinassem o conteúdo de nossos programas de Matemática, haveria muito pouca Matemática neles. A rápida disseminação das máquinas de calcular, de contabilidade e dos computadores eletrônicos fará o conhecimento de técnicas matemáticas ainda menos essencial à pessoa comum. Por que iria ela gastar tantos anos para fazer algo, bastante ineficientemente, quando a máquina pode fazê-lo muito melhor, em uma fração de segundo? Ninguém mais, agora, exalta as virtudes da vassoura contra o aspirador, e parece que a habilidade de calcular se tornará cada vez menos uma vantagem, à medida que a mecanização progride. Os defensores do utilitarismo no aprendizado da Matemática vão ter momentos difíceis, muito em breve, para persuadir os pais a transformarem os filhos em calculadores bastante medíocres."

Lab. Matemática
I. E.

-FUNDAMENTAÇÃO GRAVADA EM FRANCÊS PELO PROF. DR. DIENES -

PRINCÍPIOS GERAIS

A criança aprende mais facilmente as noções abstratas extraindo-as diretamente do meio ambiente do que pelas explicações do professor.
Desejamos que os senhores possam observar as crianças colocadas numa situação concreta.

Para abstrair um conceito é necessário que a criança se dê conta dos aspectos comuns de muitas experiências diferentes. Esta estrutura comum é, no caso, a Matemática inerente às experiências. Por conseguinte os senhores podem observar não experiências aleatórias, mas planejadas para que as criamças possam compará-las. Quando elas se derem conta do conteúdo comum de suas experiências estarão dando um passo importante para a aquisição das abstrações em questão.

Além disso, a Matemática consiste na manipulação de variáveis.
Mesmo nos mais simples problemas que decorrem de sua aplicação na vida corrente, encontramos diversas variáveis. Para habituarmos as crianças com a generalidade das estruturas subjacentes é preciso que lhes facilitemos a manipulação de diversas variáveis ao mesmo tempo.
Por isso nos exercícios que as crianças deverão efetuar apresentamos problemas que comportam mais de uma só variável ao mesmo tempo, para que elas se habituem a considerar muitas coisas ao mesmo tempo.

Em continuação, o valor dessas variáveis deve ser igualmente variado. Por exemplo, se no mundo da criança houvesse somente objetos vermelhos e ela nunca chegasse a ver outra coisa, não construiria jamais o conceito de vermelho, porque não teria variado a situação. Igualmente teria ainda menos oportunidade de formar o conceito de cor.

Para desenvolver a noção de paralelógramo é preciso variar todas as situações variadas relativas ao comprimento particular aplicado ao paralelogramo, como também as variações aplicadas na relação de paralelismo e de perpendicularidade. Por exemplo, para sublinhar o fato de que um paralelogramo possui lados opostos sempre paralelos, evidentemente é preciso conservar esta propriedade, mas é um fato que não é necessário que os ângulos dados sejam sempre ângulos retos. É preciso que algumas vêzes a criança encontre paralelogramos retangulares e outras vezes não retangulares. Assim, é preciso que encontre umas vezes o quadrado, outras vezes o retângulo e outras vezes o losango, o trapézio e assim por diante.

Somente desta maneira que a criança se dará conta da generalidade da noção de paralelogramo.

É por esta razão que utilizamos bases diferentes e potências diferentes para dar à criança a noção abstrata do valor posicional. Se ficarmos com uma só base, por exemplo a base 10, fazemos a mesma coisa do que se apresentamos o paralelogramo mostrando somente o retângulo.

Assim em todos os exercícios, vocês vão ver a variação de numerosas variáveis como também a variação do valor variável.

Sendo dado que nós vamos nos basear sob a influência do meio sobre a criança para facilitar a aprendizagem, devemos nos servir de tantos componentes quantos possíveis nesse ambiente. O meio natural da criança compreende outras crianças. Por consequência, a assimilação obtida no contato entre crianças deve estar compreendida no conjunto das influências que lhe fornecemos para facilitar a aprendizagem. Isto quer dizer que nós devemos encorajar a discussão entre crianças, Por consequência devemos colocá-las em situações problemáticas onde elas terão, tão provavelmente quanto possível desacordo com outras crianças. A discussão levará finalmente as crianças à verdade. Elas aprenderão a respeitar a autoriedade da verdade que se procura pela investigação dos fatos e não simplesmente a autoriedade pessoal como a do professor da classe.

Espero que vocês vejam tanta discussão quantas pudermos organizar para as crianças.

Evidentemente as discussões não podem ser obrigatórias mas pode-se apenas estimulá-las. Todas as crianças não são semelhantes e não aprendem segundo o mesmo ritmo, e não aprendem todas da mesma maneira, segundo o mesmo estilo. Por conseguinte é muito ineficaz colocá-los juntos numa equipe de 30 ou 40 crianças e esperar que todos façam a mesma coisa ao mesmo tempo. Esta é exatamente uma visão do ensino tradicional. Ao contrário, iremos mostrar-lhes que as crianças podem fazer progressos trabalhando em equipe. O trabalho em equipe estimula o desenvolvimento mais rápido do pensamento pela discussão entre os membros da equipe pelo fato da criança ser livre para formar outra equipe, por exemplo, se ela prova que o meio, o ritmo, empregado pelo resto não lhe convém.

Eu não posso lhes prometer que haverá uma grande dinâmica de mudança de uma equipe a outra, evidentemente, isso não pode ser tornado obrigatório, também. E talvez as crianças não estejam habituadas a um trabalho de equipe.

Lab. Matemática
I.E.

GRUPO DE ESTUDOS SOBRE O ENSINO DA MATEMÁTICA DE PORTO ALEGRE - GEEMPA

CURSO DO PROFESSOR ZOLTAN DIENES - julho-agosto de 1972

Encontro do dia 27 - Equipe responsável pelo registro e tradução do conteúdo:
- Prof. Nubem Medeiros e
Profa. Léa Fagundes

Alunos - Crianças de 7 e 8 anos com algumas noções de língua inglesa e de língua francesa.

Situações - Em quatro ambientes jogos diversificados com materiais diversificados.

Ambiente 1: Carros de plástico - conjunto com 8 elementos.
Atributos - cor: dois valores
marca: dois valores
cruz: dois valores
Gráficos - Diagrama de Carroll (no estacionamento).
Sistemas de estradas, com sinalização dos atributos.

Ambiente 2: Cadeiras e cubos de madeira em número múltiplo de 4.
Gráficos - Quatro linhas coloridas: os eixos de simetria.

Ambiente 3: Figuras recortadas em papel cartaz.
Atributos - 3 cores, 3 tamanhos e 3 formas.
Um conjunto circundado por uma faixa preta.

Ambiente 4: Figuras recortadas em papel cartaz.
Atributos - forma: 4 valores
cor: 4 valores
furos: 4 valores
Gráfico - 3 linhas de cores diferentes, representando os 3 eixos de simetria.

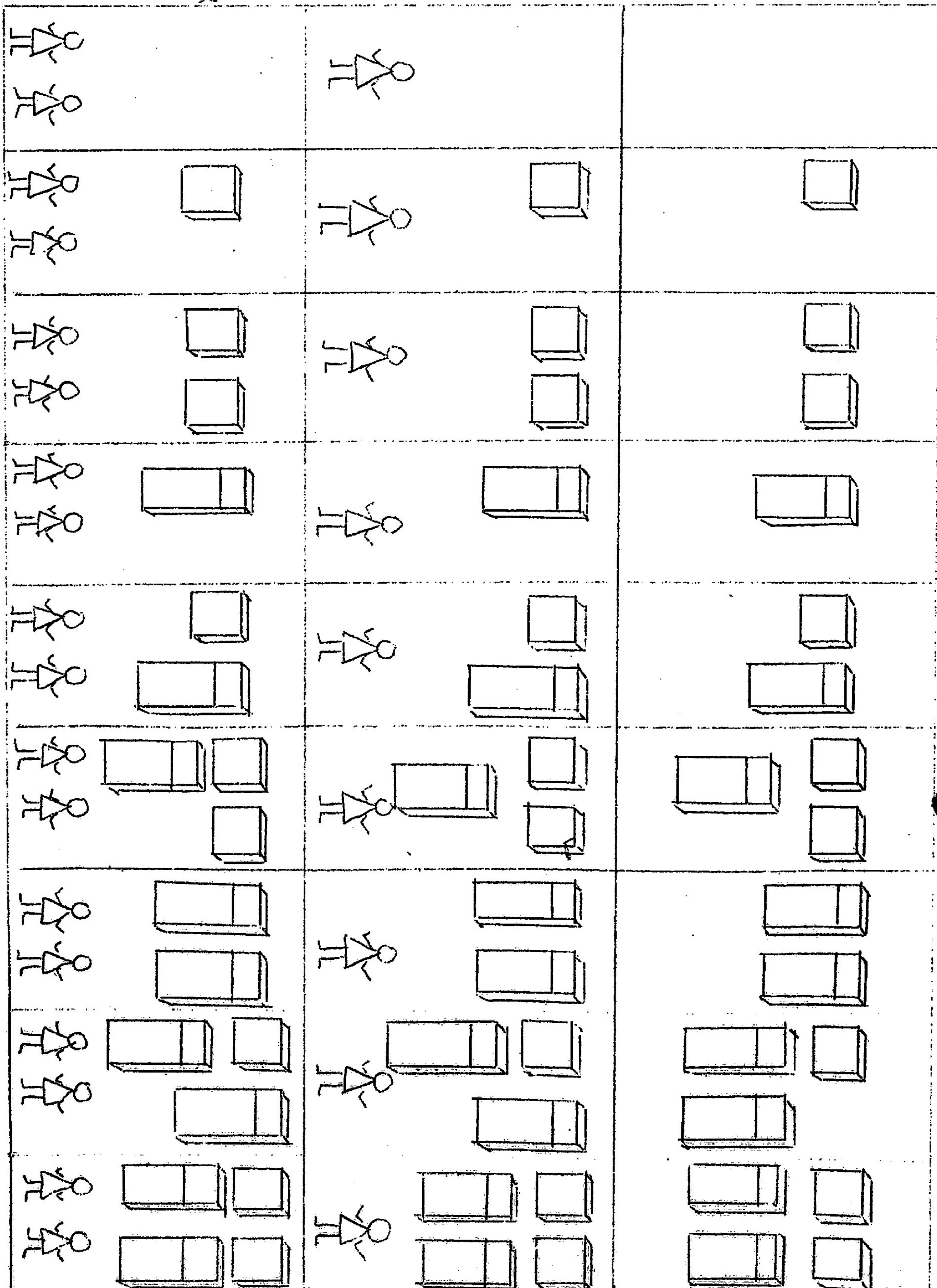
Ambiente 5: Conjunto de conjuntos.
Cartões onde foram afixados previamente materiais como: uma boneca, uma caixinha e dois cubos; duas bonecas, uma caixinha e um cubo, duas bonecas, duas caixinhas e um cubo, nenhuma boneca, duas caixinhas e um cubo, etc. definindo a propriedade de cada conjunto.

[illegible] de conjuntos

Material: cubo

carteira de cigarro

boneca



Lab. Matemática

Lab. Matemática
I.E.

C 1

GRUPO DE ESTUDOS SOBRE O ENSINO DA MATEMÁTICA - GEEMPA

Curso do Professor Dienes

Encontro do dia 29 de julho de 1972

A T I V I D A D E S   A R I T M É T I C A S :

Conteúdo : Operadores Aditivos
(Em N, e em Z)

Alunos : Crianças de 8 anos

Ambiente : Mesas enfileiradas em diferentes posições para permitir a realização de séries de operações.

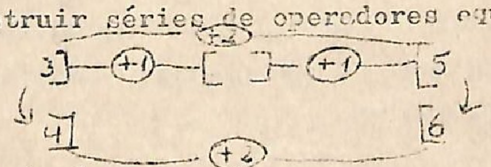
Materiais : diferemtes conjuntos com 50 elementos cada um. Pratinhos de papelão.
Etiquetas de cartolina .

1ª. Atividade :

Objetivo : Ver se as crianças são capazes de descobrir quais os operadores equivalentes.

Pré-requisito : A passagem do estágio pré-operatório para o operatório.

É inútil insistir em técnicas aritméticas com crianças que ainda não atingiram a fase operatória. Elas precisam ser capazes de encontrar seqüências equivalentes em séries de operadores. Há um degrau muito nítido entre os dois estágios. No anterior ela só sabe partir de um Estado para um Operador e chegar a um novo Estado, não é capaz de combinar o Operador + 1 com o Operador + 2 , e ainda que é possível substituir a Entrada e a Saída e construir séries de operadores equivalentes. Ex.:



Regras do jogo :

Numa da alternativas, as cria nças escolhem as etiquetas e passam a ser os operadores. A entrada e a saída estão sobre as mesas. Em duas mesas pode-se deposita r o material na da esquerda e selecionar a quantidade necess´ria sobre a mesa da direita. Noutra, pode-se colocá-lo em baixo das, mesas e ŝo os estados referentes aos operadores trabalhados sobre as mesas.

As crianças, com as etiquetas penduradas nos pescoço colocam-se entre as mesas e deverão realizar as séries de operações indicadas na etiquetas. Passam a cumprir diferentes regras, variando as situações, por exemplo :

- Escolher 3 etiquetas (operadores) que começando uma série por 6 acabe por 13.
- Encontrar o operador que passa da 1ª. mesa à 3ª., sem passar pela 2ª. mesa ?
- Trocar as etiquetas e calcular as novas quantidades de objetos sobre as mesas.
- Retirar 2 mesas e procurar a etiqueta que faça a operação agora.

C2

2^{a}. A tividade:

Objetivos : As crianças deverão ser capazes de descobrir que um par ordenado de Entrada e o par ordenado de Saída provêm do mesmo Operador

- Encontrar o operador equivalente a 2 operadores sucessivos

- Dar-se conta de que substitui 2 operadores consecutivos não depende do valor do Estado inicial

- Construir classes de equivalência

Regras do jogo :

- Colocar autinhos e pinos em to dos os pratinhos.

- Separar os pratinhos em mesas diferentes (classes de equivalência) de acordo com a propriedade :

"possuir mais pinos que autinhos"

"possuir menos pinos q ue autinhos"

"possuir o mesmo nº de pinos e autinhos"

- Ordenar os conjuntos, separando numa mesma mesa todos os pratinhos que tem o mesmo nº de pinos a mais,ou a menos (Ordenação de classes) As crianças usam mais mesas para colocar, por exemplo, numa todos os pratinhos, onde há 2 pinos a menos, noutra todos os pratinhos onde há 2 pinos a mais, etc. para depois ordenar.

- Procurar as etiquetas e colocar uma sobre cada mesa : $\boxed{-1}$, $\boxed{+1}$ $\boxed{0}$, $\boxed{-2}$, $\boxed{+2}$ etc., para assinalar a propriedade 1 a menos, 2 a mais, etc. É a construção do conjunto dos inteiros onde cada classe é constituída de todos os conjuntos que possuem a mesma propriedade, tal como "ter 3 pinos a menos".

$Z = \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$

3^{a}. A tividade :

Objetivos : Iniciar a realização da Adição em Z

- Compreender a existência do inverso

Regras : - Pegar um prato de uma mesa e um prato de outra e reunir o conteúdo dos dois num só.

- Encontrar a mesa onde deve colocar o novo prato assim formado. (Tentar achar a solução sem contar os objetos no prato)

-Variar as situações no uso destas regras e analisar os resultados

OBSERVAÇÕES DO PROFESSOR :

O trabalho foi feito sucessivamente. Os senhores observaram que havia 8 operadores numa série. Foi colocado o seguinte problema :

" Dois operadores contíguos podem ser substituidos por um só."

A,pós substituir operadores contíguos, havia outros para serem substituidos. A s crianças não chegaram ao fim desta atividade. Mas isto não era importante.

Tivemos uma experiência de prova : os alunos necessitaram contar o C3 1º estado e também o 3º estado antes de ser capazes de encontrar o operador que levaria do 1º ao 3º estado. Isto quer dizer : -não eram capazes de encontrar o operador equivalente a 2 operadores sucessivos. A maior parte das crianças estava pois no estágio de desenvolvimento que se chama pré-operatório. É quase inútil dar-lhes atividades de treinamento aritmético, neste caso. Do que têm necessidade é de encontrar exercícios nos quais sejam capazes de se dar conta que o operador que substitui 2 operadores consecutivos não depende do valor do estado inicial, isto é, + 2 seguido de + 3 equivale sempre a + 5, independente do valor do estado ao qual apliquemos o operador.

Por outro lado, o menino que esteve operando outra série de operadores já havia atingido o estágio operatório. Foi capaz de combinar operadores sucessivos fazendo o cálculo mental. Mas mesmo ele era obrigado a calcular os estados intermediários.

Na segunda atividade tomamos pratinhos nos quais foram postos - certos números de duas espécies de objetos. A 1ª regra era separar os pratos em três classes. Era o nascimento do + ; do -, e do 0.

A pós convocar as crianças , sugerimos que esta classificação fosse mais trabalhada e assim, em vez de ter todos os " pinos a mais"juntos, poderíamos ter o + 1 separado do + 2, etc.

As crianças aqui encontraram alguma dificuldade, particularmente no caso dos pratos que possuiam só uma espécie de objetos. Confundiram o zero Natural (N) cardinal do conjunto vazio, com o zero dos inteiros (Z), que quer dizer"o mesmo número que". 1 a mais e 1 a menos foram, em certo momento,confundidod também, porque os dois conjuntos diferem é de 1. As crianças consideravam o valor absoluto da diferença, e não a diferença orientada.

É verdade que as crianças nunca cometem erros. Simplesmente elas resolvem é outro problema.

Uma vez que a classe de equivalência foi contituida, foi possível introduzir a Adição. No entanto no caso do + 2 e -2 necessitaram contar o nº de objetos antes de se dar conta que o conjunto reunião pertence à mesa Zero. Evidentemente as crianças estavam no estágio pré-operatório.

É preciso sublinhar que quando se começa uma nova aprendizagem , não importa em que idade, começa-se sempre no estágio pré-operatório. É preciso saber que não se pode fazer de uma forma diferente da que a natureza exige. Uma outra observação : as crianças não fizeram objeção ao fato de que um prato de uma mesa mais o prato de outra mesa pode levar a uma mesa diferente, mas pode ser o mesmo prato da mesma primeira mesa. O importante é dar-se conta de que quando se toma um prato toma-se o exemplar de toda uma classe de equivalência, porque a Adição pode ser definida no interior das classes. Finalmente após um erro pequeno concernente ao + 3 e -4 , 1 a mais ou 1 a menos conduziu à compreensão da existência do inverso. Assim os componentesprincipais dos requisitos do Grupo Aditivo foram cumpridos.

Lab. Matemática
I.E.

GRUPO DE ESTUDOS SOBRE O ENSINO DA MATEMÁTICA DE PORTO ALEGRE

DESCRIÇÃO DE ATIVIDADES PARTICULARES PLANIFICADAS PARA CRIANÇAS DE 6 a 7 ANOS

prof. Z. P. Dienes

1. ATIVIDADES DE LÓGICA

Tomaremos automóveis grandes e pequenos, azuis e amarelos, automóveis com uma cruz e sem cruz desenhadas sobre eles. Assim teremos ao todo oito autos. Vamos estabelecer um terreno de estacionamento, onde cada carro tem seu lugar segundo as regras do terreno.

Regras do terreno

As regras do terreno são indicadas pela cor e pelos desenhos que indicam onde os Volkswagen devem ser estacionados e onde os veículos com uma cruz devem se estacionados. Assim a primeira atividade sera simplesmente distribuir os autos sobre o terreno de estacionamento. Enseguida, vamos utilizar um sistema de estradas. O Sistema de estradas será organizado por etiquetas. Sobre cada etiqueta haverá uma indicação sobre o tipo de automóvel que é permitido passar por um certo caminho. Evidentemente, o auto possuidor de certa propriedade poderá e deverá passar por um certo caminho. O outro que não possuir a propriedade requerida deverá tomar a rota alternativa. Assim, finalmente, certos autos chegarão ao estacionamento no fim do sistema, enquanto outros serão bloqueados.

O sistema será subdividido em partes. Cada parte representará uma operação lógica, por exemplo, a primeira parte será a entrada: aqui colocaremos uma propriedade seja para a via superior, seja para a via inferior. Será a via superior que conduzirá finalmente ao terreno de estacionamento. Se colocamos a etiqueta sobre a via superior, utilizamos como entrada uma propriedade positiva, por exemplo, azul para o VW. Se colocamos a etiqueta sobre a via inferior, utilizamos para a via superior uma propriedade negativa, por exemplo, não-azul ou não-VW.

A segunda parte possuirá uma bifurcação sobre a via superior. Sobre uma ou outra das estradas que seguem a bifurcação será colocada a etiqueta. Quando a etiqueta está colocada sobre a estrada que continua a via superior, há uma exigência de que os carros que nela passem possuam esta nova propriedade. Por outro lado, eles serão desviados para a via inferior se a etiqueta for colocada no caminho que leva ao exterior, pois haverá a exigência de que os carros que continuem ao longo da estrada superior possuam a negação da propriedade cuja etiqueta foi colocada no outro caminho. Assim nós temos chegado ao operador conjuntivo (e).

A terceira parte da sistema será aquela onde a bifurcação é colocada sobre a via inferior. Haverá caminhos que reunem alguns carros da via inferior com os carros da via superior. Assim para chegar ao fim da via superior pode-se ter viajado, desde o início pela via superior ou por parte da via inferior. Se colocamos a etiqueta sobre o caminho que sobe, dizemos que a propriedade possuida para estar no final desta parte do sistema de estradas deve ser ou aquela que indicamos de novo ou aquela já indicada sobre o início da via superior. Assim temos a operação lógica que se chama disjunção (ou)

Um quarto tipo será mais difícil de ver: consiste em dois cruzamentos sucessivos - o primeiro cruzamento é obrigatório para todos os veículos, enquanto o segundo se efetua somente para aquele que possui a propriedade cuja etiqueta colocamos no próprio cruzamento. Este cruzamento, esta parte do sistema de estradas, representa o operador bicondicional (se e somente se). Por exemplo, se colocamos a parte inicial com a parte bicondicional juntas marcando com a etiqueta azul a estrada inferior na parte inicial e com a etiqueta VW o cruzamento da segunda parte e colocamos o terreno de estacionamento no fim dessa segunda parte, serão os VW azuis e os não-VW não-azuis que chegarão ao terreno. Quer dizer: Se olharmos os carros no terreno de estacionamento, veremos somente VW azuis ou não-VW não-azuis. Quer dizer, se procuramos um VW será ele azul mas para achar um azul, devemos procurar um VW. E o significado do "se e somente se".: Se eu procuro um VW, acharei um azul e é somente procurando um VW que acharei um azul.

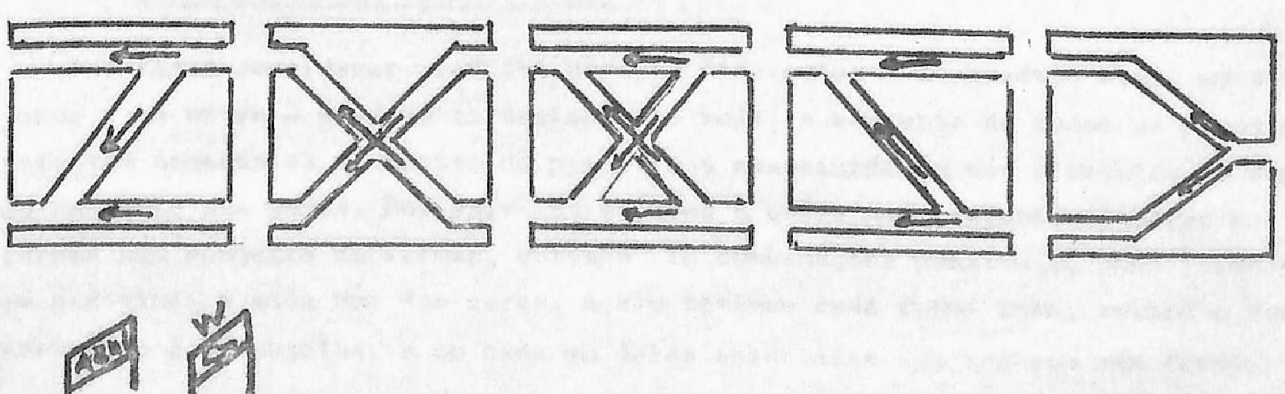
O quinto tipo é um cruzamento simples obrigatório: aqui todos os carros que se encontram sobre uma via devem passar para a via contrária. Essa parte corresponde à operação lógica da negação (não).

<u>Atividades</u>

O primeiro tipo de atividade com este material é encontrar o que acontece quando se colocam certas partes do sistema juntas, isto é, descobrir quais serão os carros que chegarão ao terreno e quais que serão bloqueados. Pode-se, evidentemente, mudar-se o sistema de estradas de várias maneiras diferentes, por exemplo, pode-se deslocar ou substituir as etiquetas, pode-se retirar uma parte ou substituí-la por outra, etc.,assim as crianças podem fazer investigações para ver o que acontece quando colocam as partes juntas de uma determinada maneira.

Uma outra forma de investigação consistiria em dar-se um conjunto de carros e ver como as crianças poderiam juntar as partes para que exatamente esse conjunto de autos chegue ao terreno e que o resto seja bloqueado.

Ainda um outro tipo, e mesmo mais complexo, seria colocar o problema de como se poderia colocar juntas duas partes diferentes que teriam o mesmo efeito final. Quer dizer, que se um conjunto de automóveis chega ao terrendo de estacionamento, por uma dessas redes (sistema), o mesmo conjunto deverá chegar se ele passar através da outra rede. Nesse caso se dirá que as duas redes serão equivalentes, igualmente, a propriedade final caracterizada pelo conjunto de carros no fim do sistema é uma propriedade equivalente àquela representada pelo mesmo conjunto que se encontra ao fim da outra rede de estrada.



Atividades Geométricas :

1ª Atividade Geométrica - Essa atividade utilizará duas ruas que são traçadas no chão formando um ângulo reto entre si. Far-se-á as crianças andadem ao longo dessas ruas e elas deverão colocar os objetos de um lado e de outro de cada rua de maneira que a aparência dos objetos olhando-se do meio da rua seja igual.

Isso quer dizer que êles deverão agir, quando marcham ao longo da rua, eles mesmos funcionando como eixo de reflexão.

O objetivo do plano dessa experiência é de assegurar que tudo o que há no lado esquerdo é refletido no lado direito, e inversamente tudo o que há no lado direito é refletido no lado esquerdo. Todos os objetos devem ser colocados em relação à rua de uma maneira simétrica, e não somente isto, é necessário que as crianças façam a mesma coisa em relação à outra rua.

Para esta construção usaremos cadeiras que possuem um plano de simetria, como também cubos que possuem grande número de planos de simetria, criando situações para ver como as crianças são capazes de descobrir, de construir simetrias.

Podemos igualmente pedir a uma criança pasa se colocar no cruzamento das duas ruas e construir alguma coisa diante dela entre as duas ruas que está enxergando. Em seguida vamos pedir que faça um quarto de volta e construa exatamente o que via quando estava de frente para sua primeira construção. Ela vai continuar a construir 4 construções diferentes que devem ter a mesma aparência, não quando se olha simultaneamente de um e de outro lado de uma rua, mas quando de uma parte está em face de uma construção e de outra parte está em face de outra.

Assim passamos da construção de figuras de reflexão para a construção de figuras de rotação.

2ª Atividade Geométrica - Agora temos três planos de simetria. Esses palnos serão ângulos de 60°, isto é, há um sexto de volta entre eles. Vamos utilizar o TRIMATH. O TRIMATH são triângulos, trapézios e

As crianças deverão colocar o material entre 2 dos eixos de simetria traçados no chão, e em seguida refleti-los da mesma maneira que na primeira atividade refletiram suas cadeiras e seus cubos. Vamos proceder após a tarefa com as sadeiras, mas aqui em lugar de fazer 4 construções, vamos ser obrigados a fazer 6 construções, porque há 6 regiões entre 3 eixos concorrentes, enquanto não há mais do que 4 regiões entre 2 eixos concorrentes. É a razão pela qual temos seis cores diferentes para o Trimath e só 4 cores diferentes para o QUADRIMATH.

ATIVIDADES PARA PRODUTO DIRETO:

Vamos considerar produtos diretos diferentes - um produto entre um conjunto e um outro - produto cartesiano, ou seja, o conjunto de todos os pares diferentes tomando os elementos do primeiro e associando-os aos elementos do segundo conjunto nos pares. Por ex.: se eu tomo 3 cores num conjunto de cores e 4 formas num conjunto de formas, obtenho 12 combinações possíveis, cada forma será associada a cada uma das cores. Assim teremos cada forma numa, noutra e noutra cor, isto é 12 objetos, e em cada um deles associadas uma cor com uma forma.

É assim, por ex.: que o conjunto dos blocos lógicos é formado. Ele é o produto cartesiano do conjunto de 3 cores, do conjunto de 4 formas, do conjunto de 2 tamanhos e do conjunto de 2 espessuras.

Em nosso material aqui teremos 3 tamanhos diferentes para que se possa ter um produto 3 x 3 x 3. Em lugar de considerar a espessura que seria dificilmente visível neste amplo local, vamos tomar quadros. Alguns blocos serão quadrados, digo enquadrados em preto e outros não o serão.

Estaremos preparados para representar um conjunto 3 x 3 x 3 tomando 3 formas, 3 cores e 3 tamanhos. Representaremos um conjunto 4 x 3 x 2, tomando 4 cores, 3 formas e 2 tamanhos, e representaremos um produto 2 x 2 x 2 x 2, tomando 2 formas, 2 cores, 2 tamanhos e enquadrados e não-enquadrados. Cada objeto neste conjunto de objetos corresponderá num outro jogo a um conjunto.

Tomamos alguns objetos e com eles construimos conjuntos cujos elementos forma colados sobre placas de cartão. Em cada conjunto assim formado há de cada objeto seja 0, seja 1, seja 2, seja 3 ; de outros há 0, 1 ou 2 no conjunto e ainda de outros há 0 ou 1. Assim poderemos introduzir as propriedades dos conjuntos, que são as propriedades de ter um certo número de uma certa espécie de objetos no conjunto, ou de não tê-lo. Por ex.: Se um conjunto não tem caixa como elemento, 0 caixa é uma propriedade deste conjunto, como ter dois objetos do mesmo tipo é outra propriedade de outro conjunto, e assim por diante.

Vamos comparar estas propriedades dos conjuntos com as propriedades c correspondentes dos objetos.

Estas atividades serão relativamenêe simples. Por ex.: se pedirmos às crianças para organizar numa ordem qualquer, mas sistemática, seus objetos e em seguida para organizar da mesma maneira seu conjunto de conjuntos, veremos que mais tarde será possível utilizar esse material para outros exercícios muito mais puxados com as crianças mais velhas.

- É o fim da descrição de atividades para o primeiro encontro. Obrigado.
- Espero que seja possível datilografá-las em português e distribuí-las na assistência.

Merci beaucoup !

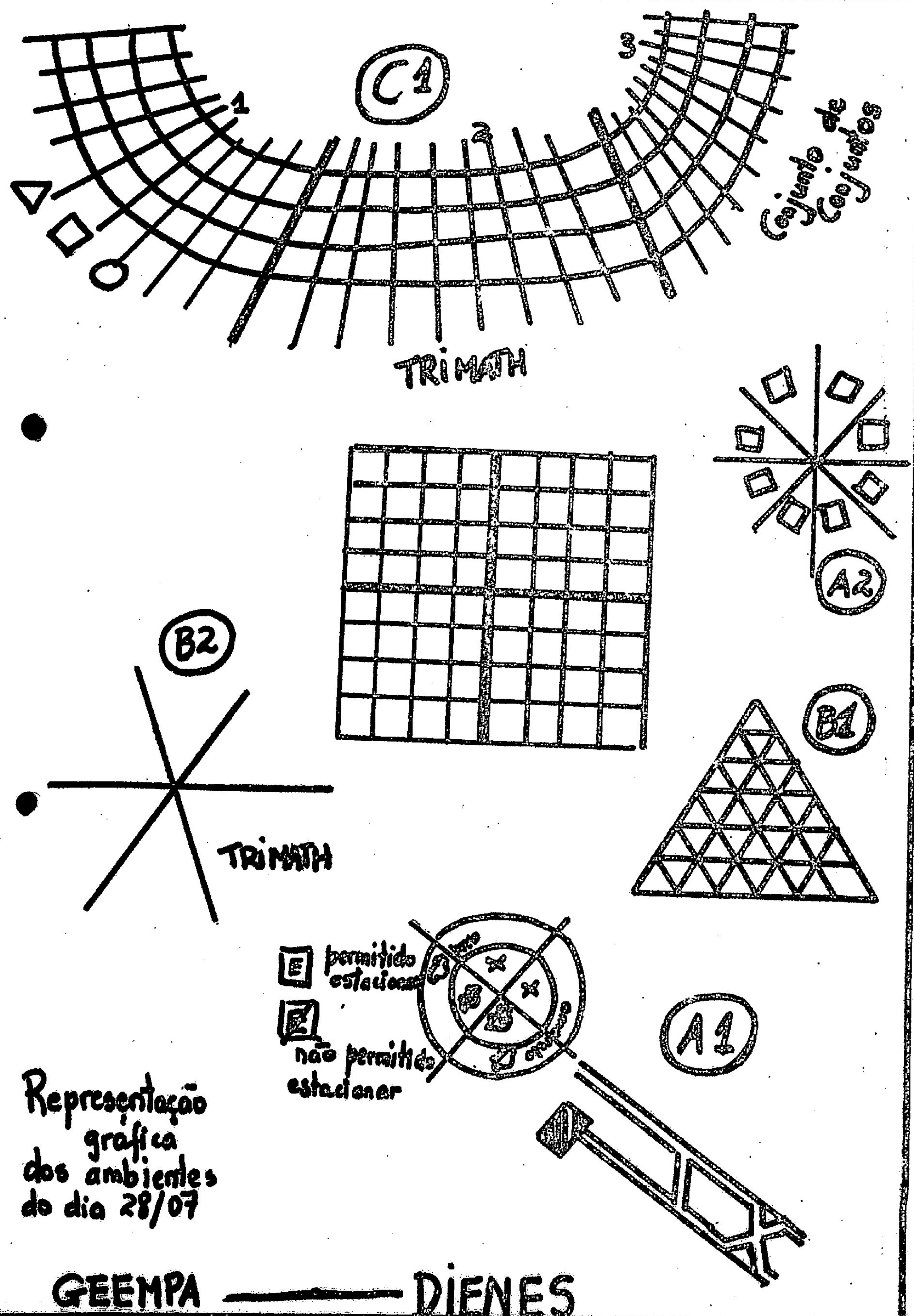
Coletado e Traduzido por:

Nuben A. C. Medeiros

Léa Fagundes

Lab. Matemática
S-E.

A0



GRUPO DE ESTUDOS SOBRE O ENSINO DA MATEMÁTICA DE P. ALEGRE

Curso Prof. Dienes

B1

Encontro do dia 28 de julho de 1972

A - ATIVIDADES DE LÓGICA

Ambiente 1: Sistema de Estradas.

Material: Conjunto de Carros de Plástico.

Explicação: No dia anterior(27), o Trabalho consistiu em desenvolver a 1ª etapa do processo de aprendizagem - adaptação ao ambiente - (Consultar o texto com a explicação do professor) - Hoje foi desenvolvida a 2ª etapa - jogo estruturado.

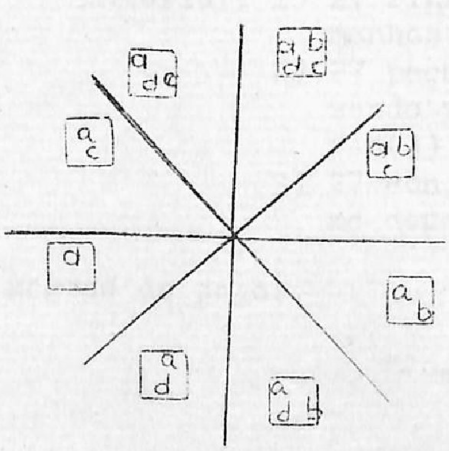
Regras do jogo - Construir os caminhos, através da colocação das etiquetas atendendo as proibições de estacionamento no parque, em situações variadas de negação, conjunção e disjunção.

Ambiente 2: Eixos de Simetria do Quadrado.

Material: Conjunto de conjuntos de caixinhas, bonecas cubinhos e carrinhos.

Explicação: Este trabalho foi feito pelo professor Dienes no fim do encontro sem a participação das crianças.

Regras do Jogo:



a= carrinho
b= boneca
c= caixinha
d= cubos

Queremos realizar uma série de operações que nos permitam conservar no diagrama: $\boxed{a\ c}$ $\boxed{a\ d\ c}$ $\boxed{a\ b\ d\ c}$

Este é o ecemplo de uma das inúmeras possibilidades de realizar esta tarefa, utilizando 4 operações(podendo também ser realizada 3 operações, 5, etc...)

1ª - Conservar os conjuntos que tenham boneca (Tiram-se os ñ boneca).

2ª - Com os que estão agora no diagrama conservar apenas os que tem cubo (sai $\boxed{a\ b\ c}$ $\boxed{a\ b}$)

3º - Juntar aos já conservados os ñ boneca (não tem bonecas)

(Junta $\boxed{a\ d}$ $\boxed{a}$ $\boxed{a\ c}$ $\boxed{a\ d\ c}$)

4º Conservar (agora) apenas os que tem caixinhas (sai $\boxed{a}$ $\boxed{a\ d}$ $\boxed{a\ b\ d}$)

B - Atividades de Geometria

Ambiente 1: Uma Representação da isometria do tetraedo regular

Material: 1 Triângulo Equilátero dividido em 36 regiões triangulares;
9 garrafas
9 caixas de sapato
9 caixas menores
9 latas

Regras do jogo:

Lançada uma peça dentro de um dos espações triangulares:

As peças vizinhas à lançada - isto é - aquelas que irão nos espaços triangulares contíguos, deverão ser todos diferentes entre sí e diferentes da lançada.

Ambiente 2: Uma representação dos eixos de simetria do triângulo equilátero.

Material: TRIMATH

Regras do jogo:

Começando pelo amarelo numa construção qualquer.

Outra criança realiza a mesma construção em outra côr de maneira que seja(esta) simétrica em relação ao eixo comum com aregião amarela, e assim sucessivamente, nas seis regiões

C - ATIVIDADES DE ÁLGEBRA

Ambiente 1: Exploração do produto direto.

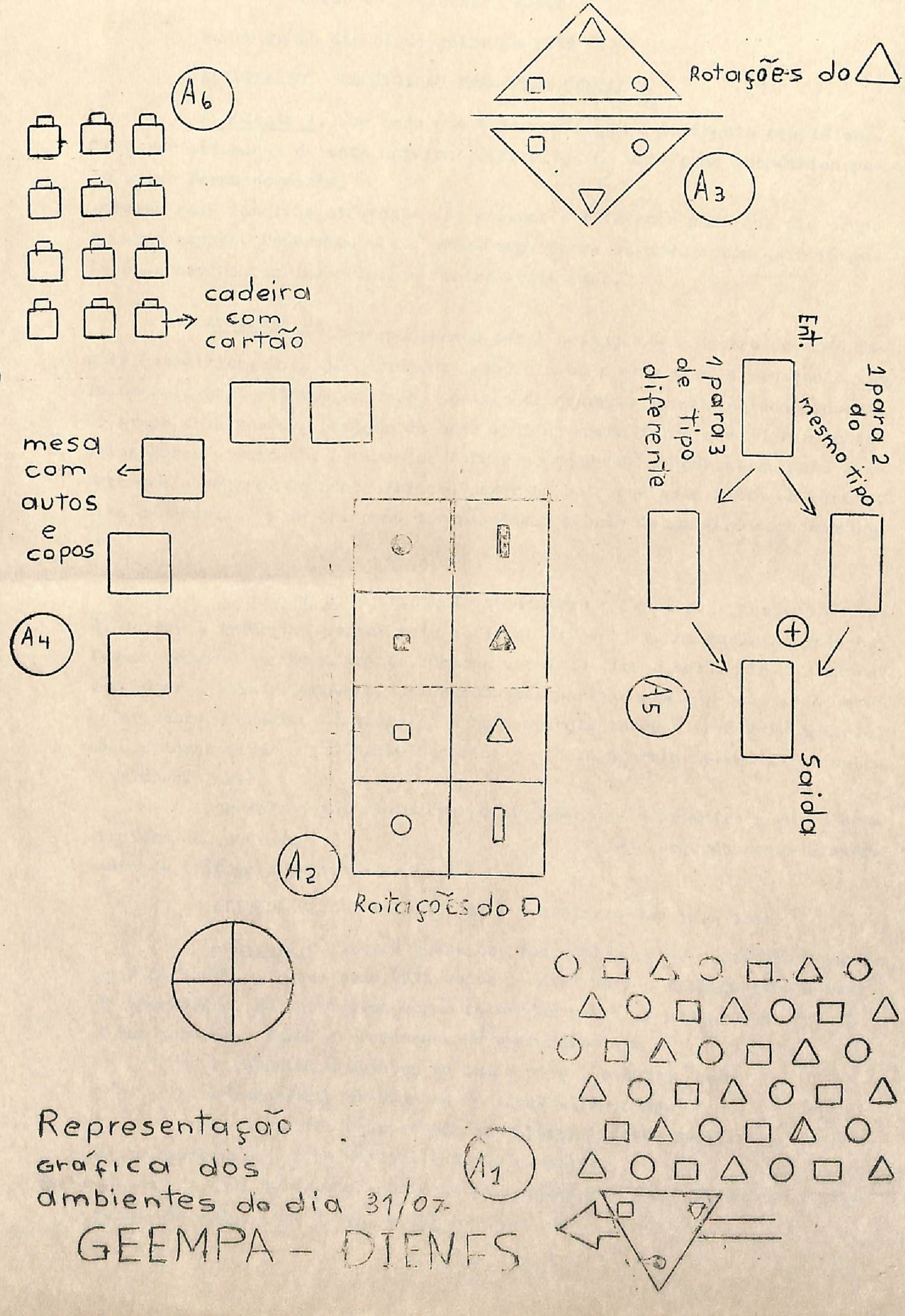
Material: 1) 27 figuras de cartolina com 3 cores, 3 formas e 3 tamanhos.
2) 27 peças de TRIMATH escolhidas estruturalmente, fazendo variar: nº de orifícios(0,1,2), formas(3) e cores(3)
3) 27 conjuntos fazendo variar sistemáticamente, conforme desenho na folha já distribuida.

Regras do jogo:

"Jogo das 3 diferenças"

o-o-o-o-o-o-o-o-o-o-o

Lab. Matemática
Y.E.



Representação gráfica dos ambientes do dia 31/07

GEEMPA - DIENES

GRUPO DE ESTUDOS SOBRE O ENSINO DA MATEMÁTICA - GEEMPA

Curso do Professor Dienes

Encontro do dia 31 de julho de 1972

ATIVIDADES GEOMÉTRICAS PRÉ-OPERATÓRIAS :

A mbiente 1. Uma rede que é isomorfa com o triângulo equilátero. Pode ser orientada de seis maneiras diferentes de uma forma geométrica para outra forma seguinte.
Existem seis maneiras diferentes de colocar o triângulo para que ele ocupe o mesmo espaço. Poderemos ver a semelhança entre os movimentos do triângulo e os movimentos das crianças dentro desta rede.

Ambiente 2. Aqui poderemos ter 8 crianças - 1 dentro de cada figura geométrica. Duas das crianças terão uma bola cada uma. A posição da bola amarela será determinada pela posição do quadrado grande colocado diante do grupo de alunos. A posição da bola azul da mesma forma será determinada pelos giros e voltas , movimentos feitos no quadrado de cartolina pela criança que o segura. Quando a criança mexer na bola que está junto ao cartaz, vira o quadrado, e as crianças deverão jogar a bola de maneira correspondente.

A mbiente 3. O triângulo equilátero : Temos seis pessoas em vez 8, porque o triângulo possui seis posições diferentes nas quais se pode colocar ocupan o mesmo espaço. Quando um aluno vira o triângulo, os outros vão jogar a bola de maneira correspondente, por exemplo : a bola azul deve estar sobre o quadrado amarelo, e a bola amaréla sobre o triângulo amarelo, se a criança virar o triângulo (cartaz) a bola amarela deverá ficar sobre o triângulo azul.

Os dois jogos são muito semelhantes : - o primeiro segue a estrutura do quadrado , - o segundo segue a estrutura do triângulo equilátero.

ATIVIDADES OPERATÓRIAS EM Z (conjunto dos inte iros)

Ambiente 4. Estão sobre as mesas outinhos de plástinho e copinhos de papel, A mesa onde há"2 copos a mais" será a Entrada para a rede de Operadores. Os operadores serão colocados sobre as cadeiras em vez de serem colocados sobre as crianças. Há operadores que :

- substituem objetos do mesmo tipo , e outros que,
- substituem os objetos de tipos diferentes.

Os primeiros representam os multiplicadores positivos, e o sedo os operadores , digo multiplicadores negativos.

Aqui temos uma cadeia de operadores que são colocados ao longo de uma fila, isto é, em série.

<u>Ambiente 5</u> - Aqui temos dois operadores paralelos. As saídas dos dois operadores estão lado a lado, e são seguidas por 1 adição binária que leva à saída desta cadeia de operadores.

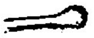
Nos dois casos o problema será:

"Encontrar um só operador equiva lente à cadeia"

<u>Ambiente 6</u> - Há muitos outros operadores disponíveis e as crianças poderão experimentar com outras cadeias.

Aqui elas poderão achar outros resultados da maneira que quiserem. Mas não serão obrigadas a fazer se não quiserem.

<u>Última atividade</u>

Consiste de combinação de operadores aditivos módulo 5. Os operadores são simbolizados por certas posições do corpo. O braço esticado horizontal  representará o elemento neutro, isto é, <u>zero</u>. Esta posição  representará direção ao alto, repetida significará 2 movimentos para o alto.

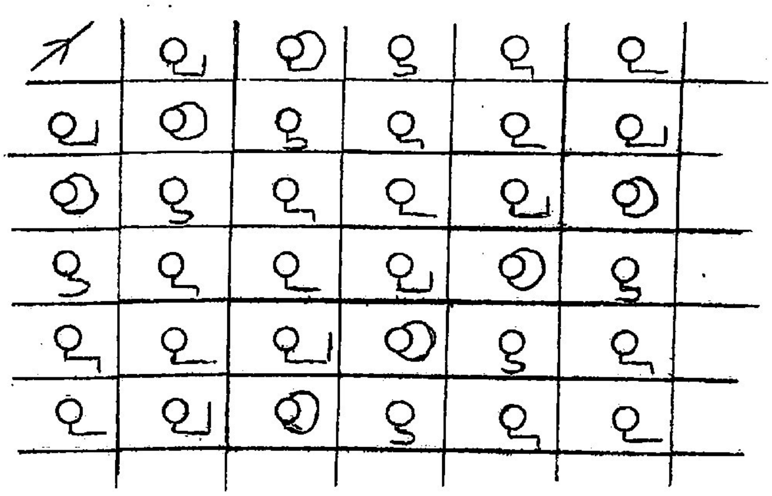
 1 para baixo, repetida 2 para baixo.

Quando for necessário ir ainda mais alto, se recomeça em baixo. Da mesma forma, se for necessário ir mais baixo, recomeça-se com a posição mais alta.

As cria nças deverão encontrar nos movimentos com os braços operadores equivalentes a cada 2 operadores sucessivos, como nestas mesas.

Operadores

Estados



Lab-Matemática
J. E.

GRUPO DE ESTUDOS SOBRE O ENSINO DA MATEMÁTICA - GEEMPA
Curso do professor Dienes
Encontro do dia 1º de Agosto de 1972

Ambiente 1. Comparação de jogos - exercício de isomorfismo.
Material: 25 peças de cartolina, variando sistematicamente as cores (em nº de cinco) e as formas (também 5).

1a atividade: As crianças deveriam arranjar de uma maneira regular as 25 peças no quadrado 5 por 5.

2a atividade: As crianças deveriam fazer uma correspondência entre esses 25 objetos e as 25 posições que se podem obter, fazendo as posições com os dois braços conjugadamente, conforme o já descrito na última atividade do dia anterior.

3a atividade: Esta ainda não foi realizada, mas consistia em fazer uma transformação do jogo em si mesmo. A cada posição do corpo deveria fazer corresponder uma outra posição de maneira que quando estabelecemos uma adição de duas posições que conduzem a uma terceira, a soma da posição transformada conduza igualmente à transformada da soma. (as transformações estavam sobre uma mesa).

Ambiente 2.
Material: 27 figuras: 3 formas
3 cores
3 tamanhos

27 figuras (Trimat) 3 cores
3 formas
0, 1, 2 buracos

Atividade: Deveria se feita uma correspondência entre os 2 conjuntos, propriedade por propriedade

Ambiente 3.
Material: 27 conjuntos, conforme folha já distribuida sobre produto direto e trabalhado no dia 28 de junho. (Folha correspondente ao ambiente C1 3 do dia 28).

Atividade: após estabelecido o isomorfismo entre os jogos (sim, porque antes os conjuntos deveriam ser colocados no retângulo 3 por 9 de uma maneira sistemática), seria solicitado que se fizesse um jogo de adição módulo 3. Após a adição deveriam ser encontrados os inversos. Deveria ser encontrado uma peça, não importava qual fosse para ser o elemento neutro.

Deveria ainda ser procurado o inverso de cada elemento.

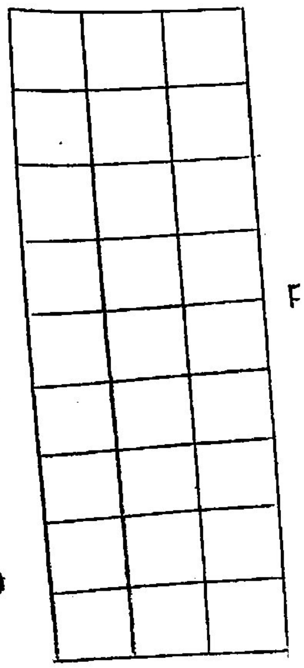
Assim teríamos 3 novas operações: a 1a transformaria qualquer elemento no neutro (multiplicação por zero na aritmética). A multiplicação por um será simplesmente tomar um elemento qualquer e ele multiplicado por um dará o próprio elemento. Teríamos ainda a terceira operação que seria encontrar o inverso. . Assim pode-se escolher tres elementos quaisquer e procurar encontrar os outros elementos como soma de produtos dos tres elementos escolhidos.
Obs.: O que as crianças realmente realizaram desta tarefa foi somente colocar os 27 conjuntos de uma maneira sistemática no retângulo tres por nove.

Ambiente 4.

Material: Rede lógica (sistema de estradas).

As crianças já deveriam entrar nesta etapa do jogo.
A região onde existe a letra E será aquela permitida para que possa se colocar uma pessoa. A região onde não existe a letra E naa deverá se colocar uma pessoa.
Foram distribuidos 4 chapéus e quatro colares a 4 meninos e quatro meninas segundao o critério de se formar todas as combinações possíveis de maneira que não se tivesse duas pessoas com as mesmas características, isto é não poderia haver, por exemplo, duas meninas sem chapéu e de colar.
Foram propostos vários jogos, como no jogo com os carrinhos, mas podendo também ser mudado o sistema de estradas. Isto é, as partes do sistema de estradas poderiam ser substituidas por outras à vontade.

<u>5º dia</u>

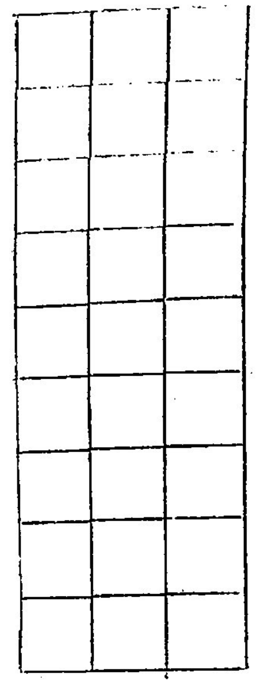


Figuras

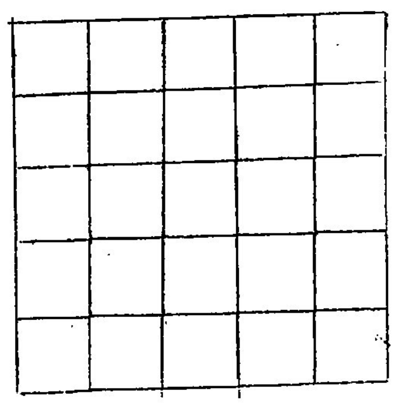
2

TRIMAT

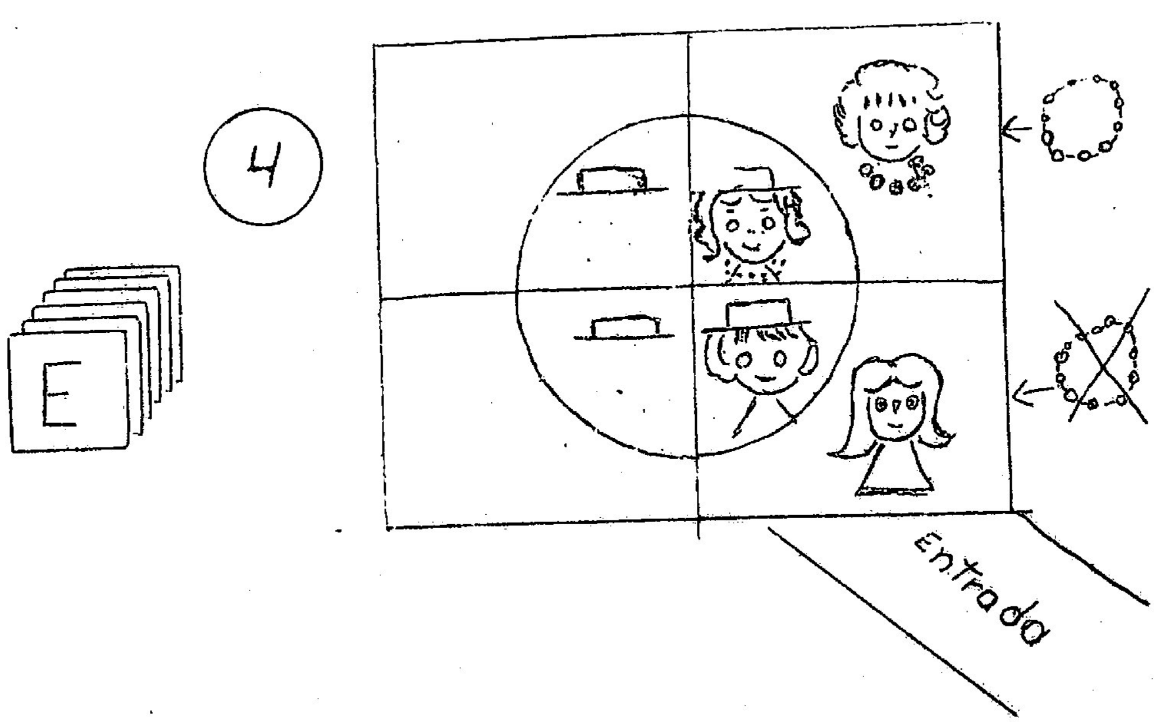
3



1



4



Lab. Matemática
I.E.

GRUPO ESCOLAR SOBRE O ENSINO DA MATEMÁTICA : GEEMPA E 1
CURSO DO PROFESSOR DIENES
ENCONTRO DO DIA 2 DE aAGOSTO DE 1972

Ambiente 1 - SISTEMAS DE ESTRADAS
(Redes Lógicas)

Regras diferentes para as atividades de hoje:

- -Um cruzamento que não tínhamos ontem.
- Pode-se trocar a direção das flechas.
- O cruzamento evidentemente permanece como cruzamento, mas as crianças podem trocar a parte do centro, isto quer dizer que as crianças podem trocar uma conjunção por uma disjunção (e por ou)

Se tivermos tempo e as crianças tiverem energia, vamos jogar outro jogo semelhante sem a rede, só com o diagrama.

- Há também outra fonte de possibilidades porque no lugar de 1 só porta de cada espécie, 2 portas de cada espécie são disponíveis.

Há em cima da caixa branca problemas que são sugeridos às crianças.

Se as crianças se propuserem outros problemas que julguem mais interessantes devem estar em condições de tentá-los.

É muitas vezes tarefa do professor desaconselha certas atividades dizendo-lhes que talvez as regras que estão propondo sejam muito difíceis. Se assim mesmo as crianças querem continuar. Devem se assegurar por si mesmos se podem resolver o problema ou não.

Ambiente 2.
Quadriculado 5 X 5, acrescido de mais 6 quadros.
Material : formas coloridas
posições dos braços

Aqui temos o mesmo jogo a 25, mas espera-se que possamos ir mais longe que ontem.

Pediremos à criança para refazer a solução de ontem e em seguida vamos colocar problemas a propósito da solução que elas deram.

Se as crianças esqueceram, podem procurar outra hoje.

Espera que se possa chegar à Adição.

Cada uma dessas figuras representará um elemento num sistema matemático. Isto quer dizer que pode-se determinar uma operação interna que assegure um elemento determinado, sendo dado dois elementos quaisquer (associar (a, b) c)

Supõe-se que a correspondência entre as posições do corpo e as 25 figuras terá sido estabelecida antes de iniciar o problema da Adição.

Ambiente 3: Quadriculado 3 X 9
Material: Figuras de 3 F, 3 T e 3 C- conjuntos de quadrados copinhos e autinhos.

O primeiro problema será encontrar a correspondência entre as 27 figuras e os 27 conjuntos sobre as placas.

Uma vez que a correspondência esteja estabelecida da maneira que as crianças decidirem , vamos tentar experimentar determinar uma Adição. Teremos o mesmo problema do outro lado.

Podem ver que nos 2 lados a estrutura do sistema é 3 X 3 X 3.

Também o prof. forneceu um outro sistema da mesma estrutura 3 X 3 X 3. para que as crianças possam trabalhar na procura de solução para o problema sem serem obrigadas a caminhar tantos metros para resolvê-los, para encontrar os objetos que procuram.

Ambiente 4 : Quadriculado 3 X 9
Material: Trimath
Conjuntos de bonecas, caixas e furos

Aqui nós temos três cores, três formas e 0,1 ou 2 furos.

Igualmente ao lado 3 C, 3 F, 0,1 ou 2 furos.

Não será difícil transferir a estrutura do material maior para a estrutura do material pequeno.

Devem sempre encontrar uma razão particular para colocar uma figura num dos quadros, e um conjunto no mesmo quadro.

OBSERVAÇÕES DO PROFESSOR

1a Atividade:

As crianças cometeram um erro na etapa transitória e isso perturba quando as crianças ainda não estão habituadas a cometer erros sem que isso seja considerado uma espécie de crime pelos professores.

É muito importante estimulá-las todo o tempo.

As crianças tomaram uma decisão para resolver um dos problemas colocando 2 portas juntas. Ninguém lhes havia dito que isto era proibido (não contrariava nenhuma regra), por conseguinte deve-se considerar como a utilização de sua criatividade.

A reação convencional no ensino tradicional seria:

- - "Não deves fazer isto! Deves fazer de tal forma !"

Os professores assim tolhem a criatividade dos alunos.

Mais uma vez é importante encorajar as crianças e dizer que essa solução das duas portas é interessante!

Não se sabe se as crianças encontraram todas as soluções (por exemplo: " como utilizar somente 3 portas ? ") mas pôde-se que muitas ficaram decepcionadas porque não eram capazes de continuar.

Então amanhã terão oportunidade de retomar o problema.

2a. Atividade:

Houve uma seqüência muito interessante da solução de ontem.

As crianças refizeram rapidamente a solução e o professor perguntou por que linha deveriam se deslocar para não mexer um braço.

Em seguida por qual linha se deslocar para não mexer o outro braço.

Contou-se um número de figuras por cima das quais se poderia passar..Às vezes havia 5, outras vezes 4. Onde estava a 5a.?.

Uma das meninas disse que a primeira figura não contava.

Pediu então que contasse as figuras a partir da primeira.

A menina foi obrigada a reconhecer que havia 5 vermelhos e 4 quadrados. Quando se procura ensinar uma honestidade intelectual à criança, é preciso fazer de uma maneira gentil.

As crianças encontraram a 5a. figura. O professor perguntou se elas não podiam alinhar junto com a quarta. E neste momento se deram conta da razão por que havia 6 outros quadros fora do gráfico.

Perguntou: - " Seriam capazes de adivinhar a posição do corpo, sem olhar, só mostrando a figura colorida? "

Foi difícil por que as figuras foram colocadas numa ordem muito diferente daquela da posição dos corpos:- as figuras estavam colocadas por linhas e por colunas, e as posições arrumadas por linhas e diagonais.

As crianças, depois de mais duas tentativas conseguiram encontrar uma solução.

É preciso sublinhar que elas terminaram a tarefa, e o professor avisou que não eram obrigadas a terminar.

O sentimento de liberdade ajudou-as a encontrar a solução do problema.

Já eram capazes de adivinhar a posição olhando uma figura.

Notem a diferença: - no inicio estavam agitadas (tinham um problema) e no final ficaram satisfeitas.

Não se pode dizer que finalmente encontraram a correspondência entre figura e posição, mas talvez em mais 5 minutos pudessem fazê-lo.

3a Atividade:

Aqui foi bastante evidente: as crianças não estavam habituadas à sistematização de grande número de objetos. Se considerarmos a dificuldade de linguagem professor X aluno e as poucas experiência neste tipo de problema, elas chegaram com sucesso considerável a uma solução do problema.

Na 1a solução consideraram apenas 1 variável:

azuis correspondem a 1copinho
vermelhos correspondem a 2 copinhos
laranja correspondem a 3 copinhos

O professor sugeriu que as formas não estavam colocadas de forma sistemática.

Isso foi suficiente para que compreendessem que deveriam organizar o sistema sem mudar as cores.

Finalmente estabeleceram correspondência entre:

Cores - nº de copos
Tamanhos - nº de quadrados
Formas - nº de carros

A atividade seguinte foi a Lei da Adição Módulo 3. Isto quer dizer que 3 objetos da mesma espécie fazemos valer zero.

Levou certo tempo para que as crianças compreendessem a adição do número de um conjunto com o outro.

-" 2 quadrados mais 2 quadrados e 2 copinhos é igual a um quadrado e dois copinhos"

4 quadrado se transforma em um quadrado.

2 copinhos permanece 2 copinhos.

A etapa seguinte da Adição era :

- " considerando a propriedade 2 Formas diferentes encontrar a Forma que era a sua soma".

Deveriam procurar os conjuntos correspondentes. <u>E finalmente deveriam ser capazes de realizar a adição somente levando em consideração as propriedades Cor, Forma e Tamanho.</u>

<u>Deveriam dar um passo considerável em direção às FRAÇÕES</u>.

Contudo a idéia de Adição Módulo 3 foi compreendida por certo número destas crianças.

Em todo caso todas as crianças fizeram um certo progresso numa sequência para associar um conjunto estruturado a outro conjunto estruturado, comparando propriedade por propriedade.

Esperamos que possam continuar no mesmo estilo.

Lab-Matemática
I.E.

GRUPO DE ESTUDOS SOBRE O ENSINO DA MATEMÁTICA
CURSO DO PROFESSOR DIENES
Encontro do dia 3 de agosto de 1972

(F-1)

Ambiente 1

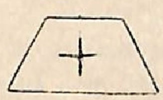
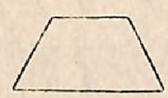
Trocamos de lado e trocamos de distribuição espacial: - temos 1 triângulo de 3 triângulos. Em cada lado dos 3 triângulos ha 3 espaços . É a estrutura 3 X 3X 3. As crianças devem ser ca pazes de colocar as figuras e os conjuntos em cada quadro:

- Fa zer a correspondência entre as propriedades das figuras e as propriedaes dos conjuntos.

- Encontrar os inversos (lembrar que esta mos no módulo 3)

O inverso de 3 bonecas é 1 boneca porque quando se coloca 3 bonecas juntas se considera $3 \equiv 0$.

Marcamos todas as figuras com uma cruz, mas só de um lado. Quando a cruz da figura é visivel vamos dizer que isto representa o inverso da figura.

 é o inverso de 

Assim vamos tentar juntar não so figuras, mas também figuras somadas ao inverso de outras figuras.

Preparamos assim a multiplicação de cada figura por 1 escalar.

Os escalares serão:
- O zero que transforma cada figura na figura neutra.
- O 1 que não muda de figura.

E o escalar que chamamos mutador que gera o inverso de cada figura.

Os escalares constituem o que chamamos em matemática 1 corpo porque ha uma adição que é operação interna e também comutativa e haverá a Multiplicação que é a superposição das transformações. O corpo destes 3 elementos nos ajuda a construir um Espaço Vetorial. Este Espaço Vetorial terá 3 dimensões

Ambiente 2

O Espaço Vetorial que ha neste jogo do meio terá 2 dimensões. As crianças deverão encontrar os escalares.

Não se pode dizer se isto será possivel hoje. Vamos tentar colocar juntas as figuras com as posições correspondentes e em seguida pra ticar a Adição e talvez encontrar os inversos.

(Obs. - O professor insiste em que não se deve iniciar um trabalho com a obrigação de alcançar objetivos específicos, para não constranger o aluno, ou frustar-se na avaliação em cada pequena etapa. Os objetivos devem estar claramente definidos na própria organização das situações de experiência de aprendizagem, mas o comportamento das crianças vai nos mostrando quando e como será possivel alcançá-los.

ara umas nas primeiras atividades, para outras em atividades mais iadas, para outras ainda em muito tempo e mais experiências)
Encontrar os inversos será 1 escalar neste jogo.
- 1 corresponde a não haver trocas
- o transformará cada figura na figura neutra. (que ainda não encolhemos)
- Ainda haverá 3 escalares a encontrar porque neste jogo haverá 5 escalares, enquanto que no outro só 3.

Aqui vamos construir um Corpo de 5 elementos antes de construir o Espaço Vetorial de 25.

A construção do Corpo de 3 elementos é trivial. P odemos imaginar que as propriedades são conhecidas intuitivamente.

Assim o Espaço Vetorial do Ambiente 1 será mais fácil de observar

Ambiente 3 - As crianças pediram para jogar no conjunto de caminhos.

Pedimos que eles conversassem com a outra equipe, mas os outros não estavam de acordo em trocar. Então construimos para eles outro conjunto de caminhos.

Fizemos os cruzamentos e as transversais e sobre as caixas o diagrama final.

Não tem a mesma aparência nem o mesmo material. Temos 8 blocos lógicos variando em Cor, Forma e Tamanho, e no outro jogo 8 crianças variando em Sexo, Chapéu e Colar.

Vamos ver se são capazes de trocar de caminhos e de material,.

ATENÇÃO:

Componente muito importante do processo de abstração é a troca de todas as variaveis tão frequente quanto possível (as que não são pertinentes à Estrutura Matemática)

As 25 Formas não tem nada a ver com o Espaço Vetorial de 25 elementos .

A posição dos braços também. Mas o laço que se pode estabelecer são isomorfos às propriedades do tal Espaço Vetorial.

OBSERVAÇOES DO PROFESSOR:

Atividade 1

Aqui há ainda certas dificuldades com o estabelecimento de correspondência entre os jogos.

Se as crianças não estão a medida de ver a relação comum entre 2 jogos como os que vemos aqui, é inutil passar à consideração das propriedades abstratas do jogo.

A la solução considera 2 variáveis ao mesmo tempo - A la solução dada ante-ontem considerava só 1 variável - a Cor.

Talvez tenham notado que nas 2 soluções a cor é o fator mais importante.

Cada grande triângulo é formado de objetos da mesma Cor - É realmente uma pena que este fator importante não seja mais utilizado na Pedagogia.

...s uma certa sugestão do professor as crianças armaram os con-
...com 2 cubos com o **azul** . E até o fim havia conjuntos sem cubos
Neste triangulo colocaram os conjuntos com cubos .

Foi só após tentar a solução do outro problema que elas se deram ...nta que não havia nenhum atributo em comum entre os conjuntos pertencentes à mesma Cor . Mas creio que as crianças não compreenderam a falta desta correspondência.

Lembraram que havia 2 cubos sobre o azul . Viram que as 2 filas no triângulo laranja tinha 1 só cubo enquanto que 3a não possuia. E foi neste momento que essa fila foi trocada com a outra. Neste momento era mais evidente que antes que havia uma propriedade de conjunto que e era comum a todos os conjuntos de um só triângulo.

Ne-te momento as crianças estavam prontas a voltar a atividade, neste lado e estabelecer a correspondência precisa entre os conjuntos e as formas. Surgiu que talvez fosse possível introduzir os inversos.

As crianças já tinham aprendido a prática do cálculo Módulo 3 .

Assim elas não viram nada difícil no problema de " encontrar o conjunto que possuia um certo conjunto dado cuja soma resultaria num conjunto vazio."

Passaram à consideração dos inversos das figuras.

Viram que conforme sua escolha o triângulo vermelho pequeno $\Leftrightarrow$ 0.

Eles acabaram por encontrar pares de figuras cuja soma era o triâgulo vermelho pequeno.

Atividade 2Y Aqui não levaram muito tempo para estabelecer uma correspondência precisa entre o braço esquerdo e a forma e o braço direito e a cor. Mas assim mesmo foi necessário colocar as crianças sobre as figuras da mesma Cor ao redor para que elas pudessem ver que se era da mesma Cor então o braço direito não variava.

Após elas se divertiram durante longo tempo em adivinhar a posição do corpo sendo dada uma figura de determinada cor. É o exercício clássico da prática do Isomorfismo. Finalmente as crianças estavam prontas a efetuar adições. As adições com um braço só foram facilmente realizadas. Assim surgiu que as crianças pegassem 2 figuras diferentes e procurassem a sua soma. Surgiu que elas não olhassem as figuras que estão associadas à Forma mas acharam que foi muito difícil para as crianças. POR conseguinte concientemente ou não, achavam a soma de 2 figuras dadas olhando sempre o diagrama.

Era muito difícil para ser divertido.

Atividade 3 — REDES DE CADEIRAS

As crianças decidiram fazer outra regra. Tentamos criar caminho improvisando com o material disponível: A regra de "encontrar uma saída determinada" foi difícil demais. Trocaram a regra.

Os senhores notaram que quando um bloco chegava e não estava marcado no diagrama, ele simplesmente pegava na folha e botaram em cima?

Aqui o ex. do termostato de cor.

Se o professor insiste sobre a execução da ordem o termostato é perdido porque não temos mais a ajuda da criança para nos ajudar na decisão. Se Sim ou Não, se o que havíamos dado, lhes convém ou não.

As crianças se deram algumas ordens eles mesmos, mas geralmente acharam suas ordens muito difíceis.

Se esta situação tivesse acontecido numa sala de aula teria discutido individualmente o problema com as crianças.

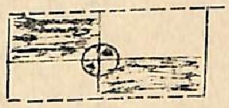
Teria sugerido às crianças que o trabalho escolhido era difícil demais para eles porque certos trabalhos anteriores não tinham sido feitos. Após terem sentido a dificulldade da tarefa as crianças teriam reconsiderado seus próprios interesses.

Se o prof diz: " eu proibo que vocês façam isso ou aquilo", as crianças não teriam compreendido a razão da proibição. Após um certo número de experiências desta natureza, as crianças aceitariam a sugestão do professor com melhor boa vontade.

-Atividade 4 -

Aqui as crianças fizeram muito mais progresso do que aqueles que iniciaram hoje a rede lógica.

A la regra era



Só era possível resolver utilizando 2 cruzamentos Após período não muito longo as crianças encontraram a solução,.

Após esta solução pediu-se que ela fizessem o contrário. Foi intrteressante porque as crianças trocaram esta porta,.

Trabalhando com outros diagramas (já com representação)

Aprenderam as diferenças destas 2 formas e a equivalência de outras

Isto quer dizer equivalencia da equivalencia de qualquer coisa é comutativa.

Lab. Matemática
S. E.

GRUPO DE ESTUDOS SOBRE O ENSINO DA MATEMÁTICA -

GEEMPA - Curso do Prof. Dienes - BANRISUL

1. Atividades de lógica

Foi modificada a parte lógica, acrescentando um outro "caminho" para que as crianças pudessem comparar os resultados de dois caminhos diferentes.

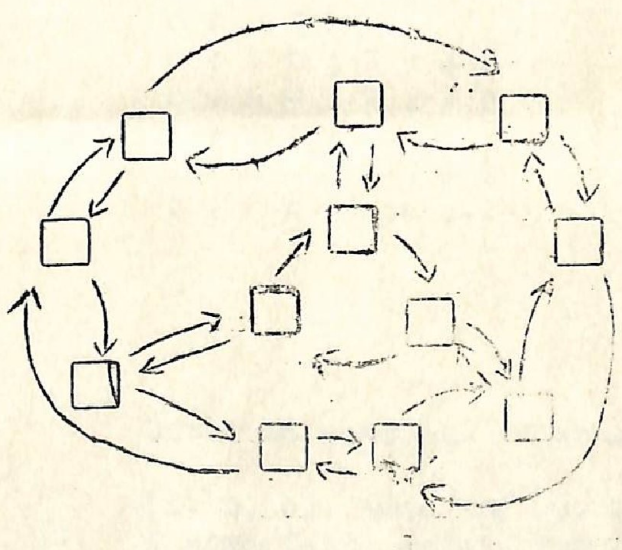
1º problema proposto: construir dois caminhos de maneira que um conduzisse ao complemento do outro.

2º problema proposto: construir dois caminhos que conduzam ao mesmo conjunto.

3º problema proposto: construir dois caminhos de modo que um caminho nos conduza a um conjunto que seja subconjnto do que o outro caminho conduza.

2. Atividade de reserva.

Tratam-se de dois jogos que nos conduzem às isometrias do tetraedro regular



Material: figuras: 3 cores (vermelho, azul e verde)

tipos: 

O jogo consistia em colocar sistematicamente nos quadrados do gráfico as figuras de modo que:

1º jogo:

------> : pemanece a cor, não importa o tipo.

------> : muda a cor, não importa o tipo .

2º jogo:

-----> : permanece a cor e muda ao menos uma outra coisa

-----> : muda a cor e muda ao menos uma outra coisa

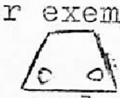
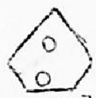
JOGO DOS 27.

É uma continuação do dia anterior, hoje se experimentará que as crianças cheguem à idéia da dependência e da independência.

Para tanto as crianças deverão ser capazes de:

a) juntar um elemento a outro e encontrar a soma.
b) encontrar o inverso de um elemento dado
c) encontrar o elemento que deve ser juntado a um elemento dado para encontrar um outro elemento dado.

Por exemplo:

a)  +  =  pois: dois furos + um furo = zero furos.

azul azul azul

falte um vértice + faltam 2 vértice = falta zero vértices

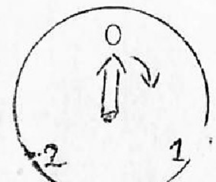
azul + azul = azul

(se o azul for o neutro)

Observe que estamos fazendo soma Módulo 3, isto é:

0 + 0 = 0
0 + 1 = 1 = 1 + 0
0 + 2 = 2 = 2 + 0
1 + 1 = 2
1 + 2 = 0 = 2 + 1
2 + 2 = 1 etc ...

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1



Então ao somarmos figuras estaremos somando ternos ordenados (a, b, c), onde a ∈ {0, 1, 2 4,} assim como também b , c.

A soma feita anteriormente com as figuras poderia adquirir a fo forma.

(2, 1, 0)+(1, 2, 0 = (0, 0, 0), onde as 1as coordenadas representam nºs de furos do trimath, as 2as representam formas e as 3as representam cores.

Poderíamos também associar a esses ternos ordenados os conjuntos de bonecas, cubos e caixas, pois temos em cada placa de duratex

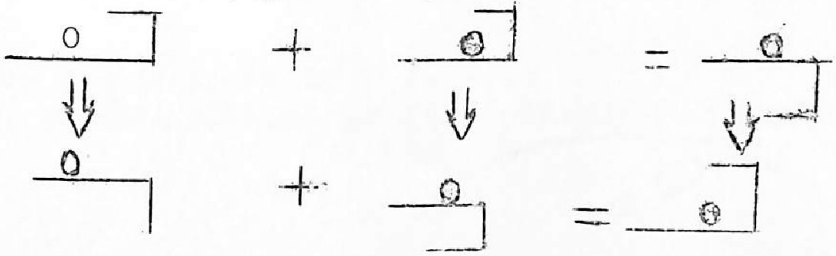
0,1 ou 2 bonecas;
0,1 ou 2 cubos;
0, 1 ou 2 caixas.

Estabelecemos assim isomorfismos.

O inverso de 2 bonecas, 1 cubo e zero caixas seria : 1bone 1 boneca, 2 cubos e zero caixas.

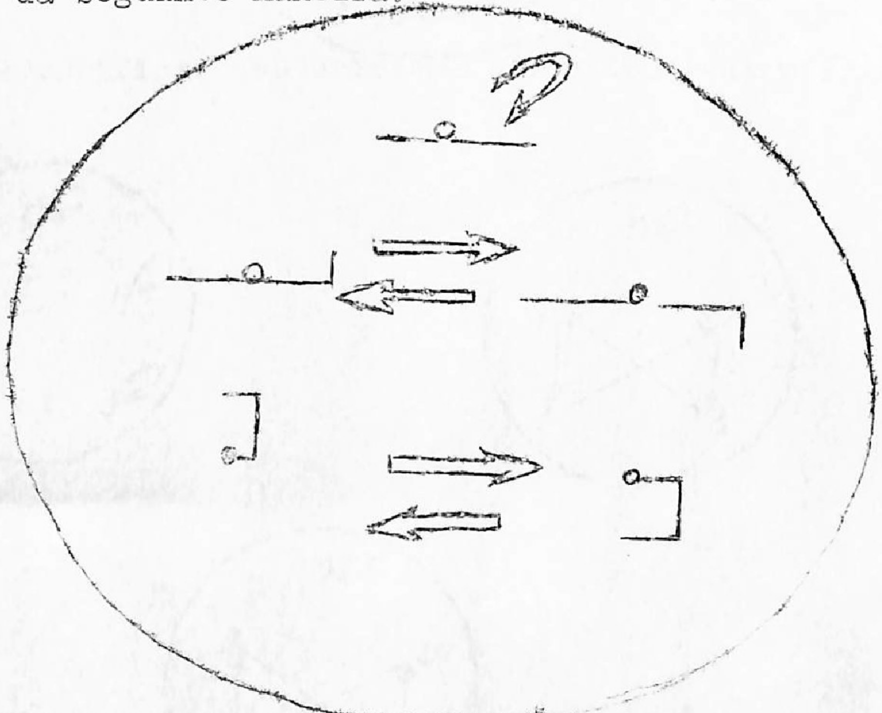
4. Automorfismo do grupo aditivo a 5 elementos.

A partir de certas somas, estas devem ser transformadas em outras adições corretas, por exemplo:



poderá ser transformada em:

Sobre a mesa havia flechas de cartolina que deveriam indicar a transformação. Assim, por exemplo, a transformação que fizemos anteriormente (que é tomar o inverso), seria representada num gráfico colocando do as flechas da seguinte maneira:



Poderemos, para facilitar a escrita representar:

 por 0

 por 1    por 4

 por 2

 por 3

Assim vemos, por exemplo que

1 + 2 = 3

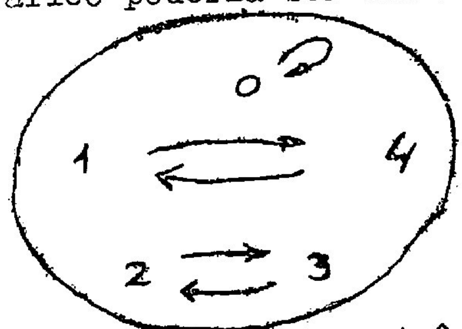
2 + 3 = 0   3 + 3 = 1

2 + 2 = 4 , etc..., istoé, estamos somando módulo 5.

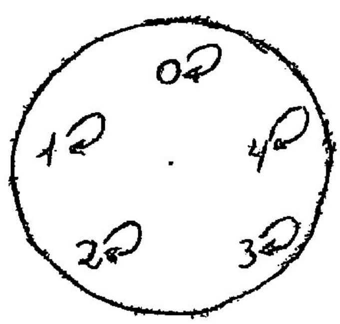
(É claro que se quiséssemos as posições dos dois braços teríamos pares ordenados e poderíamos arbitrar, por exemplo, que o braço direito to seria a 1a componente do par e o esquerdo a 2a e assim,

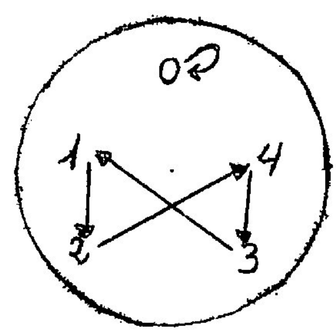
seria o par ordenado (2, 4).)

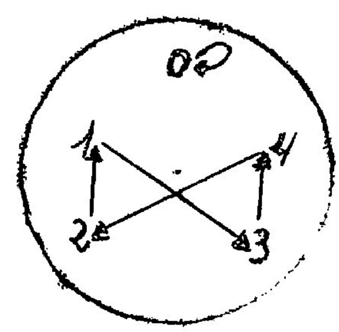
Então o último gráfico poderia ser assim representado:



É facil verificar que existem outros três automorfismos.







Ficam assim construídos os 4 automorfismos do grupo cíclico de 5 elementos $\{0,1,2,3,4\}$

(seria interessante ao leitor que notou o trabalho das 3 meninas re refazer todo o trabalho, istoé: construir o grupo de 25 elementos, construir os subgrupos de 5 elementos e achar a lei geradora dos automorfismos)

É claro que as crianças trabalharam somente com as figuras das posições dos braços, introduzimos aqui os números para facilidade de notação.

Após a obtenção destas transformações, iremos passar à consideração do espaço vetorial de 25 elementos definidos pelos 25 pares de posição dos braços e pela lei da soma aprendida anteriormente e com os automorfismos que as crianças descubram, poderemos utilizar os últimos como escalares do espaço vetorial.

Lab- Matemática
I.E.

GRUPO DE ESTUDOS SOBRE O ENSINO DA MATEMÁTICA
CURSO DO PROFESSOR DIENES

G 1

GEEMPA

BANRISUL

ENCONTRO DO DIA 5 DE AGOSTO DE 1972

2a MENSAGEM:

O atual trabalho do Professor Dienes não visa ensinar Matemática aos professores, mas demonstrar como é possível ensinar Matemática às crianças.

Os jogos como os que foram apresentados aos colegas podem ser organizados para qualquer conteúdo. A Matemática é tão vasta que é impossível mostrar neste curso a técnica de desenvolvimento de jogos em todos os conteúdos. Na construção das estruturas de Grupo, Corpo e Espaço Vetorial, o professor introduziu o estudo da Adição e Multiplicação no conjunto dos inteiros ($\mathbb{Z}$), conteúdo tradicional do ginásio, para crianças de 7, 8 e 9 anos, e Lógica, Vetores e Produto por Escalar; conteúdos do 2º grau no Colegial tradicional para crianças de 8,9, 10,e 11 anos. Foi uma demonstração concreta do princípio também defen fendido por Jerome Bruner (" Uma Nova Teoria Da Aprendizagem")- É possível ensinar qualquer coisa a qualquer criança, desde que se encontre a maneira intelectual honesta para fazê-lo".

O critério do GEEMPA para organizar as turmas de alunos foi de que estivessem estudando inglês ou francês, mas as crianças que se inscreveram não tinham suficiente domínio para se comunicar nessas linguas.

Foi necessário um tradutor intermediário.

Além disso o material construído pela equipe de audio-visual para atender às dimensões do ambiente e exigências de visibilidade ao longe, foi grande demais para muitas crianças do grupo. Dificultava a percepção da situação estimuladora organizada como um todo.

Os alunos, de escolas diferentes, trazem experiências anteriores diferenciadas, uns já haviam estudado Matemática Reformulada, outros não. Houve movimentação e vozerio constante. Evidentemente não era um ambiente de sala da aula.

Mas as crianças, sem nenhum preparo prévio, apenas rápidos contatos com o professor para sondagem sobre seu nível de estágio operatório mantiveram-se motivadas, empenhadas na busca de soluções para os problemas, desenvolvendo seu pensamento de maneira progressiva e operando em níveis cada vez mais abstratos, a partir da comparação dos jogos:

Em Lógica operaram de maneira a evidenciar que, ao resolver situações com três caminhos, cresceram no sentido de considerar que os dois primeiros conjuntos podem ser as duas premissas de um raciocínio e o terceiro conjunto a conclusão dessas 2 premissas.

A estrutura dos complementares já estava adquirida e algumas das crianças notaram algumas regularidades na estrutura das rêdes lógicas que explicaram durante os jogos.

No Espaço Vetorial as crianças também compreenderam os problemas. Foram capazes de adicionar e encontrar os inversos. A idéia de encontrar a soma dos múltiplos também foi bem compreendida e está evidente na última construção de Trimath.

Ao arrumar todos os elementos do jogo a partir de um certo conjunto inicial, as crianças experimentaram partir de 1 figura inicial adicionando seu inverso, tentaram também com duas.

Uma vez que se convenceram que era possível partir de um conjunto com 3 figuras iniciais, descobriram que há exatamente 3 dimensões no Espaço Vetorial.

As pequeninas que operaram com as posições dos braços, comparando com conjunto de figuras coloridas, foram capazes de encontrar os automorfismos dos jogos cíclicos a 5 elementos.

Podemos dizer que uma criança aprendeu Matemática, não porque deu a resposta certa, mas porque foi capaz de procurar soluções para o problema.

Registramos para reflexão de todos a resposta que o Professor deu a esta pergunta :

Pergunta: - "Como introduzir um assunto novo em classes de alunos maiores que não se interessam tanto pelos jogos?"

Resposta: -" É uma questão de vender as idéias para as crianças. Se os senhores tiverem uma fábrica de carros farão o possível para convencer os clientes a comprar os seus carros. Mas se os senhores forem professores no ensino tradicional não têm nenhuma razão para vender seus " carros" porque há uma Lei que obriga as crianças a comprá-los.

Seria boa idéia acabar com a obrigatoriedade escolar e pagar os professores pelo número de crianças que assistem às suas aulas! "

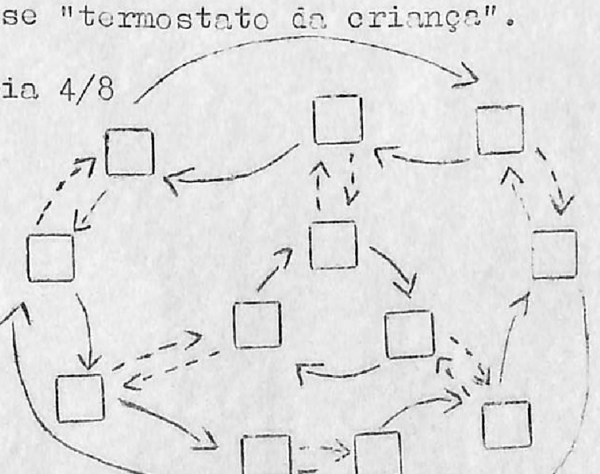
O professor tem nos repetido que não se deve colocar tudo pronto nos livros para que os professores não comecem a usá-los como se faz com os livros didáticos de Matemática no ensino tradicional.

As fichas de trabalho que ele apresenta só poderão ser usadas com proveito na quarta etapa, tendo sido desenvolvidas a primeira, segunda e terceira em atividades concretas.

Os professores precisam empenhar-se em liberar e usar seu potencial de criatividade .

ERRATA: F 3 do dia 3/8: Na linha -8, onde se lê"termostato da cor" leia-se "termostato da criança".

Dia 4/8



ao invés do diagrama que constava na folha.

Além disso, a seta da penúltima linha é contínua, como também a la seta da 2a folha: ⟶

ESPECIALIZAÇÃO
IMAGINAÇÃO EXPERIÊNCIA

Comunicação audiovisual é com o RCR Studio

Gente que já curtiu muitas por estar metida neste negócio, mas como o negócio é este mesmo, resolveram melhor estruturar o seu contexto e oferecer seus serviços a todos quantos dele possam precisar.

Materiais para exposições

Ilustrações para relatórios

Materiais visuais para promoções

Materiais para ensino e treinamento

Transparências para conferências

Slides em todas as cores e tipos

Mil coisas ainda não conhecidas em nossa comunidade...

Venha falar com o pessoal do RCR

Osvaldo Aranha 1092 ap. 9

ou ainda pelos tel. 24 93 00
25 84 47
25 05 07

Lab Matemática
I.E.

GRUPO DE ESTUDOS SOBRE O ENSINO DA MATEMÁTICA
CURSO DO PROFESSOR DIENÉS
GEEMPA BANRISUL
ENCONTROS DOS DIAS 7, 8 E 9 DE AGOSTO DE 1972.

Ambiente 1. Transformação de um sistema de Coordenadas - Introdução aos Inteiros Complexos (Números da forma $a+bi$, onde $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$ e i é tal que $i^2 = -1$).

Objetivos: Transformar as informações" "brancas" em informações "vermelhas" e vice-versa.

1a Atividade:

Fazendo um deslocamento de acordo com a rede branca (contínua) (3 E, 2 N).

Como pode ser feito um trajeto do ponto de saída ao ponto de chegada seguindo somente os caminhos da rede vermelha (tracejada)?

Problema : "Após ter transformado os caminhos "brancos" em caminhos " "vermelhos" determinar a Lei de Transformação."

Informações: (3 E, 2 N) ---→ (1E, 1 N)

OBSERVAÇÕES DO PROFESSOR:

No 1º dia os alunos acumularam evidências. Levaram tempo para aprender como registrar essas evidências.

Esta é uma parte importante de uma pesquiza científica: as crianças observam os fenômenos e são obrigadas a registrá-los porque não poderão lembrá-los. Assim, com evidências acumuladas poderão chegar a uma regra que lhes permitirá prever o que acontecerá no futuro. É o processo de construção do modelo científico:

- Vivência
- Observação
- Registro das observações
- Correlação de dados
- Procura do modelo
- Verificação do modelo
- Aplicação do modelo para a Previsão.

"Sendo dada alguma informação branca, sem olhar o diagrama, encontrar a informação vermelha (tracejada)".

Vivência e observação são feitas pela criança à medida que as mesmas " passeiam" livremente sobre os caminhos e apercebem-se de determinadas regularidades e restrições.

Registro das observações:

1 N ⟶ (2N , 1W)

1 S ⟶ (2S , 1E)

1 E ⟶ (1E , 1S)

1 W ⟶ (1W, 1N)

2 N ⟶ (2W, 4N)

3 E ⟶ (3E , 3S)

(3E, 2N) ⟶ (3E , 3S) + (2W ,4N) = (1E , 1N)

Se quiséssemos passar do caminho tracejado (vermelho) para o contínuo (branco), procederíamos da mesma maneira:

1N ⟶ (1N,1E)

1E ⟶ (1N,2E)

(2E , 1S) ⟶ (3E, 1N), etc...

(Podemos chegar à generalização armando um sistema de duas equações lineares a duas variáveis e concluímos que:

(a ,b) ⟶ (a - b, 2b - a). Em vez de darmos a notação dos pontos cardeais, podemos usar $^{+}2$ ao invés de 2E ou 2N

$^{-}3$ ao invés de 3W ou 3S.

Assim por exemplo,

($^{+}3$, $^{+}1$) ⟶ ($^{+}2$, $^{-}1$) indica que o deslocamento (3E, 1N) é transformado no deslocamento (2E , 1S), levando ainda em consideração que a primeira coordenada do par ordenado refere-se à direção e EW e a segunda à direção NS (não confundir qaqui direção com sentido).

Fica a critério do leitor fazer a verificação do modelo, isto é, verificar se

($^{+}3$,$^{+}1$) ⟶ $^{+}2$,$^{-}1$) satifaz à lei de transformação

(a,b) ⟶ (a- b, 2b -a), assim como outras transformações numéricas).

Quando as crianças começam a jogar nesta rede talvez não se dên conta que se trata de equação linear simultanea.

Temos aqui o núcleo do estudo da matriz porque transformamos um deslocamento em um sistema de coordenadas em outro deslocamento noutro sistema de coordenadas.

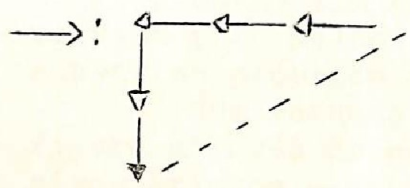
Poderíamos considerar a Transformação de um ponto de vista diferente: um caminho seria deformado em outro caminho - os quadrados brancos □ seriam transformados em paralelogramos vermelhos que são formados pelo conjunto de linhas paralelas.

Ambiente 2 -

Problema muito semelhante ao anterior. Só que as redes são traçadas com linhas diferentes.

Aprender a resposta a um problema não é aprender a resolver toda <u>uma</u> espécies de problemas. Seria interessante que as crianças aprendessem a resolver não importa que problemas dessa natureza.

<u>Regras</u>:



Problema: Encontrar as relações existente entre as informações "verdes" e as "vermelhas".

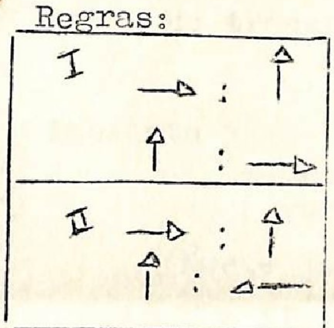
$(3, 1) \Longrightarrow (-1, -3)$

$(22, 1) \Longrightarrow (-1, -2\frac{1}{3})$

Ambiente 3. -

Aqui temos outras transformações possíveis cujas regras são dadas antes.

<u>Regras</u>:



Problemas: - "Escolher um ponto da figura que não vá trocar de posição e repetir as transformações: Quantas figuras poderá obter?

-"Combinar as funções I e II para obter outras. Quantas poderá encontrar?

OBSERVAÇÕES:

Neste jogo transforma-se uma figura em outra figura segundo uma regra ou outra.

Cada vez que uma pessoa faz um deslocamento para a direita, a pessoa correspondente faz o deslocamento para o alto, e inversamente, na primeira regra.

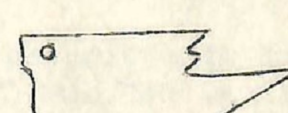
A segunda regra faz corresponder a um deslocamento para a direita um deslocamento para o alto, e a um para o alto faz corresponder um deslocamento para a esquerda.

Assim a segunda regra dá origem a uma rotação de $\frac{1}{4}$ de volta, enquanto a primeira dá origem a uma reflexão em relação à diagonal do quadrado.

Usando as transformações I e II pode-se obter todas as isometrias do quadrado.

Ambiente 4

O jogo aqui consistia em colocar a figura



por exemplo, numa região qualquer da rede.

A seguir, através de sucessivas reflexões (rebatimentos) conduzir aquela figura até uma outra igual a ela que fora previamente colocada numa outra região da rede.

Para tanto, as crianças dispunham de cordas coloridas que usariam à guisa de eixos de simetria que poderiam ser colocadas sobre os segmentos contínuos ou sobre os segmentos tracejados.

(Em verdade, esta foi uma restrição que fizemos para que fôssemos melhor compreedidos numa primeira explicação, pois tal restrição poderia ter sido relegada e o problema seria então mais amplo).

Já no fim do trabalho as crianças dispensaram as cordas (que serviam para melhor materializar os eixos de simetria) e passaram a usar os próprios "eixos" da rede para tal fim.

Num segundo momento - após as crianças terem chegado à ultima figura através de sucessivos rebatimentos da primeira em relação a eixos criados - o professor solicitou que se procurasse o número mínimo de reflexões (rebatimentos) para chegar da primeira à última figura.

Após o término da aula, as crianças permaneceram jogando, e, na falta das figuras de cartolina, usaram cadeiras deitadas e fizeram os rebatimentos.

Provavelmente hoje o professor peça que os alunos façam outros tipos de transformação com as figuras.

Ambiente 5

-Jogo das Rotações do Tetraedro
(ver errata do diagrama)

Neste jogo 3 X 2 X 2 nós encontramos dois tipos de flechas:

a flecha ⟶ que faz o ciclo a 3
a flecha - - - -→ que faz o ciclo a 2

Problema:-"Encontrar uma relação entre o modelo (tetraedro construído em cartolina) e o gráfico que está no chão.

Ambiente 6.

-Jogo das 12 cadeiras.-

Há um tetraedro marcado com 12 figuras coloridas (BL) diferentes. As mesmas figuras serão distribuidas nas cadeiras.

Aqui não se terá a ajuda das flechas, mas foram traçados 4 triângulos e cada uma das cadeiras é colocada sobre um dos lados de cada triângulo. Estas são todas as informações disponíveis.

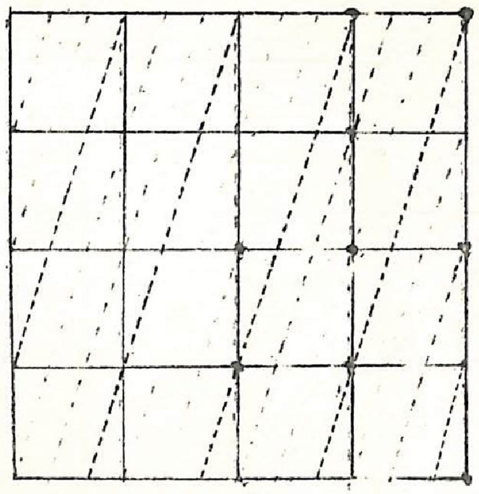
Problema:- "Encontrar relações entre as rotações do tetraedro e a maneira como dispuserem as figuras sobre as cadeiras."

Ambiente

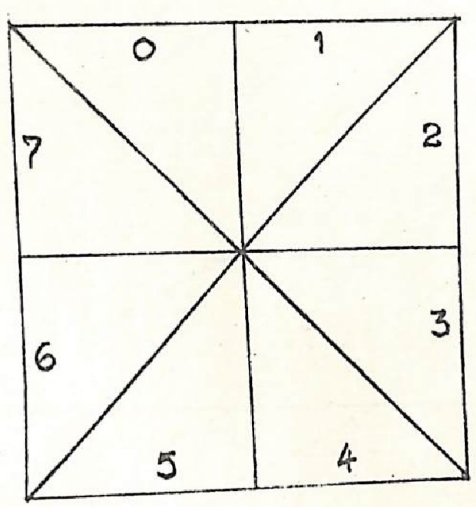
- Jogo das 3 refeições.

Para comparação dos jogos e análise das propriedades da representação destes jogos ver DIENES, 2- APRENDIZADO MODERNO DA MATEMÁTICA - ED. ZAHAR

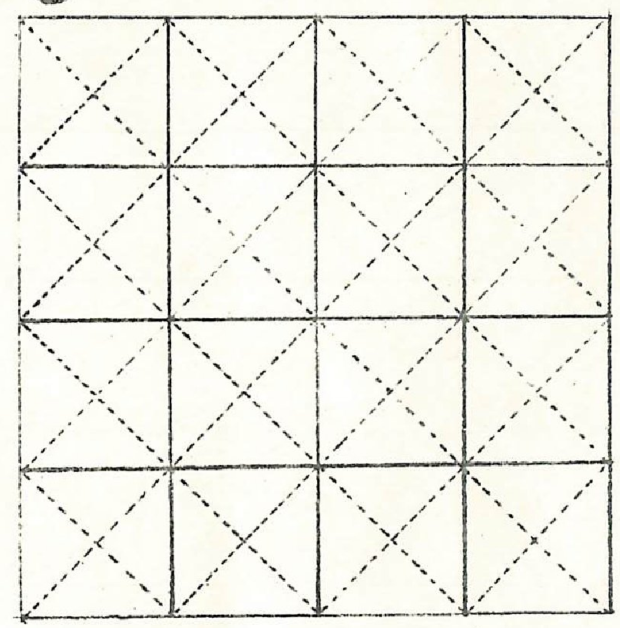
2



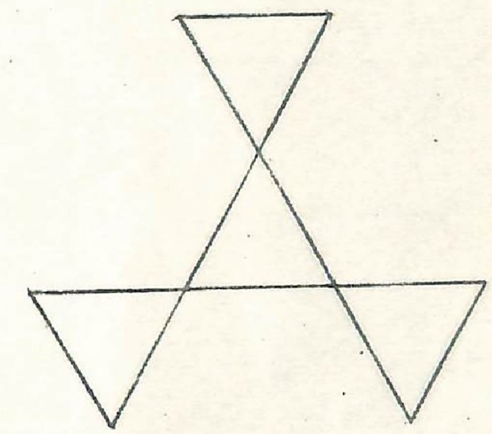
3



4



6



CURSO DIENES

GEEMPA - BANRISUL

H1