

INSTITUTO DE EDUCAÇÃO GENERAL FLORES DA CUNHA
ESCOLA ESTADUAL DE 1º E 2º GRAUS

L A B O R A T Ó R I O

D E

M A T E M Á T I C A

G E O M E T R I A P L A N A

- CONCEITOS
- NOTAÇÕES
- DEMONSTRAÇÕES
- SUGESTÕES PARA EXERCÍCIOS

Material elaborado nas sessões de estudo com a participação de:

- Ana Maria Brum
- Ângela Eifler Gomes
- Anita Pirichinski
- Anna Goldstein
- Elaine Vieira Thomaz
- Janice de Souza Kazmierczak
- Leila Costa Baratojo
- Maria Albina Gomes de Menezes
- Maria Ondina Ribeiro Machado
- Nydia Westphalen
- Regina Maria P. Ávila
- Vera Lúcia Bergonsi do Prado
- Vera Pizzato Sieben

Coordenação do trabalho: LEILA COSTA BARATOJO



*Arquivado
1987*

GEOMETRIA PLANA1ª PARTE1 - ELEMENTOS FUNDAMENTAIS

Os elementos fundamentais da Geometria são: o ponto, a reta e o plano.

Designaremos os pontos por letras maiúsculas do nosso alfabeto (A, B, C, D, ...), as retas por letras minúsculas (a, b, c, ...) e os planos por letras minúsculas do alfabeto grego (α , β , γ , ...).

2 - PROPOSIÇÕES GEOMÉTRICAS

São proposições geométricas os postulados ou axiomas e os teoremas.

POSTULADOS OU AXIOMAS são proposições iniciais aceitas sem demonstração.

Exemplo: Postulados da reta

- a) A reta tem infinitos pontos.
- b) Por um ponto passam infinitas retas.
- c) Dois pontos distintos determinam uma única reta.

TEOREMAS são proposições que devem ser demonstradas para serem aceitas.

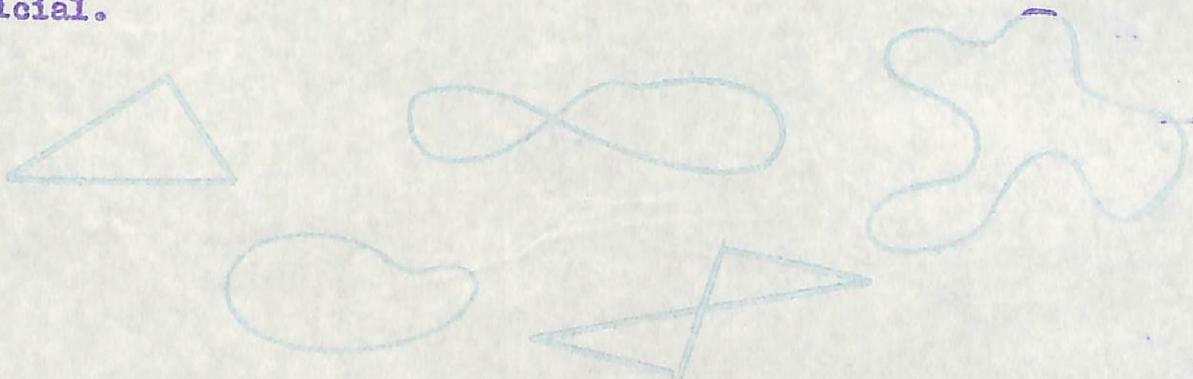
A este assunto nos dedicaremos na segunda parte deste trabalho.

3 - CURVAS

Dados dois pontos A e B de um plano, se deslizarmos a ponta de um lápis de A até B, sem levantá-la, estaremos traçando uma figura geométrica chamada curva.

CURVAS FECHADAS - CURVAS FECHADAS SIMPLES

Uma curva fechada é uma curva tal que ao traçá-la deslocamos o lápis com continuidade sobre o papel e terminamos o traçado no ponto inicial.

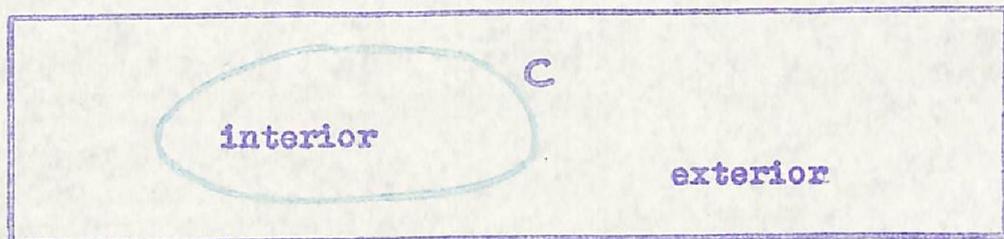


Se ao traçarmos uma curva fechada deslocamos o lápis com continuidade sobre o papel não passando por um mesmo ponto mais de uma vez, temos uma curva fechada simples, isto é, uma curva sem cruzamento.

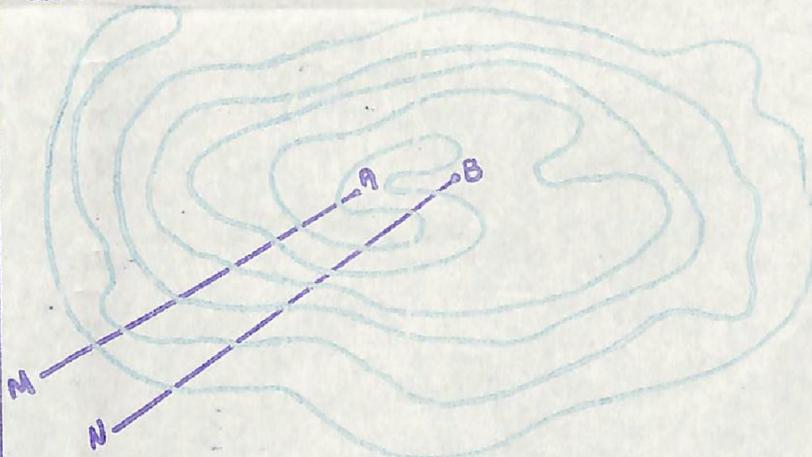


INTERIOR E EXTERIOR DE UMA CURVA FECHADA SIMPLES

Uma curva fechada simples determina no plano três conjuntos de pontos: o "interior" que é o conjunto dos pontos internos à curva, o "exterior" que é o conjunto dos pontos externos à curva e a curva propriamente dita, que não está contida nem no interior nem no exterior.



Para distinguirmos com segurança se um ponto pertence ao interior ou ao exterior de uma curva fechada simples, toma-se um ponto qualquer do plano que não pertença à curva. traça-se um segmento de reta que ligue esse ponto a um ponto qualquer da parte do plano ocu pada pela curva. Se o número de pontos de encontro do segmento de reta com a curva for par, o ponto é externo e se for ímpar é interno.



No exemplo ao lado, \overline{AM} corta a curva em 7 pontos, logo A é ponto interno e \overline{BN} corta a curva em 8 pontos, logo B é ponto exterior.

4 - RETA, SEMI-RETA, SEGMENTO DE RETA

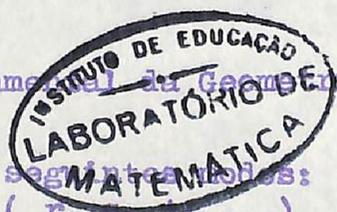
A reta, como já vimos, é elemento fundamental da Geometria, não tem definição.

NOTAÇÃO - Anota-se uma reta por um dos seguintes modos:

a) Letras minúsculas do nosso alfabeto (r, s, t, ...).



b) Duas letras maiúsculas indicativas de dois quaisquer de seus pontos, sobre as quais se coloca o sinal \longleftrightarrow . Assim a notação \overleftrightarrow{AB} se refere à reta que passa pelos pontos A e B.



Semi-reta - Consideremos a reta "r" e um ponto $A \in r$. O ponto A divide a reta "r" em duas partes; cada uma delas chama-se semi-reta. O ponto A é a origem dessas semi-retas.



Marcando os pontos A e B na reta, temos:

- \overrightarrow{AB} , semi-reta de origem no ponto A, passando por B;
 \overrightarrow{BA} , semi-reta de origem no ponto B, passando por A.



Segmento de reta - Seja a reta "r" e dois pontos distintos A e B pertencentes à reta.



Chama-se segmento de reta ou simplesmente segmento ao conjunto dos pontos comuns às semi-retas \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{BA} . Os pontos A e B são os extremos do segmento que anotaremos por \overline{AB} e a reta "r" é a reta suporte do segmento \overline{AB} .

Quando escrevemos apenas AB significa que estamos nos referindo à medida do segmento.

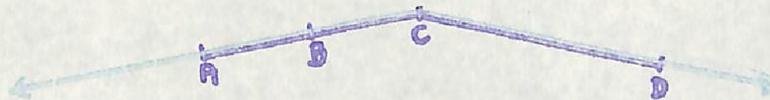
Os segmentos podem ser:

- a) Colineares quando estão contidos na mesma reta suporte.



\overline{AB} e \overline{CB} são segmentos colineares.

- b) Consecutivos quando o extremo de um é a origem do outro, não possuindo outros pontos em comum.



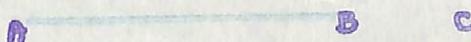
\overline{AC} e \overline{CD} são segmentos consecutivos

- c) Adjacentes quando dois segmentos forem simultaneamente consecutivos e colineares.



\overline{AB} e \overline{BC} são segmentos adjacentes.

- d) Congruentes quando superpostos coincidem ponto a ponto (Possu em a mesma medida).



\overline{AB} e \overline{CD} são segmentos congruentes.

PONTO MÉDIO de um segmento é o ponto que divide o segmento dado em dois outros congruentes.





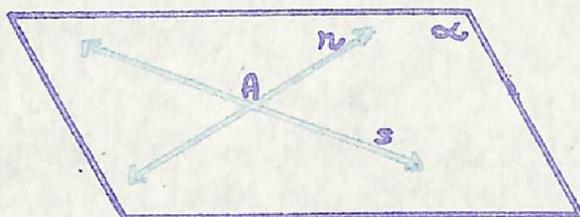
M é ponto médio de \overline{AB} , pois $\overline{AM} \cong \overline{MB}$

POSIÇÕES RELATIVAS DE DUAS RETAS

a) Paralelas são retas coplanares que seguem a mesma direção. As retas coincidentes são um caso especial de retas paralelas.

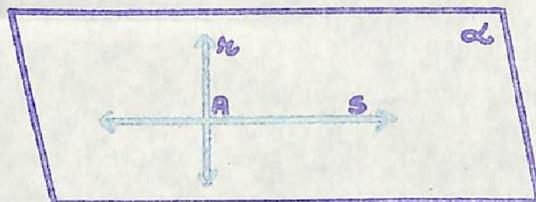


b) Concorrentes são retas coplanares que têm apenas um ponto comum entre elas.



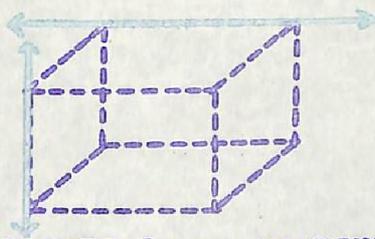
$r \subset \alpha$
 $s \subset \alpha$
 $r \cap s = \{ A \}$

Quando duas retas concorrentes determinam, no plano, quatro regiões congruentes elas são ditas perpendiculares.

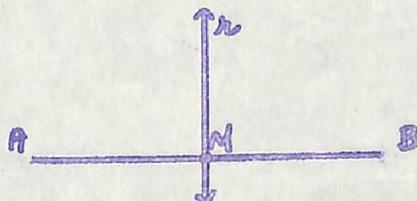


$r \perp s$

c) Reversas são retas não coplanares que não têm ponto em comum.



MEDIATRIZ de um segmento é a perpendicular a ponto médio desse segmento.



M é ponto médio de \overline{AB}
 r é perpendicular a \overline{AB}
 r é mediatriz do segmento \overline{AB}



PLANO - O plano, como dissemos no início, é um dos elementos fundamentais da geometria e não se define.

SEMI-PLANO - Seja o plano α e a reta "r" pertencente a α . A reta "r" separa α em duas partes α_1 e α_2 sem pontos comuns.

A reunião α_1 , ou α_2 com a reta " r ", chama-se semi-plano. A reta " r " é a origem de cada semi-plano.



SUGESTÃO DE TRABALHO PARA O ALUNO

Apresentamos, como sugestão, uma instrução programada sobre os elementos fundamentais da Geometria.

Este trabalho é indicado para revisão desses conteúdos.

Orientação para responder à instrução programada que segue:

a) Leia com atenção o item 1) completando de modo conveniente o espaço vago.

b) Vire a folha e confira sua resposta com a que é dada à esquerda do item 2) na página seguinte.

c) Caso você não tenha completado corretamente, volte e releia com atenção o item anterior.

d) Caso você tenha acertado, leia o item 2) e complete-o convenientemente.

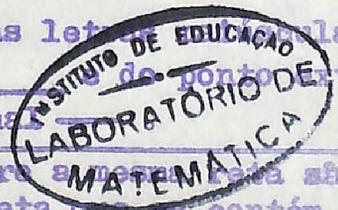
e) Vá virando novamente as folhas, conferindo suas respostas e completando o item seguinte até chegar ao item 4) quando você deve retornar à primeira folha da instrução programada e, depois de conferir seu resultado com o dado à esquerda do item 5) no segundo quadro, passe a respondê-lo e siga como antes.

Ver a sugestão nas páginas seguintes.



SUGESTÃO DE TRABALHO PARA O ALUNO

<p>origem</p>	<p>1) O ponto, a reta e o plano são os elementos fundamentais da Geometria. Estes elementos fundamentais que são o _____, a _____ e o _____, não se definem.</p>
<p>maiúsculas</p>	<p>5) Designaremos a reta, elemento _____ da _____, com letras minúsculas do nosso alfabeto (a, b, c, ...)</p>
<p>retas</p>	<p>9) As retas também podem ser anotadas com duas letras maiúsculas indicativas de dois de seus _____ quaisquer. Sobre estas letras usaremos o sinal indicativo de reta: \longleftrightarrow.</p>
<p>planos</p>	<p>13) Quando escrevemos "α", "β", ... significa que estamos falando de _____.</p>
<p>coplanares</p>	<p>17) " Ser coplanar" significa estar no mesmo _____.</p>
<p>reta</p>	<p>21) A semi-reta tem origem num _____ mas não tem _____; ela é infinita apenas num sentido.</p>
<p>semi-reta R_r S</p>	<p>25) Marcando os pontos A e B sobre uma reta, teremos: \overrightarrow{AB}, _____ de origem no ponto A e passando pelo ponto _____ e \overleftarrow{BA}, semi-reta de origem em B e passando pelo ponto _____.</p>
<p>fim ou extremidade</p>	<p>29) Anotamos o segmento com duas letras indicativas do ponto de _____ de ponto de _____, sobre as quais se coloca o sinal _____.</p>
<p>reta M, N semi-reta M, N segmento</p>	<p>33) Os segmentos que estão sobre a mesma reta são chamados segmentos colineares, e a reta que os contém é chamada reta suporte. Na figura $\overleftrightarrow{A B C D}$, \overline{AB} e \overline{CD} são ditos segmentos _____ porque estão sobre a mesma reta _____.</p>



<p>ponto reta plano</p>	<p>2) Designaremos o ponto, elemento _____ da _____, com letras maiúsculas do nosso alfabeto (A, B, C, ...)</p>
<p>fundamental Geometria</p>	<p>6) Assim, quando tivermos em Geometria, uma letra minúscula, sabemos que está designando uma _____.</p>
<p>pontos</p>	<p>10) Assim, se escrevemos \overleftrightarrow{AB}, significa que estamos nos referindo à _____ que passa pelos pontos _____ e _____.</p>
<p>planos</p>	<p>14) Recordando: as letras maiúsculas de nosso alfabeto indicam _____, as letras minúsculas indicam _____ e as letras gregas indicam _____.</p>
<p>plano</p>	<p>18) A reta é infinita, isto é, não tem origem nem _____.</p>
<p>ponto fim ou extremidade</p>	<p>22) Para anotar uma semi-reta, usaremos duas _____ maiúsculas, sendo uma a do ponto de origem e a outra de um ponto qualquer da semi-reta, colocando-se sobre elas o sinal \rightarrow.</p>
<p>semi-reta B A</p>	<p>26) O conjunto de pontos comuns às semi-retas \overrightarrow{AB} e \overrightarrow{BA} é o que chamamos "segmento de reta" ou simplesmente "segmento". O conjunto de pontos comuns às semi-retas \overrightarrow{RS} e \overrightarrow{SR} é um _____.</p>
<p>origem</p>	<p>30) Assim, \overline{AB} indica um _____ nos são os pontos A e B.</p>
<p>colinear suporte</p>	<p>34) "Ser colinear" significa estar na mesma _____.</p>



<p>fundamental Geometria</p>	<p>3) Quando tivermos, em Geometria, uma letra maiúscula, sabemos que ela está designando um _____.</p>
<p>reta</p>	<p>7) Usaremos, então, letras _____ de nosso alfabeto para designar as retas.</p>
<p>reta A, B</p>	<p>11) Para designar o plano usaremos _____ do alfabeto grego ($\alpha, \beta, \gamma, \dots$)</p>
<p>pontos retas planos</p>	<p>15) As retas contidas no mesmo plano são ditas retas coplanares. Então retas coplanares são _____ contidas no mesmo plano.</p>
<p>fim ou extremidade</p>	<p>19) Quando marcamos um ponto sobre uma reta, ela fica dividida em duas partes chamadas semi-retas que têm origem no _____ marcado e sentidos opostos.</p>
<p>letras</p>	<p>23) Assim, \overrightarrow{MP} indica uma _____ que tem origem no ponto M e passa pelo ponto _____.</p>
<p>segmento</p>	<p>27) Segmento de reta ou simplesmente _____ é uma parte limitada da reta.</p>
<p>segmento</p>	<p>31) \overline{CD} é um _____ cujo _____ são os pontos _____ e _____.</p>
<p>reta</p>	<p>35) Quando dois segmentos são tais que a extremidade de um é a origem do outro e não há pontos interiores em comum, eles são ditos segmentos consecutivos. Segmentos consecutivos são tais que o extremo de um é a _____ do outro, e não possuem pontos interiores em comum.</p>

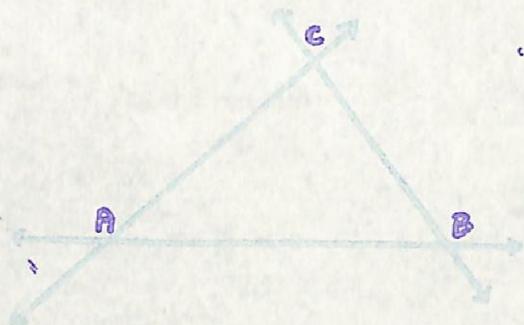


<p>ponto</p>	<p>4) Usaremos então, letras _____ do nosso alfabeto para designar o ponto.</p>
<p>minúsculas</p>	<p>8) Se escrevemos "a" ou "m", sabemos que estamos nos referindo a _____.</p>
<p>letras</p>	<p>12) As letras gregas indicarão os _____.</p>
<p>retas</p>	<p>16) Retas que estão contidas no mesmo plano são chamadas, pois, retas _____.</p>
<p>ponto</p>	<p>20) Semi-reta é, pois, cada uma das partes de uma _____ que foi dividida por um ponto.</p>
<p>semi-reta P</p>	<p>24) \overrightarrow{RS} indica uma _____ que tem origem no ponto _____ e passa pelo ponto _____.</p>
<p>segmento</p>	<p>28) O segmento tem origem e tem _____.</p>
<p>segmento C D</p>	<p>32) Retomando o que vimos, temos: \overleftrightarrow{MN} é uma _____ que passa pelos pontos _____ e _____; \overrightarrow{MN} _____ que tem origem no ponto _____; \overleftarrow{MN} _____ que tem origem no ponto _____; MN é um _____ que tem os pontos M e N como extremos.</p>



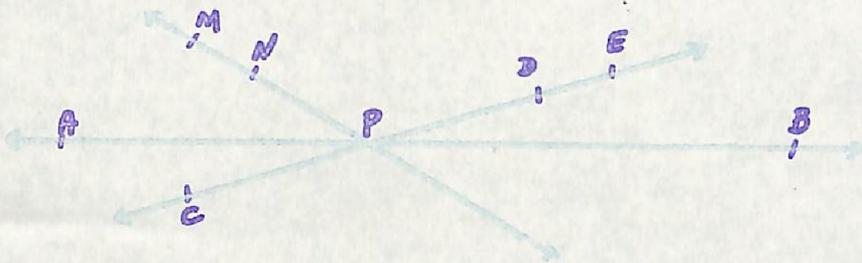
EXERCÍCIOS - GRUPO 1

- 1) Represente um ponto e chame-o de "S".
- 2) Responda: Quantas retas você pode traçar passando por "S" ?
- 3) Marque os pontos M e N. Quantas retas distintas você pode traçar passando por M e N ao mesmo tempo?
- 4) Na figura abaixo temos:



- a) O ponto de intersecção das retas \overleftrightarrow{AB} e \overleftrightarrow{AC} é
- b) A intersecção das retas \overleftrightarrow{AC} e \overleftrightarrow{CB} é
- c) O ponto B é a intersecção das retas e
- d) Escreva simbolicamente as questões a, b, c.

- 5) Marque os pontos R, S, P, Q de modo que sejam colineares.
- 6) De acordo com a figura abaixo, escreva o que for pedido:



- a) Dois segmentos colineares:
- b) Dois segmentos consecutivos não colineares :
- c) Dois segmentos colineares não consecutivos :
- d) Dois segmentos consecutivos e colineares:

- 7) Escreva todos os segmentos que ficam determinados com os pontos P, Q, R da figura que segue:



- 8) Na figura abaixo, faça o que se pede a seguir:



- a) Assinale a semi-reta \overrightarrow{AC} com lápis vermelho.
- b) Assinale a semi-reta \overrightarrow{AD} com lápis azul.
- c) Marque o segmento \overline{CB} com lápis amarelo.
- d) Marque o segmento \overline{AD} com lápis verde.



5 - ÂNGULOS

Conceito - Chama-se ângulo a figura constituída por duas semi-retas de mesma origem, incluindo uma das regiões por elas limitada.