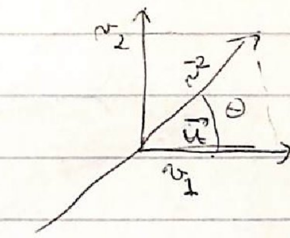
$\vec{v}_1 \parallel \vec{u}$ $\quad$ $\vec{v}_1 = \left(\vec{v} \cdot \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}\right) \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$ $\quad$ v



$\vec{v}_2 \perp \vec{v}_1$

v_2

SUGESTÕES DE ATIVIDADES PARA O ESTUDO DE NÚMEROS RACIONAIS

Neuza Mª

1 - Apresentação e Objetivos Gerais

O objetivo inicial do trabalho do grupo, em 1982, era preparar um estudo sobre o conteúdo programático de Matemática da 6ª série do 1º grau, que pudesse amenizar as dificuldades de aprendizagem apresentadas em alguns de seus tópicos. Estas dificuldades, acentuadas nas escolas da rede oficial, são decorrentes de falta de continuidade na aplicação dos programas, falta de base dos alunos, precariedade de material didático nas escolas, baixo poder aquisitivo dos alunos, insuficiência de carga horária, número deficiente de professores, falta de oportunidade para que os mesmos se reciclem e falta de motivação dos professores para à preparação de aulas e de material didático.

Levando em conta os aspectos mencionados acima, começamos a elaborar este trabalho visando melhor compreensão e fixação do conteúdo, dentro do tempo disponível através de material didático simples e de fácil aquisição.

Dentro desse espírito, optamos por apresentar os assuntos sempre partindo de um problema concreto, estimulando desta forma a participação do aluno a fim de que, o mesmo, ao tentar resolvê-lo, formasse conceitos matemáticos que depois pudessem ser aplicados em situações idênticas ou análogas.

Em 1983, começamos a divulgar o trabalho, elaborado em 1982, em alguns Distritos Educacionais do Município do Rio de Janeiro e, paralelamente, demos continuidade à sua elaboração. Já temos notícia de que o trabalho está sendo aplicado por professores da rede municipal com boa aceitação.

2 - Avaliação e comparação de livros didáticos

Observando alguns livros didáticos de 6ª série, concluímos que a apresentação do conjunto dos números inteiros* (Z) e dos conjuntos dos números racionais* (Q) é, em muitos livros, essencialmente descritiva, dando todas as definições e resultados prontos.

Por outro lado, mesmo que o livro utilizado preencha os requisitos necessários para ser didaticamente bom, esbarra ainda em dois problemas básicos:

— o aluno não está preparado para utilizá-lo adequadamente, quer por má formação de hábitos de leitura e interpretação, quer por falta de maturidade;

— o mau emprego didático, por parte do professor, que muitas vezes se restringe totalmente ao livro em suas aulas, ao invés de utilizá-lo como um recurso para sistematizar as conclusões dos assuntos já abordados em sala.

3 - Avaliação do programa e da metodologia da 6ª série aplicada nas escolas oficiais

O programa da 6ª série das escolas municipais é o seguinte:

— Conjunto Z: reta numerada, módulo e oposto, relação de ordem, operações em Z;

— Conjunto Q: fechamento em Z, ampliação de Z, subconjuntos de Q, reta numerada, módulo, elemento inverso, relação de ordem. Operações em Q;

— Equações, sistemas, inequações: resolução e problemas;

— Razões e Proporções: conceituação, elementos, leitura, razões equivalentes, proporções e suas propriedades, divisão em partes proporcionais;

— Regra de três, Juros e Porcentagem.

(*) Encontra-se ainda a terminologia de inteiros relativos e racionais relativos em alguns livros.

A partir da análise do programa acima, concluímos:

— A 5ª série é extremamente importante para o bom desenvolvimento da 6ª série. Usa-se, na 6ª série, um conceito novo, o de números relativos, cujo desenvolvimento depende da parte operatória já desenvolvida na 5ª série.

— Os itens do programa da 6ª série são dados como partes isoladas. Entretanto são assuntos muito integrados.

— Razões, proporções, números proporcionais, juros, porcentagem, regra de três, apesar de sua importância, de um modo geral, não vem sendo dados devido à insuficiente carga horária.

— Os objetivos primordiais da 6ª série são operar bem com os números racionais e resolver equações do 1º grau.

Em decorrência das conclusões acima foi colocada a seguinte proposta:

Como apresentar, de maneira integrada e mais criativa, o programa de 6ª série?

4 - Proposta de trabalho

Após observarmos o calendário do ano letivo de 1982 verificou-se que, a partir do início do 2º semestre, os professores estariam trabalhando, em suas turmas, com o conjunto dos números racionais. Para que o trabalho pudesse ser aplicado em sala de aula, ainda neste ano letivo, demos maior atenção a este conjunto.

Visando à continuidade e integração entre os assuntos, optou-se também por fazer um estudo, em linhas gerais, do conjunto dos números inteiros, baseado em experiências de elementos do grupo. Este estudo foi aprimorado e redigido em 1983.

Convém porém observar que as idéias aqui expostas e desenvolvidas já apareceram em alguns livros didáticos, e já foram aplicadas por muitos professores. Sua inclusão aqui visa torná-las vivas no dia-a-dia da sala de aula, para colocar em prática a preocupação constante de que a introdução de qualquer conceito novo, sempre que possível, deve ser feita a partir da vivência dos alunos.

CONJUNTO DOS NÚMEROS INTEIROS - Z

I - Objetivos

— Mostrar a necessidade do uso dos sinais + e - nos números como indicadores de situações opostas.

— Introduzir o conjunto dos números inteiros.

— Representar os números inteiros na reta numerada.

— Conceituar módulo ou valor absoluto de um número inteiro e números simétricos ou opostos.

— Operar com números inteiros.

Observações:

1) O professor não deve entender que este trabalho se tra[illegible] uma aula pronta, mas, sim, de sugestões de atividades que deverão ser analisadas anteriormente e adaptadas às necessidades de cada turma.

2) Após um estudo sobre o conjunto dos números inteiros, chegou-se à conclusão de que seria mais importante utilizar mais tempo na conceituação e identificação deste novo conjunto numérico, reconhecendo situações que sejam distinguidas através do uso dos sinais (+) e (-), do que estudar com detalhes os subconjuntos de Z tais como: Z_+, Z_-, Z^*, Z_+^*, Z_-^*, que atualmente ocupam grande número de aulas.

II - Introdução do Conjunto Z

O professor, com a participação dos alunos, deverá construir no quadro de giz uma tabela de um campeonato esportivo. Preencher esta tabela gradativamente segundo as etapas abaixo:

1ª) Completar a primeira coluna com os nomes das equipes participantes.

2ª) Completar a segunda e a terceira colunas com o número de pontos ganhos ou perdidos em cada turno ou rodada, fazendo uso das palavras "ganhos" e "perdidos".

Nesta etapa o professor deverá ter o cuidado de escolher números tais que conduzam a uma situação final que tenha, pelo menos, dois resultados simétricos e um nulo.

3ª) Completar a quarta coluna perguntando aos alunos qual a situação final de cada time, ainda usando as palavras "ganhos " e "perdidos".

4ª) Completar a quinta coluna com a quantidade de pontos de cada time (sem o uso de sinais).

Mostrar que apenas com os dados desta última coluna não seria possível dizer a classificação dos times.

Neste momento, observar que quantidades iguais podem caracterizar situações diferentes e com isto ressaltar a necessidade de diferenciar estas quantidades, o que pode ser feito com o uso dos sinais positivo e negativo.

5ª) Completar a sexta coluna com a representação matemática, isto é, colocando nas quantidades de pontos os sinais adequados e observando que o zero não vem acompanhado de sinal, visto que não representa pontos ganhos nem pontos perdidos.

6ª) Completar a sétima coluna com a classificação dos times.

Exemplo de uma tabela construída com uma turma:

Times	1º turno	2º turno	Situação final	Quantidade de pontos	Representação matemática	Classificação
Flamengo	2 ganhos	4 perdidos	2 perdidos	2	- 2	4º
Botafogo	4 perdidos	4 ganhos	0	0	0	3º
Fluminense	1 perdido	2 perdidos	3 perdidos	3	- 3	5º
Vasco	2 ganhos	1 ganho	3 ganhos	3	+ 3	1º
América	3 perdidos	5 ganhos	2 ganhos	2	+ 2	2º

Neste momento, o professor poderá apresentar para a turma o conjunto dos números inteiros.

Observações:

1) O número de rodadas ficará a critério de cada professor;

2) O tipo de competição também poderá ser mudado atendendo à realidade do aluno como, por exemplo, competições internas, sabatinas, etc.

3) Ao construirmos a tabela deste trabalho não nos preocupamos em reproduzir as tabelas oficiais dos campeonatos de futebol.

III - A Reta Numerada

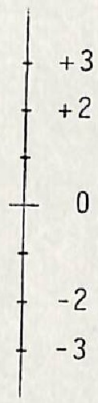
O professor deverá introduzir a reta numerada utilizando a tabela acima da seguinte maneira:

1º) Desenhar uma reta na posição vertical.

2º) Marcar um ponto como origem e acima e abaixo desta origem marcar pontos eqüidistantes.

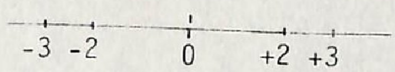
3º) Convencionar que a origem é o ponto zero e que acima da origem marcam-se os números positivos e abaixo os números negativos.

4º) Marcar nesta reta a representação matemática obtida na sexta coluna da tabela acima.



Observação:

Esta reta pode ser representada na posição horizontal.



IV - Módulo ou Valor Absoluto

Utilizando a quinta coluna da tabela, onde estão registrados apenas os pontos de cada time, sem levar em consideração se são ganhos ou perdidos, teremos o que chamamos de módulo ou valor absoluto, isto é, o módulo ou valor absoluto representa a quantidade, mas não identifica a situação.

O professor deverá dar a notação usual de módulo e fixar o conceito com exercícios.

Sugestão de exercício:

Duas pessoas estão paradas no degrau do meio de uma escada. Uma delas sobe três degraus e a outra desce três degraus. Pergunta-se:

1º) Como representar matematicamente a posição final de cada pessoa, considerando como origem o degrau de onde partiram?

2º) Quem se deslocou mais, quem subiu ou quem desceu?

Apesar dos movimentos de subida e descida serem opostos, o aluno responderá que o deslocamento (a distância entre a origem e a posição final) foi o mesmo. Explorar este fato, mostrando que o módulo, que representa o deslocamento, é igual apesar da representação matemática (+3 e -3) ser diferente.

V - Simétrico ou Oposto

Utilizando a reta numerada do item III, observamos que o +2 e o -2 estão localizados à igual distância da origem. Números deste tipo, que utilizam a mesma quantidade, ou seja, o mesmo módulo, mas que definem situações opostas, são chamados simétricos ou opostos.

Para fixar este conceito, o professor poderá voltar ao exemplo do item anterior, observando que os números que representam a situação final (+3 e -3) são simétricos ou opostos.

VI - Relação de Ordem

Utilizando as duas últimas colunas da tabela, introduzir a relação de ordem no conjunto dos números inteiros.

Observar a representação na reta da penúltima coluna da tabela. Explorar que os times com pontos positivos obtiveram melhor classificação do que os times com pontos negativos. Mostrar a posição do zero em relação aos números positivos e negativos e comparar ainda dois números inteiros de mesmo sinal.

VII - Soma algébrica de números inteiros

Induzir o aluno a encarar as parcelas de uma soma algébrica como sendo pontos obtidos em competições, isto é, as parcelas positivas representam pontos ganhos, as negativas pontos perdidos e o resultado o saldo final.

Exemplo:

— Calcular a soma algébrica $+16 -15 -5 +8 -3$

pontos ganhos $\longrightarrow +16 +8 = +24$

pontos perdidos $\longrightarrow -15 -5 -3 = -23$

saldo final $+24 -23 = +1$

Logo $+16 -15 -5 +8 -3 = +24 -23 = +1$

VIII - Multiplicação de números inteiros

Seguindo a mesma linha de raciocínio na tabela dos jogos, propor a seguinte situação: se um time, durante quatro rodadas, perdesse três pontos em cada uma delas, como calcular o saldo final?

$$-3 -3 -3 -3 = 4 \times (-3) = -12$$

Não foi possível criar uma situação concreta que justificasse o sinal do produto de dois números inteiros negativos.

Chegou-se a um exemplo que pode ser apresentado a alunos que tenham maior interesse e melhor domínio das propriedades operatórias:

$$[(-3) \times (-4)] + [3 \times (-4)] = \boxed{?} - 12$$

(pois $3 \times (-4) = (-4) + (-4) + (-4) = -12$)

Colocando (-4) em evidência:

$$(-4) \times [-3 + 3] = \boxed{?} - 12$$

$$(-4) \times 0 = \boxed{?} - 12$$

$$0 = \boxed{?} - 12 \Rightarrow \boxed{?} = +12$$

o que permitiria concluir a "misteriosa" regra que $(-) \times (-) = (+)$.

IX - Divisão de números inteiros

Normalmente, ao introduzir o conceito de divisão de números inteiros, preocupa-se apenas com a regra de sinais, considerando a divisão simplesmente como a operação inversa da multiplicação, esquecendo-se que a maioria dos alunos não tem domínio, muitas vezes, nem do conceito nem do algoritmo da divisão.

Por isto, antes de serem dadas as regras de sinais da divisão de números inteiros, pode ser feita uma sondagem cujo objetivo será medir o grau de conhecimento dos aspectos mencionados acima.

Daremos a seguir sugestões de problemas sem número, que nos permitirão verificar se os alunos distinguem uma situação onde deve ser usada a divisão, de outra em que deva ser utilizada a multiplicação, ficando a critério de cada professor a ampliação desta lista também com problemas numéricos.

Problema 1: Para comprar uma televisão e pagá-la em doze p[illegible]ações mensais iguais, o que devemos fazer para calcular o preço de cada prestação, se soubermos o seu preço total?

Problema 2: Sabendo-se o número de questões certas de um aluno em uma prova e que as questões são igualmente valorizadas, o que devemos fazer para calcular a nota do aluno nesta prova?

Problema 3: Um vendedor de peixes pescou e vendeu uma quantidade de peixes, recebendo uma determinada quantia pela venda. Sabendo-se que os peixes serão vendidos pelo mesmo preço, como poderemos calcular o preço de cada peixe?

Uma outra etapa consistiria em testar simplesmente a parte operatória, preparando, por exemplo, um teste em que as dificuldades surgissem gradativamente:

a) divisões exatas em que o divisor tenha um algarismo;

b) divisões exatas em que o divisor tenha um algarismo e o dividendo contenha o algarismo zero;

c) divisões com resto em que o divisor tenha um algarismo;

d) divisão por potência de dez;

e) divisão com o divisor contendo dois algarismos, etc...

É conveniente que o professor, ao efetuar estas sondagens e ao tentar sanar as dificuldades encontradas, não perca de vista o objetivo da 6ª série que, nesta etapa, é efetuar a divisão de números inteiros. Para acelerar o processo de revisão o professor poderá utilizar uma dinâmica diferente das usuais, tais como: trabalho diversificado, trabalho em grupo, campeonatos de resolução e elaboração de problemas sobre divisão, listas de exercícios para serem feitas em casa, atendendo às dificuldades específicas de alguns alunos, etc.

CONJUNTO DOS NÚMEROS RACIONAIS - Q

Objetivos:

- Introduzir o conjunto dos números racionais.
- Representar os números racionais na reta numerada.
- Concluir que entre dois inteiros consecutivos, existem infinitos números racionais.
- Identificar os números inteiros como elementos do conjunto Q.
- Perceber que existem frações eqüivalentes.
- Verificar a relação de ordem em Q.
- Determinar frações eqüivalentes.
- Identificar as diversas maneiras de representar o número racional.
- Efetuar operações com números racionais.

Material:

1. Para o aluno:

   1 tira vermelha - 4cm x 2cm
   1 tira azul - 8cm x 2cm
   2 tiras amarelas - 16cm x 2cm
   1 folha de papel almaço
   1 régua
   lápis preto
   canetas azul e vermelha

2. Para o professor:

   1 tira vermelha - 16cm x 8cm
   1 tira azul - 32cm x 8cm
   1 tira amarela - 64cm x 8cm
   giz colorido

Observações:

1) O professor não deve entender que este trabalho se trata de uma aula pronta, mas, sim, de sugestões de atividades que deverão ser analisadas anteriormente e adaptadas às necessidades de cada turma.

2) As tiras do professor são quatro vezes maior que as dos alunos de modo a permitir melhor visualização dos instrumentos com que o professor vai trabalhar.

3) No desenvolvimento das atividades caberá ao professor escolher a unidade de medida mais adequada, pois uma mesma tira estará representando diferentes unidades de medida.

Se a turma encontrar dificuldades neste tipo de abstração, o professor pode recordar que na vida prática existem várias unidades de medida.

INTRODUÇÃO DO CONJUNTO Q

1. Lembrar aos alunos as diversas maneiras de representar uma divisão:

$$a \div b \quad , \quad a : b \quad , \quad a \underline{|b} \quad , \quad \frac{a}{b}$$

Trabalhar, daí em diante, apenas com a última representação acima.

2. <u>Atividades a serem desenvolvidas</u>

<u>Primeira atividade:</u>

<u>Objetivo</u>: Localizar os números inteiros na reta numerada ressaltando o conceito de divisão.

Nesta atividade a tira amarela representará 4 unidades de medida, a azul 2 unidades de medida e a vermelha 1 unidade de medida.

Com a folha de papel almaço aberta, o aluno deverá executar as seguintes etapas:

- Traçar uma reta com a origem na dobra do papel.
- Colocar a tira amarela em cima da reta, a partir da origem para a direita e marcar o número +4.
- Repetir o mesmo procedimento para a esquerda e marcar o número -4, isto é, o simétrico de +4.

-4 0 +4

- Repetir o procedimento acima para marcar +2, -2, +1 e -1 utilizando as outras duas tiras na mesma reta.

-4 -2 -1 0 +1 +2 +4

- Dobrar a tira amarela ao meio e marcar na reta a partir da origem nos dois sentidos os resultados obtidos nesta divisão.

O professor, neste momento, deverá perguntar ao aluno:

— Quanto deu a metade de 4?

— Se você não tivesse a tira, que operação você teria feito?

Diante da resposta do aluno, o professor deve aproveitar esta oportunidade para enfatizar que o número 4 dividido por 2 pode ser escrito $\frac{4}{2}$.

- Agora dobrar a tira azul ao meio e marcar na reta a partir da origem, nos dois sentidos, os resultados obtidos nesta divisão.

Lembrar que $\frac{2}{2} = 1$.

- Repetir o mesmo procedimento com a tira vermelha.

Perguntar ao aluno como representaria numericamente a metade de 1. Espera-se que a resposta seja $\frac{1}{2}$.

Observação:

Dependendo da turma podemos falar em números decimais, isto é, se os alunos quiserem efetuar a divisão e souberem:

$$1 \,\underline{|\,2\,}$$
$$\quad 0{,}5$$

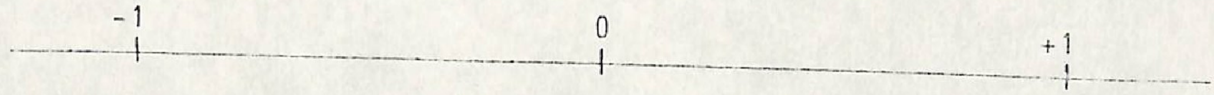
Segunda atividade:

Objetivo: Levar o aluno a concluir que entre dois inteiros consecutivos existem infinitos racionais.

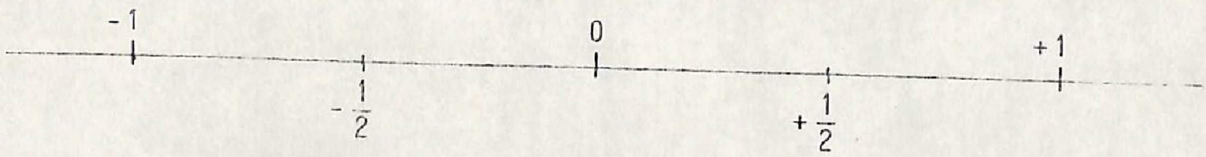
Nesta atividade vamos utilizar duas tiras amarelas, cada qual representando uma unidade de medida. No verso da folha de papel almaço, o aluno deverá executar as seguintes etapas:

1) Traçar, na primeira linha, uma reta com a origem na dobra do papel.

- Usar uma das tiras para marcar na reta $+1$ e -1, sempre a partir da origem.



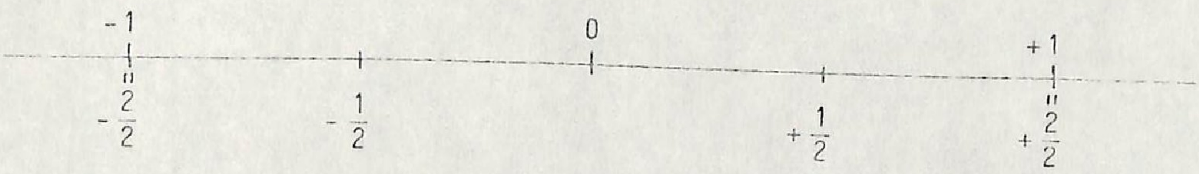
- Dobrar esta tira ao meio e marcar $+\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{2}$ com lápis preto.



Perguntar ao aluno:

— Se você juntar uma metade desta tira à outra metade da mesma, quanto dá?

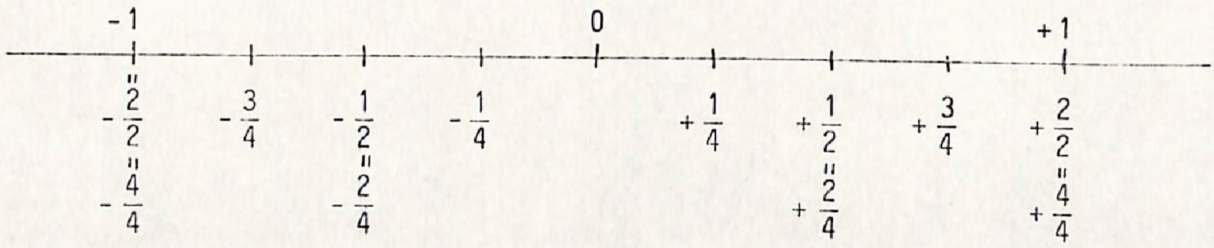
Conforme a resposta da turma, explorar bem o fato de que duas metades valem um inteiro, isto é, $\frac{2}{2} = 1$; marcar na mesma reta $+\frac{2}{2}$ e $-\frac{2}{2}$.



- Dobrar a mesma tira em quatro partes iguais e dizer ao aluno que cada parte chama-se quarto. Marcar esta partes na mesma reta com a caneta vermelha, ou seja, marcar

$$+\frac{1}{4}\ ,\ +\frac{2}{4}\ ,\ +\frac{3}{4}\ ,\ +\frac{4}{4}$$

$$\text{e}\quad -\frac{1}{4}\ ,\ -\frac{2}{4}\ ,\ -\frac{3}{4}\ ,\ -\frac{4}{4}$$



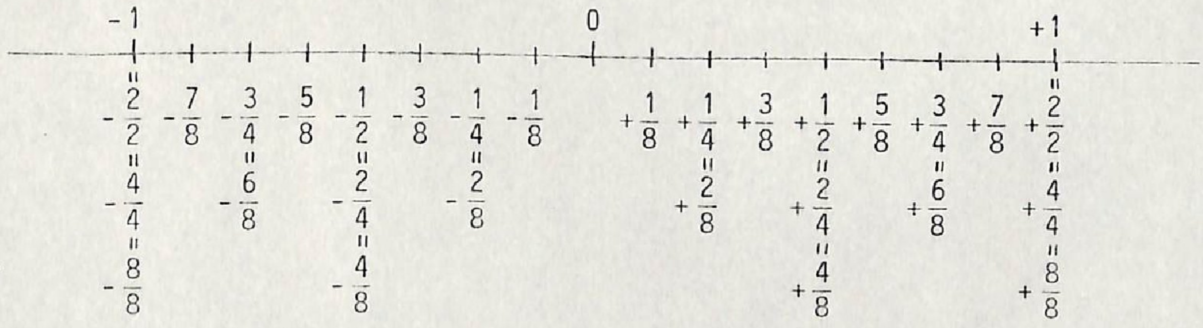
Observações:

a) Ressaltar novamente que se tomarmos os quatro quartos, isto é, quatro quartas partes teremos um inteiro.

b) Levar o aluno a observar que ele marcou $+\frac{2}{4}$ no mesmo lugar onde já estava $+\frac{1}{2}$ e, também que $-\frac{2}{4}$ foi marcado no mesmo lugar que $-\frac{1}{2}$.

• Dobrar a mesma tira em oito partes iguais e dizer ao aluno cada parte chama-se oitavo. Lembrar à turma que duas part das oito são $\frac{2}{8}$ (dois oitavos) e assim por diante até tomarmos oito oitavos voltando a unidade, isto é, $\frac{8}{8} = 1$.

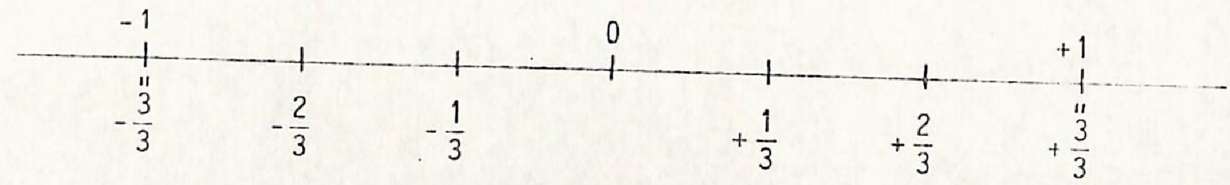
Marcar, com caneta azul, estes números e seus simétricos na mesma reta em que já estamos marcando os meios e os quartos,



2) Traçar uma segunda reta, logo abaixo da primeira, e utilizar a segunda tira amarela dobrando-a em três partes iguais. Dizer aos alunos que cada parte chama-se terço.

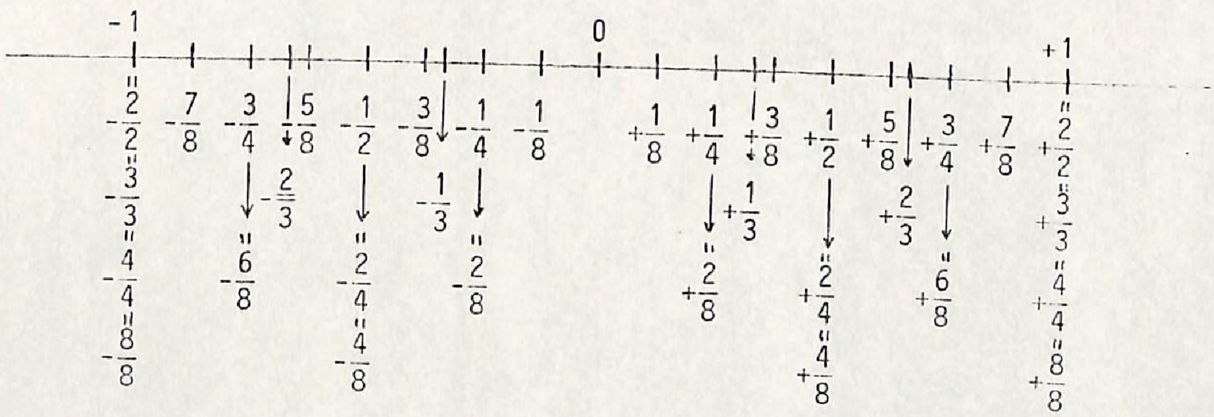
$$\frac{1}{3}\ ,\ \frac{2}{3}\ ,\ \frac{3}{3} = 1$$

• Marcar na reta estes números e seus simétricos.



O professor poderia agora utilizar a mesma tira para dividí-la em seis partes iguais, nove partes iguais, etc.

3) Traçar uma terceira reta e copiar nela todos os números marcados nas duas retas anteriores.



O professor pode também sugerir, oralmente, à turma outras divisões.

Este mesmo raciocínio deve ser explorado considerando outros inteiros consecutivos, por exemplo, +3 e +4, visto que a distância entre estes números é a mesma que entre 0 e +1, e portanto, deve-se apenas ter o cuidado de considerar o inteiro anterior acrescido das infinitas partes existentes entre 0 e +1.

Caso a turma não tenha conseguido concluir que entre dois inteiros consecutivos quaisquer existem infinitos racionais, o professor poderá utilizar outros recursos, como por exemplo:

• Traçar outra reta com a origem na dobra da folha de papel almaço ou no quadro de giz.

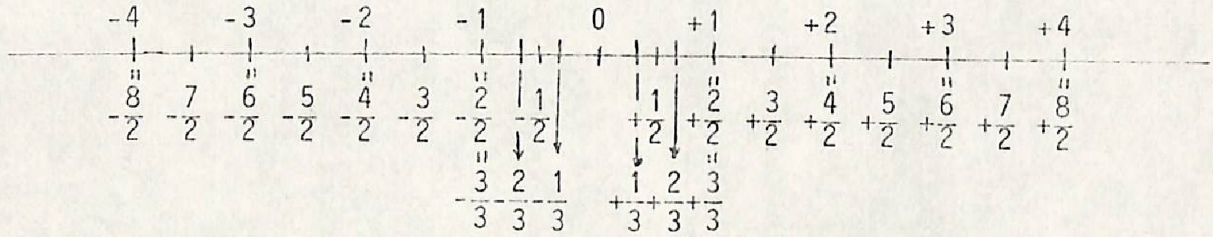
• Utilizar a tira vermelha representando uma unidade de medida.

- Marcar na reta +1, +2, +3 e +4 e seus simétricos.

- Dividir a tira mermelha em duas partes iguais e marcar todos os meios com a tira dobrada.

- Dividir a mesma tira em três partes iguais e marcar na reta os terços com a tira dobrada.

- Dividir a tira em quatro partes iguais e marcar na reta os quartos com a tira dobrada.



O professor deve verificar nesta etapa se os alunos já concluíram, de fato, que entre dois inteiros consecutivos quaisquer, existem infinitos racionais.

RELAÇÃO DE ORDEM E EQUIVALÊNCIA EM Q

1. Comparação de números racionais com sinais diferentes

Explorando a idéia de comparação utilizada no conjunto dos números inteiros, isto é, pontos ganhos (positivos) e pontos perdidos (negativos) e observando a localização dos números já marcados nas retas, poderemos concluir que todo número racional positivo é maior que qualquer número racional negativo.

Exemplos:

$$-1 < +1 \quad , \quad -\frac{2}{2} < +1 \quad , \quad -\frac{2}{2} < +\frac{1}{2} \quad , \quad -\frac{5}{4} < +\frac{1}{4}$$

$$-\frac{1}{4} < +\frac{1}{4} \quad , \quad +\frac{1}{4} > -\frac{1}{3} \quad , \quad +\frac{1}{8} > -\frac{1}{8} \quad , \quad -\frac{3}{2} < +\frac{2}{3}$$

2. Comparação de números racionais com o zero

Usando o mesmo raciocínio do item anterior, concluiremos que o zero é maior que qualquer número racional negativo e menor que qualquer número racional positivo.

Exemplos:

$$+\frac{1}{3} > 0 \quad , \quad -\frac{5}{8} < 0 \quad , \quad -\frac{5}{8} < 0 < +\frac{1}{3} \quad , \quad -\frac{3}{2} < 0 < +\frac{5}{4}$$

3. Comparação de números racionais de mesmo sinal

a) Números racionais positivos

Observando atentamente a localização dos números racionais positivos na reta concluiremos que:

$$+1 > +\frac{1}{2} \quad , \quad +\frac{2}{3} < +\frac{8}{8} \quad , \quad +\frac{1}{4} < +\frac{2}{3} < +\frac{3}{4} < +\frac{7}{8} < +\frac{2}{2} < +\frac{5}{2}$$

b) Números racionais negativos

Utilizando novamente a reta observaremos que:

$$-1 < -\frac{1}{2} \quad , \quad -\frac{2}{2} = -\frac{4}{4} \quad , \quad -\frac{3}{3} < -\frac{2}{3} < -\frac{1}{3} \quad , \quad -\frac{3}{2} < -\frac{4}{4} < -\frac{7}{8} < -\frac{2}{3} < -\frac{1}{2}$$

Sugestões:

a) Propor exercícios que os alunos possam resolver com o auxílio de retas numeradas.

b) Fixar com exercícios do tipo:

— Complete com os sinais $>$, $<$, $=$:

$+\frac{1}{4} \ldots \frac{1}{3}$ $\qquad$ $0 \ldots +\frac{1}{8}$ $\qquad$ $+\frac{1}{2} \ldots +\frac{2}{4}$

$0 \ldots -\frac{2}{3}$ $\qquad$ $+\frac{1}{4} \ldots +\frac{7}{8}$ $\qquad$ $-\frac{1}{9} \ldots -\frac{8}{9}$

— Coloque em ordem crescente os seguintes números racionais:

i) $+\frac{1}{4} \; , \; -\frac{5}{8} \; , \; 0 \; , \; -\frac{1}{4} \; , \; -\frac{2}{3}$

ii) $0 \; , \; -\frac{6}{6} \; , \; -\frac{3}{6} \; , \; -\frac{5}{6} \; , \; -\frac{2}{6} \; , \; -\frac{1}{6} \; , \; -\frac{4}{6}$

iii) $0 \; , \; +\frac{5}{3} \; , \; -\frac{7}{3} \; , \; +\frac{6}{3} \; , \; -\frac{9}{3} \; , \; -\frac{4}{3} \; , \; +\frac{1}{3}$

GENERALIZAÇÃO DA RELAÇÃO DE ORDEM

1. Comparação de números racionais com denominadores iguais

Utilizar duas tiras de comprimentos diferentes e dobrá-las na mesma quantidade de vezes, isto é, por exemplo, utilizar as tiras vermelha e azul e dobrá-las em três partes iguais. Identificar o racional correspondente a cada pedaço obtido e compará-los.

Usar exemplos de comparação de números racionais com mesmo denominador a fim de que os alunos concluam que a comparação é feita pelos numeradores levando em consideração os sinais.

Exemplos:

$$-\frac{2}{4} < -\frac{1}{4} \quad , \quad +\frac{1}{3} < +\frac{2}{3} \quad , \quad +\frac{1}{8} > -\frac{2}{8} \quad , \quad +\frac{5}{4} > +\frac{3}{4}$$

2. Comparação de números racionais com numeradores iguais e denominadores diferentes

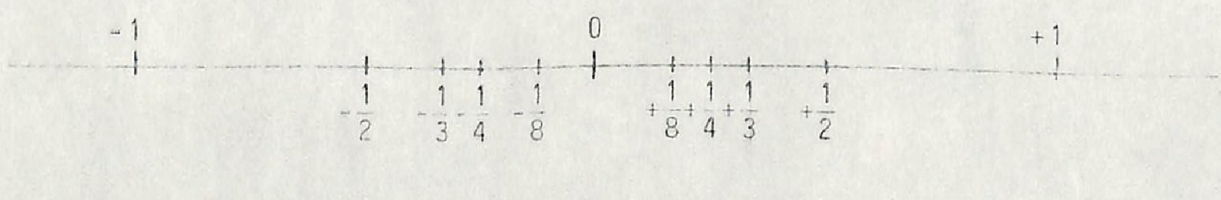
No caso da comparação de números racionais de mesmo sinal, com denominadores diferentes, poderemos começar com os de mesmo numerador.

Observaremos, então, que:

$$+\frac{1}{8} < +\frac{1}{4} < +\frac{1}{3} < +\frac{1}{2} \quad e \quad -\frac{1}{2} < -\frac{1}{3} < -\frac{1}{4} < -\frac{1}{8}$$

pois aumentando o denominador, o número de divisões efetuadas cresce e, portanto, o número racional diminui ou aumenta dependendo do seu sinal.

Representaremos este exemplo na reta para o aluno visualizar melhor.



3. Comparação de números racionais com numeradores e denominadores diferentes

Para compararmos estes números racionais torna-se necessário fixar o conceito de equivalência e levar o aluno a calcular números racionais equivalentes a números racionais dados.

Primeira etapa: Equivalência.

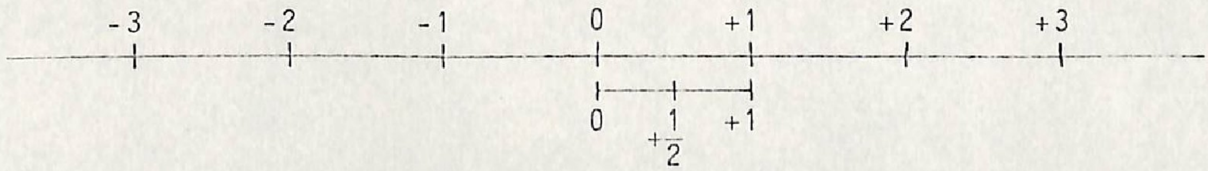
Material:

As três tiras vermelha, azul e amarela.

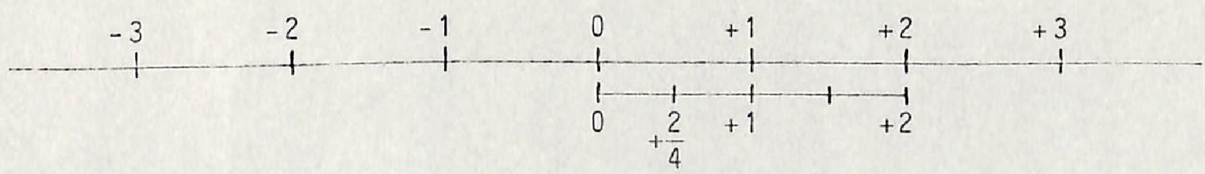
a) Sugestão para fixar o conceito de equivalência

Comparar $+\frac{1}{2}$ com $+\frac{2}{4}$ e $-\frac{1}{2}$ com $-\frac{2}{4}$.

Verificaremos onde está $+\frac{1}{2}$ na reta. Para isto, vamos dividir uma tira vermelha, representando uma unidade de medida, em duas partes iguais.

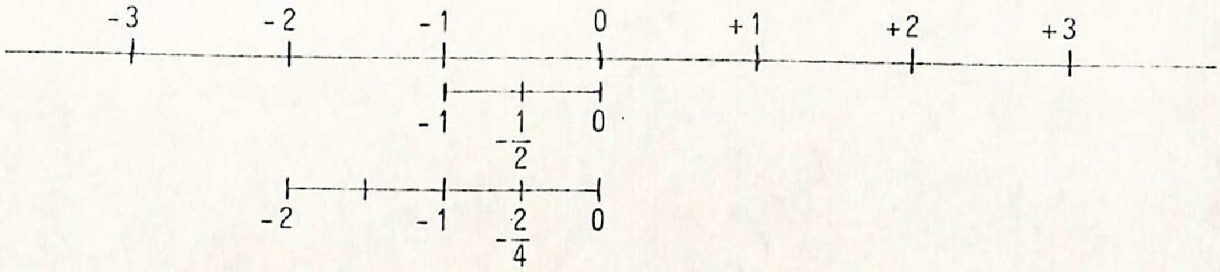


Agora, o mesmo para $+\frac{2}{4}$. Vamos pegar uma tira azul, representando duas unidades de medida e vamos dividi-la em quatro partes iguais.



Verificaremos que a localização destes números na reta numerada é a mesma, ou seja, $+\frac{1}{2}$ e $+\frac{2}{4}$ são números racionais equivalentes.

Repetir este mesmo procedimento à esquerda da origem para marcar $-\frac{1}{2}$ e $-\frac{2}{4}$.



Observar também que a localização de $-\frac{1}{2}$ e $-\frac{2}{4}$ é a mesma, isto é, estes números racionais também são equivalentes.

Poderemos concluir então que números racionais que localizam-se no mesmo ponto da reta numerada, embora representados de formas diferentes, chamam-se NÚMEROS RACIONAIS EQUIVALENTES.

$$+\frac{1}{2} = +\frac{2}{4} \quad , \quad -\frac{1}{2} = -\frac{2}{4}$$

Poderemos dar outros exemplos tais como:

Comparar $\pm\frac{1}{3}$ e $\pm\frac{2}{6}$; $\pm\frac{1}{4}$ e $\pm\frac{2}{8}$; $\pm\frac{1}{5}$ e $\pm\frac{2}{10}$; $\pm\frac{3}{2}$ e $\pm\frac{6}{4}$

Observação:

Todas as etapas a serem realizadas, daqui em diante, com números racionais positivos, deverão ser repetidas com números racionais negativos.

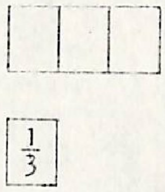
b) Sugestões para calcular números racionais equivalentes:

1ª) Encontrar números racionais equivalentes a $+\frac{2}{3}$ e $-\frac{2}{3}$.

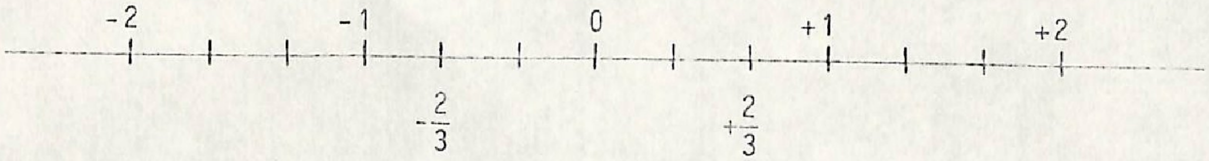
Vamos dobrar uma tira azul, representando duas unidades de medida, em três pedaços iguais. Cada parte ficará valendo $\frac{2}{3}$. Aqui $\frac{2}{3}$ é interpretado como sendo a terça parte de duas unidades de medida, isto é, $\frac{2}{3} = \left(\frac{1}{3} \text{ de } 2\right)$.

2 unidades de medida

Observar com os alunos que $\frac{2}{3}$ também pode ser interpretado como $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ onde dividimos 1 inteiro em três partes iguais.

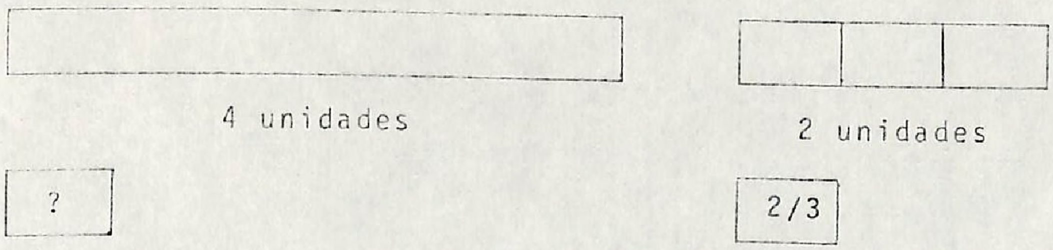


O aluno irá marcar na reta numerada, $+\frac{2}{3}$ e $-\frac{2}{3}$.



Vamos utilizar agora uma tira 2 vezes maior, isto é, uma tira amarela, representando quatro unidades de medida. Perguntaremos aos alunos:

— Se usarmos uma tira 2 vezes maior, quantas divisões ou dobras teremos que fazer, para que cada parte obtida seja igual à anterior (isto é $\frac{2}{3}$)?



Esperamos que os alunos respondam que devemos efetuar o dobro do número de divisões anteriores, isto é, 2 x 3 = 6.

Ou seja, $\frac{2}{3} = \frac{2 \times 2}{2 \times 3} = \frac{4}{6}$

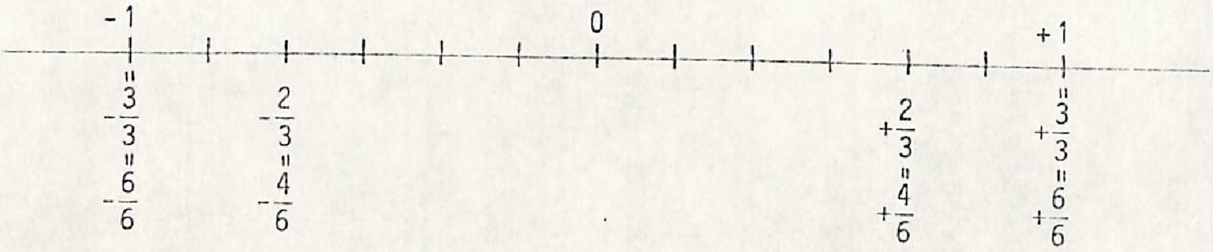
Logo: $+\frac{2}{3} = +\frac{4}{6}$

$-\frac{2}{3} = -\frac{4}{6}$

Pedir aos alunos que marquem na reta $\pm\frac{4}{6}$.

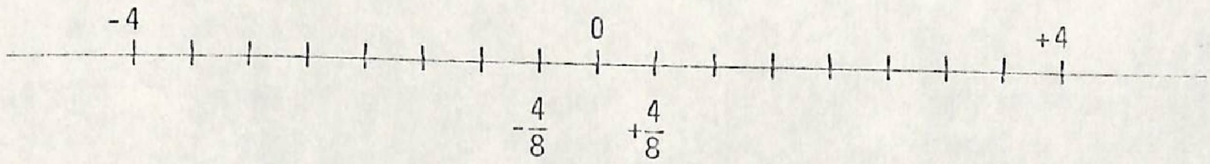
Verificaremos, então, que a localização destes números racionais na reta é a mesma, isto é, estes números racionais são equivalentes:

$$+\frac{2}{3} = +\frac{4}{6} \quad ; \quad -\frac{2}{3} = -\frac{4}{6}$$



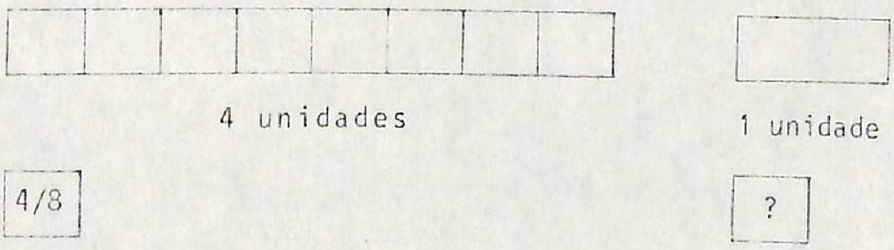
2ª) Encontrar números racionais equivalentes a $\pm\frac{4}{8}$.

Consideremos, a seguir, uma tira amarela, representando quatro unidades de medida, dividida em oito partes iguais. Marcar na reta $\pm\frac{4}{8}$.



Agora vamos usar uma tira 4 vezes menor, isto é, de uma unidade. Perguntaremos aos alunos:

— Em quantas partes devemos dividir esta tira, que é 4 vezes menor que a anterior, para obtermos os mesmos pontos na reta numerada?



Esperamos que o aluno responda que devemos dividir em apenas duas partes iguais pois a quarta parte de 8 é 2, isto é, $8 \div 4 = 2$ e a nova tira é a quarta parte da anterior ($4 \div 4 = 1$).

Ou seja, $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$, isto é, $\frac{4}{8} = \frac{4 \div 4}{8 \div 2} = \frac{1}{2}$.

Logo: $+\frac{4}{8} = +\frac{1}{2}$

$-\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$.

Se for necessário, dar mais alguns exemplos e concluir que:

> Para obter números racionais equivalentes, multiplicamos ou dividimos o numerador e o denominador por um mesmo número diferente de zero.

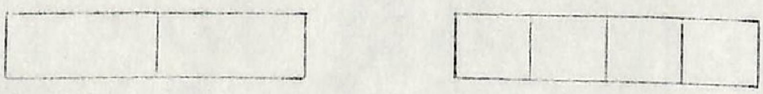
<u>Segunda etapa</u>: Comparação de números racionais com denominadores múltiplos.

Considerar outros exemplos de comparação, tais como:

a) $+\frac{1}{2}$ e $+\frac{3}{4}$ b) $-\frac{1}{2}$ e $+\frac{3}{4}$

Lembrar que é fácil comparar números racionais de mesmo denominador e que, sempre é possível encontrar números racionais equivalentes aos que foram dados que tenham denominadores iguais.

O que é maior, a metade de uma tira ou três quartos da mesma tira?



Vimos que $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$. Comparamos então $\frac{2}{4}$ com $\frac{3}{4}$ (em vez de $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4}$).

Logo: $+\frac{2}{4} < +\frac{3}{4}$, isto é, $+\frac{1}{2} < +\frac{3}{4}$.

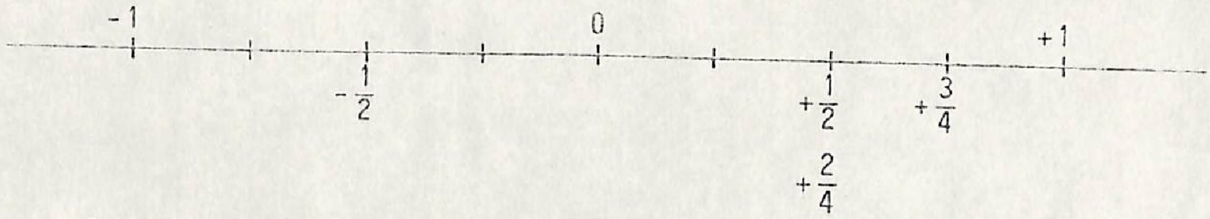
Perguntar ao aluno:

— Como vamos comparar $-\frac{1}{2}$ e $+\frac{3}{4}$?

Esperamos que o aluno lembre que números positivos são sempre maiores que números negativos, e conclua que:

$-\frac{1}{2} \quad +\frac{3}{4}$.

Estas comparações também podem ser verificadas na reta numerada:



É aconselhável dar outros exemplos, tais como:

— Compare os seguintes números racionais:

a) $\pm\frac{1}{3}$ e $\pm\frac{4}{6}$ b) $\pm\frac{2}{5}$ e $\pm\frac{3}{10}$ c) $\pm\frac{16}{4}$ e $\pm\frac{5}{2}$

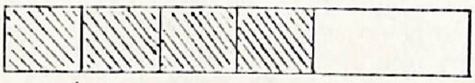
Nesses exemplos iniciais, os denominadores são múltiplos. O aluno tentará encontrar um número que multiplique o menor dos denominadores para igualá-lo ao outro.

Mas, como fazer para que esse número racional não se altere?

Devemos multiplicar o numerador e o denominador do número racional dado, pelo mesmo número, porque ao multiplicarmos o denominador por um determinado número teremos multiplicado o número de divisões do todo inicial, precisando, portanto, multiplicar também o numerador pelo mesmo número, para que o número racional obtido seja equivalente ao anterior.

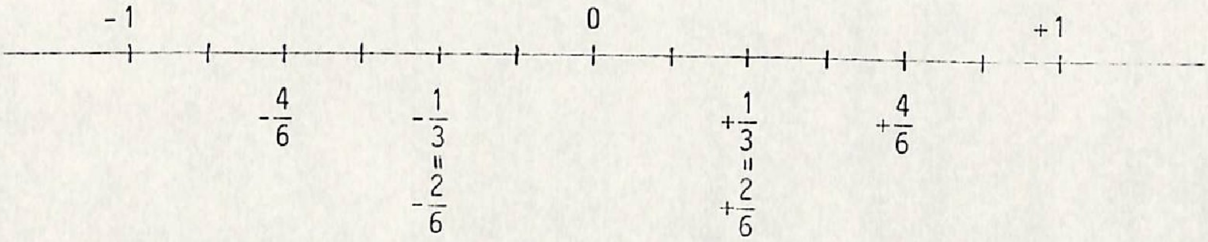
No caso do exemplo (a):

Figura 1  $\frac{1}{3}$

Figura 2  $\frac{4}{6}$

O pedaço retirado inicialmente (figura 1) foi subdividido em dois, representando, portanto, duas partes da nova divisão.

O aluno vai marcar na reta numerada estes números racionais e observará que:



$+\frac{1}{3} = +\frac{2}{6}$ $\qquad$ $-\frac{2}{6} < +\frac{1}{3}$

$-\frac{1}{3} = -\frac{2}{6}$ $\qquad$ $+\frac{1}{3} < +\frac{4}{6}$

$-\frac{4}{6} < -\frac{2}{6} < +\frac{2}{6} < +\frac{4}{6}$ $\qquad$ $-\frac{1}{3} > -\frac{4}{6}$, etc ...

<u>Terceira</u> <u>etapa</u>: Comparação quando os denominadores não são múltiplos.

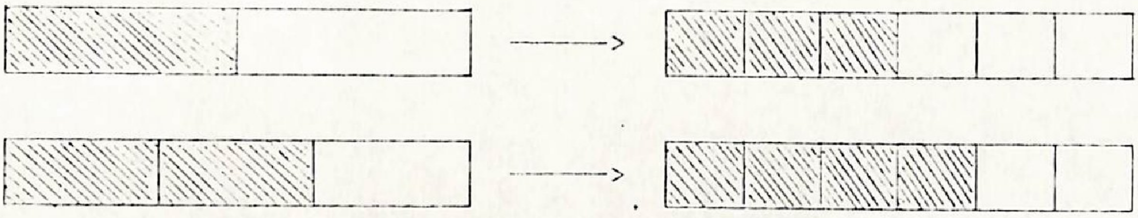
Comparar $\pm\frac{1}{2}$ e $\pm\frac{2}{3}$

O aluno tentará encontrar um número inteiro que multiplicado por 2 dê como resultado 3 e não conseguirá.

O professor poderá utilizar duas tiras de mesmo tamanho, uma delas subdividida em duas partes iguais e a outra em três partes iguais. Ele mostrará aos alunos que ao redividir cada metade da primeira tira em três e cada terça-parte da segunda em dois chegar-se-á a uma mesma divisão das tiras.

$\frac{1}{2}$ $\frac{3}{6}$

$\frac{2}{3}$ $\frac{4}{6}$



Estaremos mostrando que a ordem das divisões efetuadas não importa, pois chegaremos ao mesmo número de divisões no final ($2 \times 3 = 3 \times 2 = 6$).

Concluiremos assim que:

$$\left.\begin{array}{l} +\frac{1}{2} = +\frac{3}{6} \\ \\ +\frac{2}{3} = +\frac{4}{6} \end{array}\right\rangle \longrightarrow +\frac{1}{2} < +\frac{2}{3}$$

$$\left.\begin{array}{l} -\frac{1}{2} = -\frac{3}{6} \\ \\ -\frac{2}{3} = -\frac{4}{6} \end{array}\right\rangle \longrightarrow -\frac{1}{2} > -\frac{2}{3}$$

Vale a pena, nesta etapa, dar outros exemplos. Convém ressaltar também que, em exemplos deste tipo, o aluno naturalmente irá multiplicar um denominador pelo outro.

É conveniente o professor terminar esta parte dando exemplos, em que o produto dos denominadores dê um número grande, para estimular a utilização do M.M.C. (mínimo múltiplo comum).

Iremos comparar por exemplo:

a) $+\frac{5}{12}$ e $+\frac{3}{15}$

b) $+\frac{5}{6}$ e $+\frac{3}{4}$

Perguntaremos aos alunos (no exemplo (a)):

— Será que podemos encontrar um outro denominador comum, menor do que o produto de 12 por 15?

Concluir que as frações devem ser reduzidas a um denominador comum que pode ser ou não o M.M.C.

OPERAÇÕES COM NÚMEROS RACIONAIS

I - Revisão de adição e subtração de frações

O professor levaria para sala de aula seis tiras do mesmo tamanho e uma tesoura.

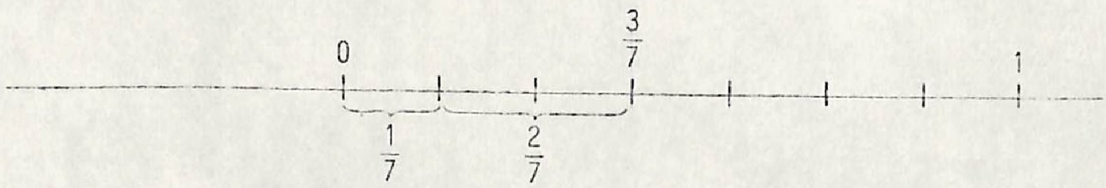
Caso 1: Adição e subtração de frações de mesmo denominador

Pedir a dois alunos que cortem duas tiras em sete partes iguais. Cada pedaço chamar-se-á sétimo.

- Se o primeiro aluno pintar um pedaço de vermelho e o segundo pintar dois pedaços de vermelho, quantos pedaços teremos pintados de vermelho?

Quando o aluno responder que são três pedaços, lembrar que, como cada pedaço é um sétimo, esse total obtido representa três sétimos, ou seja,

$$\frac{1}{7} + \frac{2}{7} = \frac{3}{7}$$



- Se o primeiro aluno pintasse a tira toda, quantos sétimos teria pintado?

$$\frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \frac{7}{7} = 1$$

- Quantos sétimos o segundo aluno deixou de pintar? Esperamos que os alunos respondam $\frac{5}{7}$ e que expliquem como descobriram a resposta matematicamente, isto é,

$$\frac{7}{7} - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}.$$

Caso os alunos sintam dificuldade em dar esta explicação o professor pode lembrar que a tira toda representa $\frac{7}{7}$ e que só foram pintados $\frac{2}{7}$.

Caso 2: Adição e subtração de frações de denominadores diferentes

Nesta etapa utilizar quatro tiras de mesmo tamanho.

Um aluno vai dividir uma das tiras em duas partes iguais, pintará $\frac{1}{2}$ de vermelho e recortará este pedaço.

Outro aluno irá dividir uma das tiras em três partes iguais, vai pintar $\frac{1}{3}$ de azul e vai recortar este pedaço.

Um outro aluno irá dividir a terceira tira em meios e a quarta tira em terços, sem recortar os pedaços.

Nesta etapa, o professor poderá perguntar aos alunos:

- O que vai ocorrer se juntarmos os dois pedaços e tentarmos colocá-los sobre a terceira e a quarta tira?

Os alunos irão observar concretamente que este novo pedaço não é uma parte da divisão em meios nem da divisão em terços.

O professor pode perguntar a seguir:

- Já que não podemos adicionar diretamente $\frac{1}{2}$ com $\frac{1}{3}$, como poderemos fazê-lo?

Espera-se que os alunos observem que se o número de divisões fosse o mesmo, seria possível efetuar a adição.

- Podemos achar uma divisão comum ao mesmo tempo a meios e terços para podermos efetuar a adição $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$?

Neste ponto esperamos que os alunos lembrem que podemos achar frações equivalentes a $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$ de mesmo denominador.

Quando os alunos tentarem responder às questões anteriores e recordarem como encontraram as frações equivalentes obteremos que:

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$$

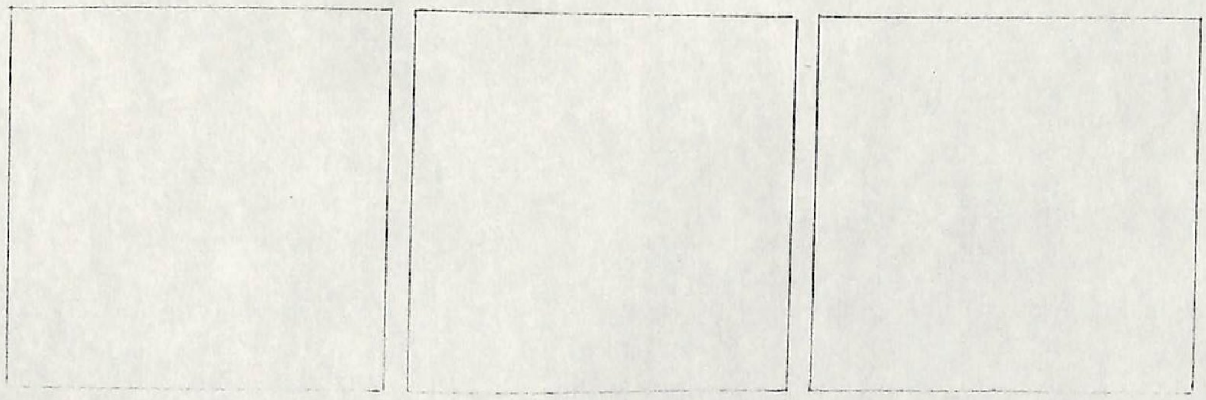
Os alunos irão perceber que efetuar a adição $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ será o mesmo que efetuar $\frac{3}{6} + \frac{2}{6}$ e esta já é uma adição conhecida.

Poderemos, então, concluir com a turma que, quando somamos ou subtraímos frações de denominadores diferentes, devemos, inicialmente, encontrar frações equivalentes às que foram dadas, de mesmo denominador, e depois efetuar a operação.

<u>Outras sugestões para rever adição de frações:</u>

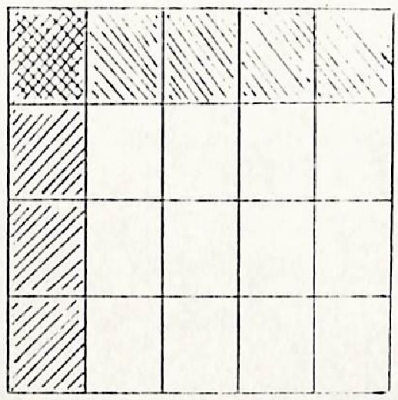
a) O professor pode colocar para a turma o seguinte problema:

Dados três quadrados de mesmo tamanho, onde um deles tá dividido em quatro partes iguais, tendo $\frac{1}{4}$ pintado de az o outro em cinco partes iguais, tendo $\frac{1}{5}$ pintado de vermelho, o que devemos fazer no terceiro quadrado para que tenhamos $\frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ pintado?



b) Caso os alunos não recordem o modo pelo qual encontram frações equivalentes, o professor pode mostrar para a turma, graficamente, como encontrar $\frac{1}{4} + \frac{1}{5}$.

O professor divide um quadrado horizontalmente em quatro partes iguais e verticalmente em cinco partes iguais.



Observamos que já aparece naturalmente a divisão equivalente a quartos e quintos.

Aqui os alunos perceberão que $\frac{1}{4} = \frac{5}{20}$ e $\frac{1}{5} = \frac{4}{20}$.

Os alunos também irão visualizar, apenas contando os pedaços hachurados, que a adição de $\frac{1}{4}$ com $\frac{1}{5}$ é igual a $\frac{9}{20}$.

(Observar que o pedaço que faz parte das duas divisões deve ser contado duas vezes).

II - Adição e subtração de números racionais

Superadas as dificuldades de somar e subtrair frações podemos somar e subtrair números racionais, aplicando a mesma idéia utilizada na adição e subtração de números inteiros.

Os exemplos abaixo também poderão ser visualizados com auxílio da reta numerada.

a) Se um aluno ganhar $\frac{1}{7}$, $\frac{3}{7}$ e $\frac{2}{7}$ de alguma quantidade (tiras de papel, chocolates, bolas de gude, balas, etc...) quanto terá ganho ao todo?

$$(+\frac{1}{7}) + (+\frac{3}{7}) + (+\frac{2}{7}) = +\frac{6}{7}$$

b) Se um aluno perder $\frac{2}{9}$, $\frac{4}{9}$ e $\frac{1}{9}$ de alguma quantidade, quanto terá perdido ao todo?

$$(-\frac{2}{9}) + (-\frac{4}{9}) + (-\frac{1}{9}) = -\frac{7}{9}$$

c) Se um aluno ganhar $\frac{3}{7}$, perder $\frac{2}{7}$, ganhar $\frac{1}{7}$, perder $\frac{1}{7}$ depois perder novamente $\frac{3}{7}$ de alguma quantidade, qual será a sua situação final?

$$(+\frac{3}{7}) + (-\frac{2}{7}) + (+\frac{1}{7}) + (-\frac{1}{7}) + (-\frac{3}{7}) =$$

Neste caso ele ganhou ao todo $\frac{4}{7}$, isto é, $(+\frac{3}{7}) + (+\frac{1}{7}) = +\frac{4}{7}$ e perdeu ao todo $\frac{6}{7}$, ou seja, $(-\frac{2}{7}) + (-\frac{1}{7}) + (-\frac{3}{7}) = -\frac{6}{7}$.

Logo ele perdeu mais do que ganhou e para saber a situação final basta efetuar a soma algébrica:

$$(+\frac{4}{7}) + (-\frac{6}{7}) = -\frac{2}{7}$$

Então

$$(+\frac{3}{7}) + (-\frac{2}{7}) + (+\frac{1}{7}) + (-\frac{1}{7}) + (-\frac{3}{7}) = (+\frac{4}{7}) + (-\frac{6}{7}) = -\frac{2}{7}.$$

Neste momento o professor deverá fixar a soma algébrica com exercícios em que estas apareçam sem parênteses e outros que mostrem aos alunos que os parênteses podem ser retirados.

Exemplo:

Calcular:

i) $(+\frac{1}{2}) + (-\frac{4}{3}) - (+\frac{1}{5}) - (-\frac{7}{4}) =$

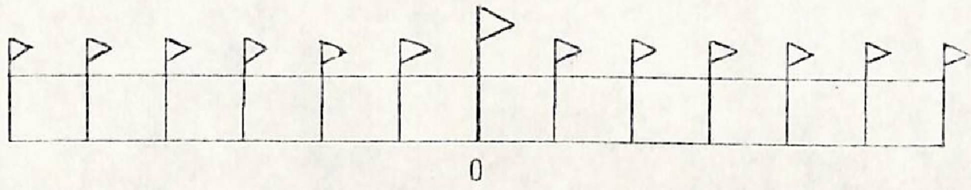
ii) $(-\frac{3}{15}) + 4 + (-\frac{1}{3}) =$

iii) $+\frac{4}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{2}{3} - \frac{5}{4} =$

Sugestão para fixar soma algébrica:

Jogo de dados.

Colocar no quadro uma pista com 13 marcos, convencionando-se que o marco central será o ponto de partida, representado pelo zero.



Convencionar, também, que cada intervalo entre os marcos estará valendo 1/6, isto é, as pistas à direita e à esquerda do marco central estão divididas em seis partes iguais. (Escolhido 1/6 por ser um jogo que utilizará um dado com as seis faces).

Regras do jogo:

1ª) Os alunos poderão participar individualmente ou em grupos (de dois ou três alunos, ou a critério do professor).

2ª) Fazer tabelas separadas para cada grupo ou participante

3ª) Determinar o número de rodadas.

4ª) Em cada rodada, cada jogador deverá jogar o dado duas vezes.

5ª) O número obtido na primeira jogada, indicará quantos marcos ele percorrerá para a direita, a partir do zero, parando no último.

6ª) Em seguida o jogador irá à tabela e marcará quantos sextos positivos percorreu.

7ª) O jogador efetuará a segunda jogada e os novos pontos obtidos ele percorrerá para a esquerda a partir do local onde ele havia parado.

8ª) Novamente o jogador irá à tabela e marcará quantos sextos negativos percorreu.

9ª) Agora, o jogador deverá efetuar a soma algébrica e colocar na tabela o resultado da rodada.

Término do jogo:

Ao final das rodadas, cada jogador fará a soma algébrica dos pontos obtidos em todas as rodadas e o vencedor será o que obtiver maior número racional (neste momento também estaremos recordando comparação de números racionais de mesmo denominador).

Exemplo de uma tabela:

	1º jogador		2º jogador		3º jogador	
1ª rodada	ptos (+) da 1ª jogada	Resultado da rodada (soma algébrica)				
	ptos (-) da 2ª jogada					
2ª rodada	$+\frac{4}{6}$	$-\frac{1}{6}$				
	$-\frac{5}{6}$					
3ª rodada						
4ª rodada						
Resultado Final	Soma de todas as rodadas					

III - Revisão de multiplicação de frações

• Sugestões para recordar multiplicação de frações

O professor, nesta etapa, já poderá utilizar desenhos ou, se preferir, continuar trabalhando com as tiras.

Optou-se neste momento por representação gráfica, levando-se em conta os seguintes aspectos: um possível desinteresse do aluno pelo uso constante de tiras e por considerarmos que já está apto a começar a abstrair.

a) Como calcular a metade da terça parte?

$(\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{3})$

Inicialmente desenhamos um inteiro dividido em três partes iguais.

Retiramos $\frac{1}{3}$, isto é,  e agora o dividimos em duas partes iguais, pois queremos calcular $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{3}$.

Ficaremos com .

— Este pedaço representa que parte do todo inicial?

Para responder a esta pergunta precisaríamos ter o inteiro dividido em partes iguais a este pedacinho.

Vamos então fazer esta comparação e verificar que este pedaço está contido 6 vezes no todo inicial.

Logo $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

b) Pedir aos alunos que tentem calcular:

$\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{5}$

$\frac{3}{5}$ de $\frac{1}{2}$

$\frac{2}{5}$ de $\frac{1}{3}$

$\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{4}$

Sugerir que utilizem o mesmo procedimento, ou seja, que calculem graficamente como foi feito anteriormente.

Nestes exemplos, esperamos que os alunos observem que ao calcular $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{3}$ efetuam a multiplicação dos numeradores e dos denominadores, ou seja, efetuam a multiplicação de frações.

Sugestões de exercícios:

1) Calcule utilizando gráficos:

a) $\frac{2}{5}$ de $\frac{3}{4}$ b) $\frac{3}{4}$ de $\frac{2}{5}$

c) $\frac{1}{3}$ de $\frac{3}{4}$ d) $\frac{3}{4}$ de $\frac{1}{3}$

2) Calcule:

a) $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{5}$ b) $\frac{1}{7}$ de $\frac{1}{2}$

3) Efetue:

a) $\frac{2}{3} \times \frac{1}{5} =$ b) $\frac{3}{5} \times \frac{1}{4} =$

c) $\frac{1}{7} \times \frac{1}{2} =$ d) $\frac{4}{5} \times \frac{1}{2} =$

e) $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{5} =$ f) $\frac{1}{5} \times \frac{10}{15} \times \frac{3}{4} =$

IV - Multiplicação de números racionais

Pedir à turma que calcule alguns produtos do tipo:

a) $(+5) \times (+3) =$

b) $(-3) \times (+7) =$

c) $(+6) \times (-8) =$

d) $(-4) \times (-3) =$

e) $(+\frac{2}{5}) \times (+\frac{1}{3}) =$

Esperamos nesta etapa que, após a revisão de multiplicação de frações, o aluno seja capaz de efeutar o último produto pedido.

Logo, para multiplicarmos números racionais devemos multiplicar as frações e obter o sinal do produto como na multiplicação de números inteiros.

Deverão ser propostos exercícios de fixação de multiplicação de números racionais.

Observações:

1) Se o professor quiser pode propor exercícios em que o aluno tenha que efetuar simplificações.

2) Como será necessário na divisão de números racionais a noção de inverso multiplicativo, o professor poderá incluir nos exercícios multiplicações do tipo:

a) $(+\frac{3}{4}) \times (+\frac{4}{3}) = \frac{12}{12} = 1$; d) $(-7) \times (-\frac{1}{7}) = \frac{7}{7} = 1$

b) $(-\frac{2}{5}) \times (-\frac{5}{2}) = \frac{10}{10} = 1$; e) $(-\frac{1}{4}) \times (-4) = \frac{4}{4} = 1$

c) $(+2) \times (+\frac{1}{2}) = \frac{2}{2} = 1$; f) $(\frac{1}{6}) - (6) = \frac{6}{6} = 1$

No fim destes exercícios o professor poderá definir o inverso multiplicativo de um número racional, diferente de zero, como sendo um outro número racional que multiplicado pelo primeiro dê como resultado a unidade.

V - Revisão de divisão de frações

Com o objetivo de levar o aluno a entender o processo operatório da divisão de números racionais poderíamos apresentar as seguintes situações:

1) Uma escola recebeu 60 sacos de leite em pó para serem consumidos igualmente num período de três semanas. Quantos sacos de leite serão utilizados em cada semana?

O professor depois de ter feito uma leitura do problema com a turma, deverá analisá-lo, isto é, verificar quais são os dados do problema, qual é a pergunta e como deverá solucioná-lo.

O aluno responderá que são 20 sacos de leite, pois irá dividir 60 por 3. Mostrar então que quando ele divide 60 por 3 está achando na verdade a terça parte de 60.

Logo $\frac{60}{3} = \frac{1}{3}$ de $60 = \frac{1}{3} \times 60 = 20$,

ou seja, dividir por 3 é o mesmo que multiplicar pelo seu inverso que é $\frac{1}{3}$.

2) Se outra escola recebesse 60 sacos de leite para serem consumidos igualmente em duas semanas, o que você faria para saber quantos sacos de leite serão utilizados em uma semana?

O professor deve proceder como no exemplo anterior para induzir o aluno a responder que vai dividir 60 por 2. Ele deve mostrar que dividir 60 por 2 é o mesmo que calcular a metade de 60.

Logo $\frac{60}{2} = \frac{1}{2}$ de $60 = \frac{1}{2} \times 60 = 30$.

3) Se uma outra escola receber 60 sacos de leite para serem consumidos em meia semana, o que deverá ser feito para saber quantos sacos de leite a escola irá utilizar em uma semana?

O professor deve agir como anteriormente para que o aluno responda que multiplicará 60 por 2.

Logo $60 \times 2 = 120$.

Dos exemplos anteriores sabemos que para obtermos o gasto semanal dividimos o total de sacos de leite pelo número de semanas. Logo, neste último exemplo teremos:

$$\frac{60}{1/2} = 60 \times 2 = 120.$$

O professor deverá observar com a turma que dividir por um número racional, diferente de zero, é o mesmo que multiplicar pelo seu inverso multiplicativo.

- Dar exemplos em que o aluno tenha que efetuar divisões do tipo:

a) $\dfrac{4}{3/2} = 4 \div \dfrac{3}{2} = 4 \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{8}{3}$

b) $\dfrac{5}{15/4} =$

c) $\dfrac{8}{4/5} =$

A seguir podemos dar exemplos do tipo:

$$\frac{2/5}{3/4} = \frac{2}{5} \div \frac{3}{4} = \frac{2}{5} \times \frac{4}{3} = \frac{8}{15}.$$

O professor deve fixar com vários exercícios e problemas ou seguir outras sugestões como as que apresentaremos.

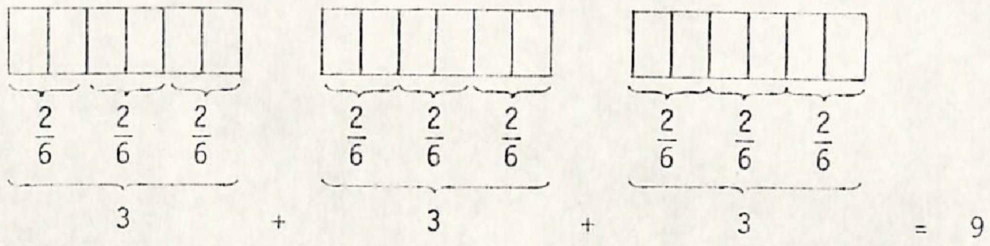
Em divisões do tipo $\dfrac{1}{1/3} = 1 \div \dfrac{1}{3}$ o professor também pode explorar com os alunos a idéia de divisão, isto é, quantas vezes $\dfrac{1}{3}$ está contido em 1.

O professor pode mostrar graficamente:

$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

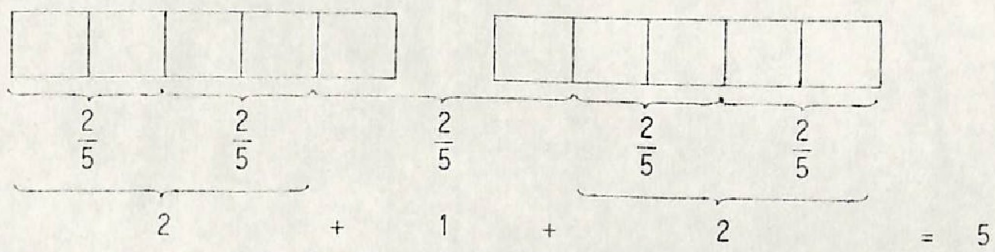
O aluno irá responder 3 vezes, logo, $\dfrac{1}{1/3} = 1 \times 3 = 3$.

Se o professor escolher divisões em que o divisor esteja contido um número inteiro de vezes no dividendo, também pode explorar o raciocínio da divisão. Por exemplo, na divisão $\frac{3}{2/6}$ o professor poderá mostrar também graficamente.



Conclusão: $\frac{3}{2/6} = 3 \times \frac{6}{2} = 9$, ou seja, $\frac{2}{6}$ está contido 9 vezes em 3 inteiros.

Em outras divisões, como $\frac{2}{2/5}$, o professor também deve perguntar quantas vezes $\frac{2}{5}$ está contido em 2 e mostrar graficamente:



Conclusão: $\frac{2}{2/5} = 2 \times \frac{5}{2} = 5$, isto é, $\frac{2}{5}$ esta contido 5 vezes em 2 inteiros.

Sugestões de exercícios e problemas:

1) Qual vai ser o salário mensal de um funcionário nas seguintes condições:

a) quando recebe Cr\$ 90.000,00 por 3 meses de trabalho?

b) quando recebe Cr\$ 90.000,00 por 2 meses de trabalho?

c) quando recebe Cr\$ 90.000,00 por $\frac{1}{2}$ mês de trabalho?

2) Calcule graficamente divisões do tipo:

a) $\frac{1}{1/4}$

b) $\frac{1}{1/7}$

c) $\frac{2}{1/5}$

d) $\frac{3}{1/4}$

e) $\frac{4}{2/8}$

f) $\frac{5}{2/4}$

VI - Divisão de números racionais

Pedir à turma que efetue divisões do tipo:

a) $(+12) \div (+12) =$

b) $(-24) \div (-3) =$

c) $(-15) \div (+5) =$

d) $(+122) \div (-2) =$

e) $(+\frac{3}{4}) \div (+\frac{3}{8}) =$

Esperamos nesta etapa que, após a revisão de divisão de frações, o aluno seja capaz de efetuar a última divisão dada.

Logo, para dividirmos dois números racionais quaisquer, devemos multiplicar o primeiro pelo inverso do segundo e obter o sinal do quociente como na divisão de números inteiros.