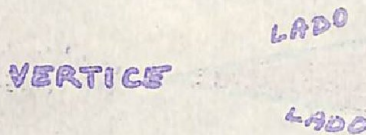


Vértice é o ponto de origem comum às duas semi-retas.

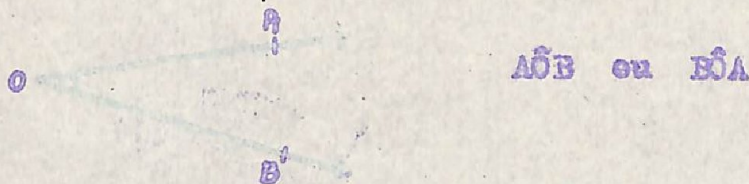
Lados do ângulo são as semi-retas que o formam.



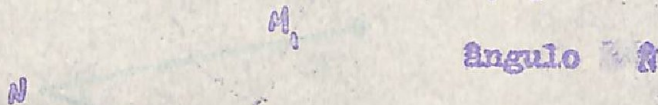
Para o nosso trabalho com Geometria consideraremos apenas o menor ângulo formado pelas duas semi-retas. Essa é a forma mais simples da idéia de ângulo. Em estudos posteriores a idéia de ângulo aparecerá de uma forma diferente.

Notação - Os ângulos podem ser anotados como segue:

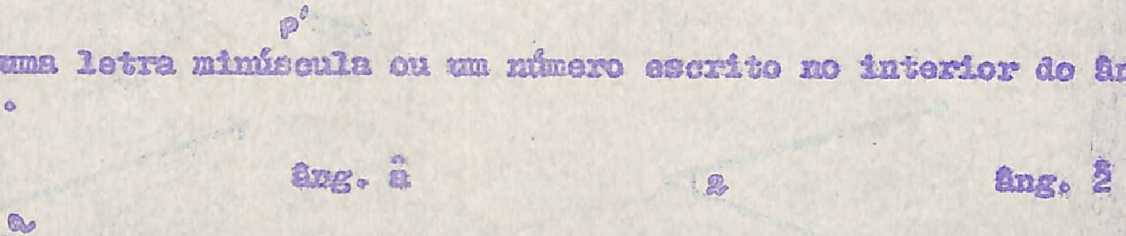
1ª) com três letras maiúsculas, uma colocada no vértice e uma em um ponto qualquer de cada uma dos lados do ângulo. Na leitura e escrita a letra do vértice deve ficar entre as outras duas.



2ª) apenas com a letra do vértice, quando isto não trouxer confusão



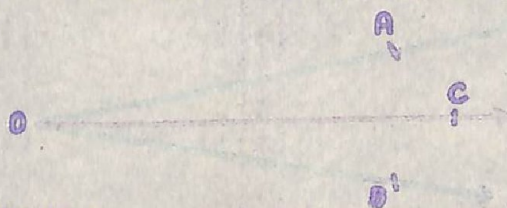
3ª) com uma letra minúscula ou um número escrito no interior do ângulo.



CONGRUÊNCIA DE ÂNGULOS - Dois ângulos são congruentes quando através de uma translação e, ou rotação podem coincidir ponto a ponto. (Ver item nº 10).

Dois ângulos congruentes têm a mesma medida.

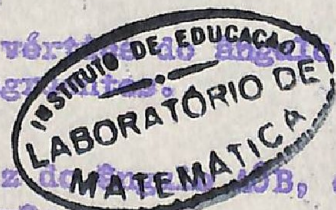
Bissetriz é a semi-reta que, com origem no vértice do ângulo, forma, com os lados desse ângulo, dois ângulos congruentes.



\vec{OC} é bissetriz de $\angle AOB$, então $\angle AOC \cong \angle BOC$

(O sinal \cong significa: congruente).

MEDIDA - As unidades usadas para medir ângulos são: o grau ($^\circ$), o grau (gr) e o radiano (rad). O transferidor é o instrumento usado para realizar a medida de um ângulo em graus.



Postulado da medida de ângulos:

A cada ângulo corresponde um número real de 0° a 180° que é a medida do ângulo em graus.

O grau possui dois submúltiplos: o minuto ($'$) que vale $\frac{1}{60}$ do grau e o segundo ($''$) que vale $\frac{1}{60}$ de minuto ou $\frac{1}{3.600}$ do grau.

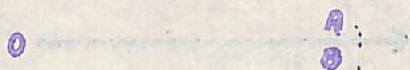
Entre as três unidades de medida de ângulos existe a seguinte relação:

$$180^\circ \longrightarrow 200 \text{ gr} \longrightarrow 7 \text{ rai.}$$

Quando queremos nos referir à medida do ângulo, usaremos somente a letra minúscula colocada no interior do ângulo sem o sinal de ângulo.

TIPOS DE ÂNGULOS

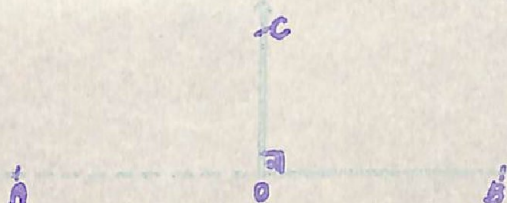
Nulo - Um ângulo é dito nulo quando as duas semi-retas que o formam são coincidentes. O ângulo nulo mede zero graus.



Raso - Um ângulo é raso quando as duas semi-retas que o formam têm sentidos opostos. O ângulo raso mede 180° .



Reto - Ângulo reto é cada um dos ângulos congruentes determinados pela bissetriz de um ângulo raso. O ângulo reto mede 90° .

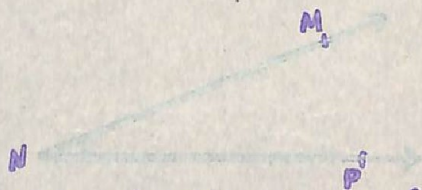


BÔC é ângulo reto

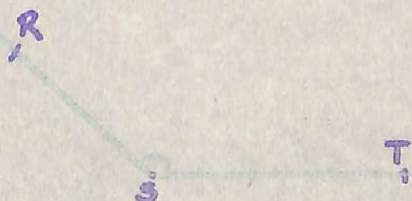
As retas suportes dos lados do ângulo reto são ditas perpendiculares; então retas perpendiculares são retas concorrentes que determinam no plano quatro ângulos retos.

O ângulo reto será assinalado com o sinal (\sphericalangle).

Agudo - Ângulo agudo é todo ângulo cuja medida é maior que 0° e menor que 90° .



Obtuso - Ângulo obtuso é todo ângulo cuja medida é maior que 90° e menor que 180° .

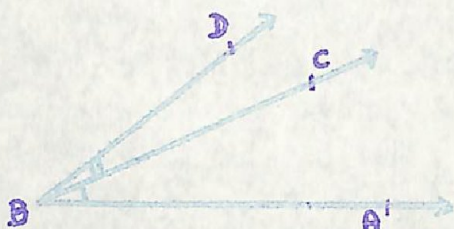


RST é ângulo obtuso

Complementares - Dois ângulos são complementares quando a soma de suas medidas é 90° . Cada um dos ângulos se diz complemento do outro.

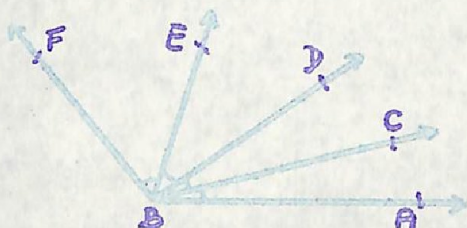
Suplementares - Ângulos suplementares são dois ângulos cuja soma de suas medidas é igual à medida de um ângulo raso ou seja, 180° . Cada um dos ângulos se diz suplemento do outro.

Adjacentes - Dois ângulos são adjacentes quando possuem o mesmo vértice, um lado comum e não possuem pontos interiores comuns.



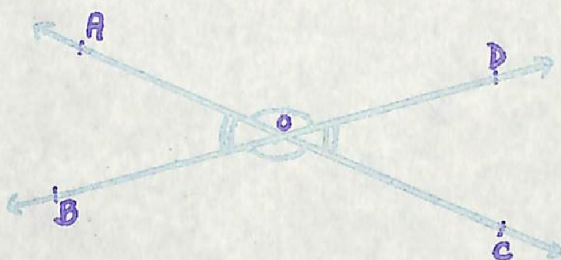
\widehat{ABC} e \widehat{CBD} são ângulos adjacentes

Consecutivos - Vários ângulos adjacentes dois a dois, tendo o vértice comum, são chamados consecutivos.



\widehat{ABC} , \widehat{CBD} , \widehat{DBE} , \widehat{EBF} são ângulos consecutivos.

Opostos pelo vértice - Dois ângulos são opostos pelo vértice, quando os lados de um são semi-retas opostas aos lados do outro.



\widehat{AOB} e \widehat{DOC} são opostos pelo vértice.

\widehat{AOD} e \widehat{BOC} são opostos pelo vértice.

ÂNGULOS FORMADOS POR DUAS RETAS CORTADAS POR UMA TRANSVERSAL

- Instrução programada -

(Ver instruções na página nº 6)

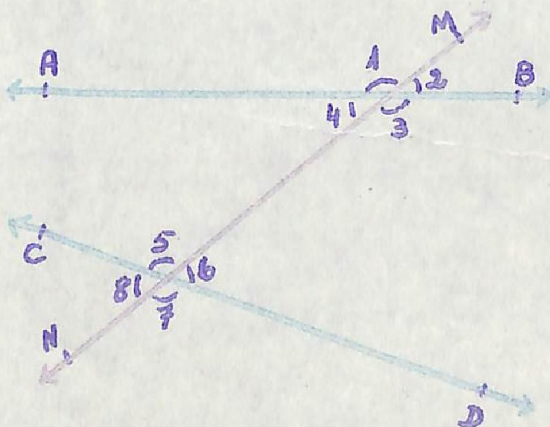


fig. (1)

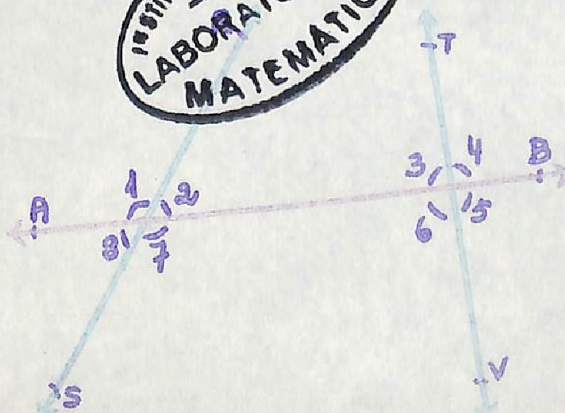
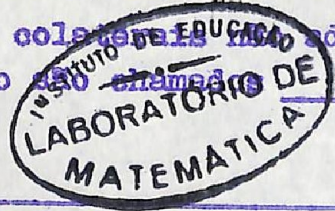


fig. (2)

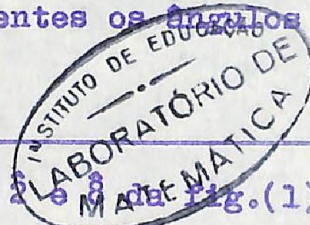
correspon- dentes	<p>1- Observe a fig. (1). As retas \overleftrightarrow{AB} e \overleftrightarrow{CD} são cortadas pela transversal \overleftrightarrow{MN}. A reta \overleftrightarrow{MN} denominada _____ ou secante, forma com as outras duas _____ oito ângulos que recebem nomes especiais.</p>
internos entre	<p>5- Portanto, denominam-se _____ os ângulos que ficam situados entre as retas \overleftrightarrow{AB} e \overleftrightarrow{CD}.</p>
transversal ou secante oito externos	<p>9- Os ângulos internos da figura (1) são _____, _____ e _____ e os ângulos externos são _____, _____ e _____.</p>
5 e 8 esquerda	<p>13- Os ângulos $\hat{2}$, $\hat{3}$, _____ e _____ da fig. (1) são também chamados colaterais porque ficam à _____ da secante.</p>
alternos	<p>17- Os ângulos alternos não ficam do mesmo lado da _____.</p>
alternos- internos	<p>21- Do mesmo modo os ângulos $\hat{1}$ e $\hat{7}$, $\hat{2}$ e $\hat{8}$ da fig.(1) são chamados ângulos alternos-_____.</p>
8 7	<p>25- Chamam-se pois, ângulos correspondentes àqueles que são colaterais e não são _____ um é interno e o outro _____.</p>
interno externo	<p>29- Conclusão: quando duas retas _____ por uma _____ formam-se _____ ângulos que recebem denominações especiais.</p>
colaterais internos	<p>33- Os pares de ângulos $\hat{1}$ e $\hat{8}$, $\hat{2}$ e $\hat{7}$ da figura (1), $\hat{1}$ e $\hat{4}$, $\hat{5}$ e $\hat{8}$ da fig.(2) são chamados _____.</p>



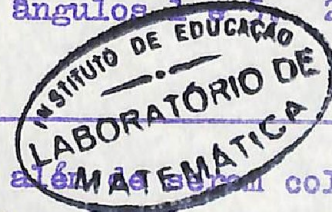
<p>transversal retas</p>	<p>2- Portanto uma transversal ou _____ que corta duas outras retas, forma com elas _____ ângulos com denominações especiais.</p>
<p>internos</p>	<p>6- Ângulos <u>externos</u> são os que não ficam situados entre as retas \overleftrightarrow{AB} e \overleftrightarrow{CD}. Na fig. (1) são externos os ângulos _____.</p>
<p>3, 4, 5 e 6 1, 2, 7 e 8</p>	<p>10- Ângulos colaterais são os que estão situados de um mesmo lado da secante ou _____ como os ângulos 1, 4, 5 e 8 ou 2, 3, 6 e 7 da figura (1).</p>
<p>5 e 7 direita</p>	<p>14- Observe agora a figura (2). As retas \overleftrightarrow{RS} e \overleftrightarrow{TV} são cortadas pela secante _____. Os ângulos 1, 2, _____ e _____ são colaterais porque ficam todos acima da _____ e, por sua vez, os ângulos 8, 7, _____ e _____ também são colaterais porque todos ficam _____ da secante.</p>
<p>transversal ou secante</p>	<p>18- Os ângulos que ficam em lados opostos da secante (não sendo adjacentes, nem opostos pelo vértice) são chamados _____.</p>
<p>externos</p>	<p>22- Ângulos alternos-externos são os que ficam um de cada lado da _____, não ficam entre as duas retas dadas e <u>não</u> são adjacentes.</p>
<p>adjacentes externo</p>	<p>26- Quando dois ângulos são colaterais internos adjacentes, um interno e outro externo são chamados _____.</p>
<p>transversal ou secante corte</p>	<p>30- Os pares de ângulos 4 e 6, 3 e 5, da figura (1), 2 e 6, 3 e 7, da figura (2), são chamados _____.</p>
<p>colaterais externos</p>	<p>34- Os pares de ângulos 1 e 5, 2 e 6, 3 e 7, 4 e 8 da figura (1) são chamados _____.</p>



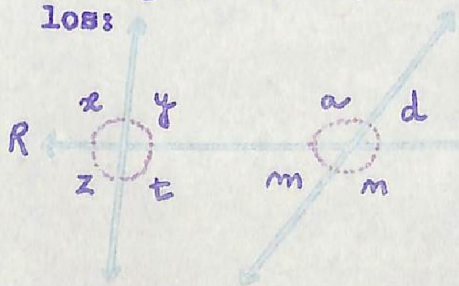
<p>secante oito</p>	<p>3- Ângulos internos são os que pertencem à região que fica entre as duas retas \overleftrightarrow{AB} e \overleftrightarrow{CD}. Na fig.(1) são <u>in</u>ternos os ângulos _____.</p>
<p>$\hat{1}$, $\hat{2}$, $\hat{7}$ e $\hat{8}$</p>	<p>7- Os ângulos $\hat{1}$, $\hat{2}$, $\hat{7}$ e $\hat{8}$ da figura (1) são chamados _____ porque não ficam entre as retas \overleftrightarrow{AB} e \overleftrightarrow{CD}.</p>
<p>transversal</p>	<p>11- Os ângulos que ficam todos, ou à esquerda, ou à direita da transversal, na fig.(1) são chamados _____.</p>
<p>\overleftrightarrow{AB} $\hat{3}$ e $\hat{4}$ secante ou transversal $\hat{5}$ e $\hat{6}$ abaixo</p>	<p>15- Na fig.(2) são internos os ângulos _____, _____, _____ e _____ e são externos os ângulos _____, _____, _____ e _____.</p>
<p>alternos</p>	<p>19- Na fig.(1) os ângulos $\hat{4}$ e $\hat{6}$ são alternos internos porque ficam um de cada lado da secante e entre as duas retas. Os outros dois ângulos que são também alternos <u>in</u>ternos, nesta figura, são os ângulos _____ e _____.</p>
<p>secante ou transversal</p>	<p>23- Na fig.(2) os ângulos alternos externos são $\hat{1}$ e _____, $\hat{4}$ e _____.</p>
<p>correspondentes</p>	<p>27- Na fig. (2) são correspondentes os ângulos $\hat{1}$ e $\hat{3}$, $\hat{2}$ e $\hat{4}$, $\hat{5}$ e _____, $\hat{6}$ e _____.</p>
<p>alternos internos</p>	<p>31- Os pares de ângulos $\hat{1}$ e $\hat{7}$, $\hat{2}$ e $\hat{8}$ da fig.(1) e $\hat{1}$ e $\hat{5}$, $\hat{4}$ e $\hat{8}$ da figura (2) são chamados _____.</p>
<p>correspondentes.</p>	<p>35- Na figura (2), 1 e 3, 2 e 4, 5 e 7, 6 e 8, também são ângulos _____.</p>



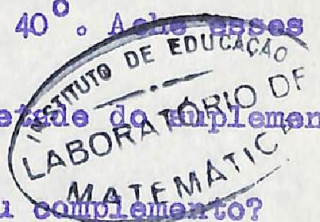
$\hat{3}, \hat{4}$ $\hat{1}, \hat{2}$	<p>4- Os ângulos $\hat{3}, \hat{4}, \hat{5}$ e $\hat{6}$ da figura (1) são ditos <u>ân</u>gulos _____ porque ficam situados _____ as duas retas \overleftrightarrow{AB} e \overleftrightarrow{CD}.</p>
<p>externos</p>	<p>8- Quando duas retas são cortadas por uma _____ formam _____ ângulos, e os que não ficam entre as duas retas são chamados _____.</p>
<p>colaterais</p>	<p>12- Os ângulos 1, 4, _____ e _____ da figura (1) são chamados colaterais porque todos ficam à _____ da secante.</p>
$\hat{2}, \hat{3}, \hat{6}$ e $\hat{7}$ $\hat{1}, \hat{4}, \hat{5}$ e $\hat{8}$	<p>16- Os ângulos que estão situados em lados opostos da transversal e não são adjacentes, nem opostos pelo vértice, são chamados alternos. Assim, os ângulos $\hat{3}$ e $\hat{5}$, $\hat{4}$ e $\hat{6}$, $\hat{1}$ e $\hat{7}$, $\hat{2}$ e $\hat{8}$ da figura (1) e os ângulos $\hat{2}$ e $\hat{6}$, $\hat{3}$ e $\hat{7}$, $\hat{1}$ e $\hat{5}$, $\hat{4}$ e $\hat{8}$ da figura (2) são _____.</p>
$\hat{3}$ e $\hat{5}$	<p>20- Na figura (2) os ângulos $\hat{2}$ e $\hat{6}$, $\hat{3}$ e $\hat{7}$, são chama<u>dos</u> ângulos _____.</p>
$\hat{5}$ $\hat{8}$	<p>, 24- Dois ângulos colaterais, não adjacentes, sendo um interno e outro externo são chamados correspondentes. Na figura (1) são correspondentes os ângulos $\hat{1}$ e $\hat{2}$ e $\hat{6}$, $\hat{4}$ e _____, $\hat{3}$ e _____.</p>
$\hat{7}$ $\hat{8}$	<p>28- Os ângulos correspondentes a <u>ém</u> _____ colaterais e não adjacentes devem ser um _____ e o outro _____.</p>
<p>alternos- externos</p>	<p>32- Os pares de ângulos $\hat{4}$ e $\hat{5}$, $\hat{3}$ e $\hat{6}$ da figura (1) e $\hat{2}$ e $\hat{3}$, $\hat{6}$ e $\hat{7}$ da figura (2) são chamados _____.</p>



- A- a) Grau é uma unidade de medida do ângulo.
 b) O grau corresponde a $\frac{1}{90}$ do ângulo reto.
- B- a) Bissetriz de um ângulo é a semi-reta que partindo do vértice divide o ângulo em dois outros congruentes.
 b) Bissetriz de um ângulo é a reta que divide o ângulo em duas partes iguais.
- C- a) Ângulo agudo é aquele cuja medida é maior do que 90° .
 b) Dois ângulos agudos são sempre complementares.
- D- a) Dois ângulos retos são suplementares.
 b) Todos os ângulos suplementares são retos.
- E- a) Quando dois ângulos têm o mesmo complemento são congruentes.
 b) Quando dois ângulos têm o mesmo suplemento são congruentes.
- F- a) A medida do ângulo reto é a metade da medida do ângulo raso.
 b) Ângulo reto é todo ângulo que tem os lados perpendiculares entre si.
- G- a) Dois ângulos adjacentes são suplementares quando seus lados exteriores estão em linha reta.
 b) Todos os ângulos que têm o mesmo vértice e não são adjacentes são chamados opostos pelo vértice.
- H- a) Quando duas retas se cortam formam quatro ângulos opostos pelo vértice, todos congruentes entre si.
 b) Todos os ângulos que têm o mesmo vértice e não são adjacentes, são chamados opostos pelo vértice.
- 4- O suplemento de um ângulo vale o triplo do complemento do mesmo ângulo. Ache esse ângulo.
- 5- A diferença entre dois ângulos complementares é de 32° . Quais são esses ângulos?
- 6- A diferença entre dois ângulos suplementares é de 40° . Ache esses ângulos.
- 7- A soma de dois ângulos vale 125° e um deles é a metade do suplemento do outro. Determine a medida dos dois ângulos.
- 8- Qual é o ângulo que é igual à quarta parte do seu complemento?
- 9- Na figura abaixo, \overleftrightarrow{RS} é a transversal; escreva, aos pares, os ângulos:



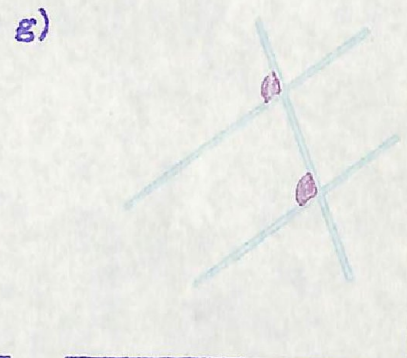
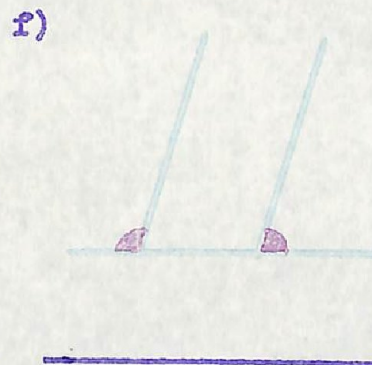
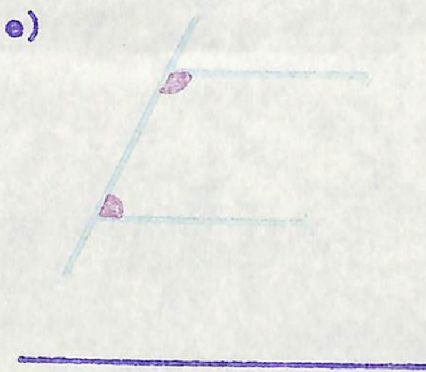
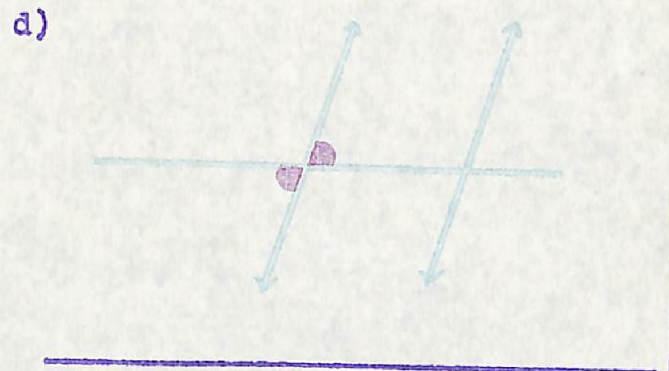
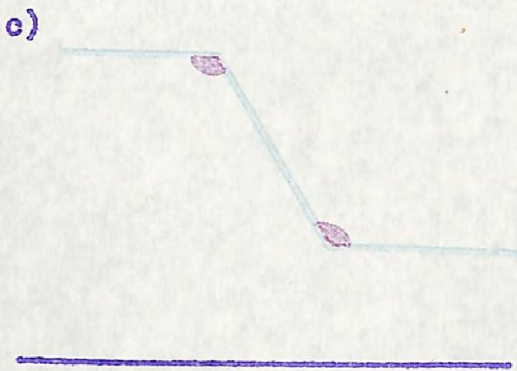
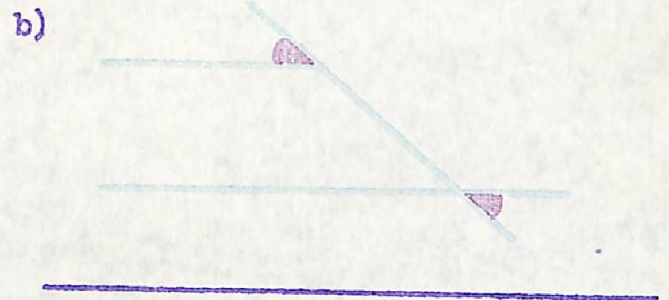
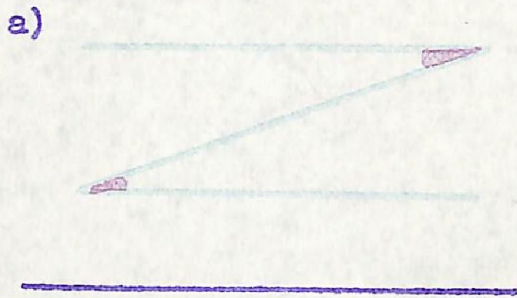
- a) alternos internos _____
- b) correspondentes _____
- c) alternos externos _____
- d) colaterais internos _____



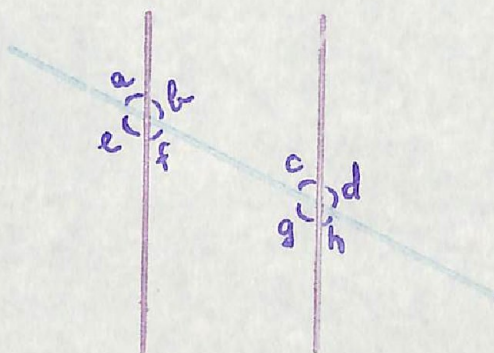
e) colaterais externos _____

f) opostos pelo vértice _____

10- Dê o nome aos pares de ângulos assinalados nas seguintes figuras:



11) Observe a figura e complete cada item de acordo com o que observou:

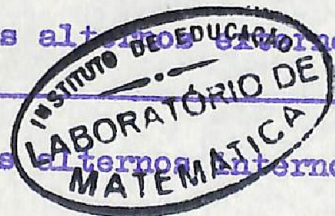


a) Os ângulos alternos externos são _____

b) Os ângulos alternos internos são _____

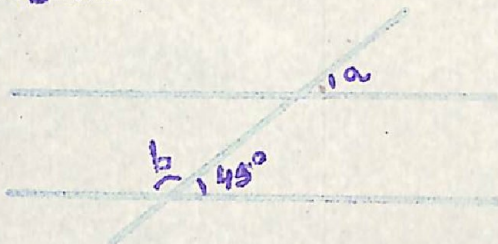
c) Os ângulos correspondentes são _____

d) O ângulo \hat{a} é oposto pelo vértice ao ângulo _____.

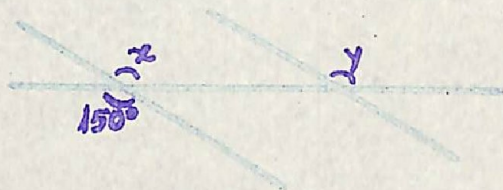


e) O ângulo \hat{g} é oposto pelo vértice ao ângulo _____, assim também o ângulo \hat{c} é oposto ao ângulo _____ e o ângulo \hat{b} é oposto ao ângulo _____.

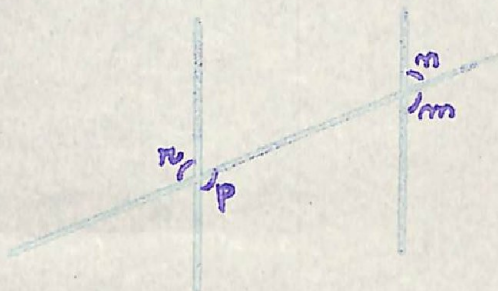
12- Ache a medida dos ângulos assinalados em cada uma das figuras que seguem:



$m(\hat{a}) =$ _____
 $m(\hat{b}) =$ _____



$m(\hat{x}) =$ _____
 $m(\hat{y}) =$ _____



$m(\hat{m}) =$ 115° 20'
 $m(\hat{n}) =$ _____
 $m(\hat{p}) =$ _____
 $m(\hat{q}) =$ _____

6 - POLÍGONOS

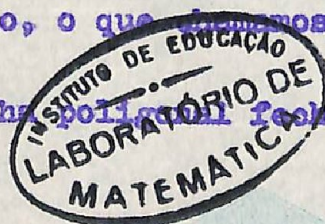
Figuras geométricas formadas por segmentos consecutivos não colineares são ditas "poligonais".

POLIGONAL ABERTA - Uma poligonal é aberta quando a extremidade do último segmento não coincide com a origem do primeiro.

POLIGONAL FECHADA - Uma poligonal é fechada quando a extremidade do último segmento coincide com a origem do primeiro.

Uma poligonal fechada delimita, no plano, o que chamamos de "**POLÍGONO**".

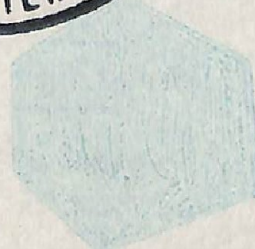
POLÍGONO é a figura formada por uma linha poligonal fechada e pela região do plano limitada por ela.



poligonal aberta



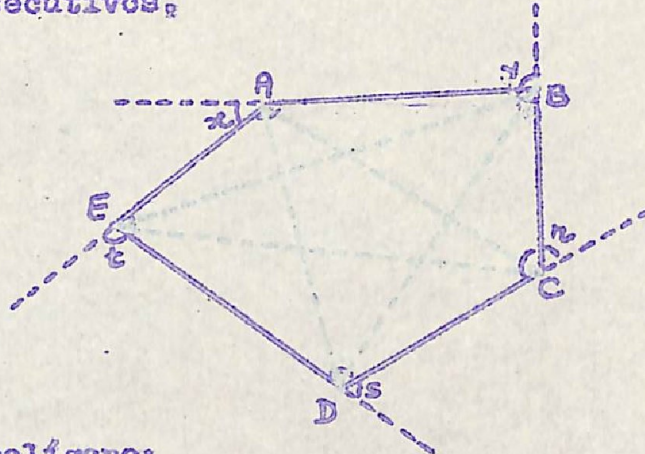
poligonal fechada



polígono

ELEMENTOS DE UM POLÍGONO

- 1- Lados são os segmentos que formam a linha poligonal fechada.
- 2- Vértices são os pontos comuns a dois lados.
- 3- Ângulos internos são os ângulos formados por dois lados consecutivos.
- 4- Ângulos externos são os ângulos formados por um lado do polígono e pelo prolongamento do lado consecutivo.
- 5- Diagonais são os segmentos determinados pela união de dois vértices não consecutivos.



ABCDE é um polígono:

- 1) \overline{AE} , \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} , \overline{DE} são seus lados;
- 2) A, B, C, D, E são seus vértices;
- 3) \hat{EAB} , \hat{ABC} , \hat{BCD} , \hat{CDE} , \hat{DEA} são os ângulos internos;
- 4) \hat{x} , \hat{y} , \hat{z} , \hat{s} , \hat{t} são ângulos externos;
- 5) \overline{AC} , \overline{AD} , \overline{BD} , \overline{BE} , \overline{CE} são as diagonais.

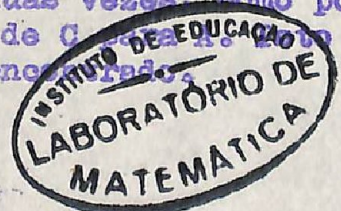
NÚMERO DE DIAGONAIS DE UM POLÍGONO

Um polígono convexo de "n" lados possui $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonais.

Vamos justificar essa afirmação: Traçando todas as diagonais possíveis de um vértice do polígono, temos (n-3) diagonais, pois podemos unir o vértice dado a todos os outros menos a ele mesmo e aos dois que lhe são consecutivos. Se fizermos o mesmo com cada um dos demais vértices teremos n(n-3) diagonais. Mas, como a diagonal une dois vértices, nesta contagem cada diagonal está considerada duas vezes, como por exemplo, quando traçamos de A para C, e depois de C para A. Isto nos leva a dividir por dois o número de diagonais encontradas.

Então teremos:

$$\text{Nº de diagonais} = \frac{n(n-3)}{2}$$

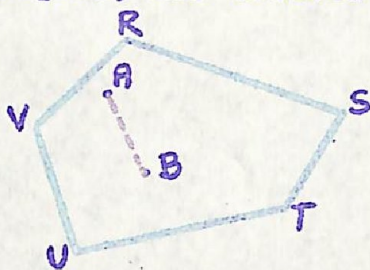


CLASSIFICAÇÃO DOS POLÍGONOS

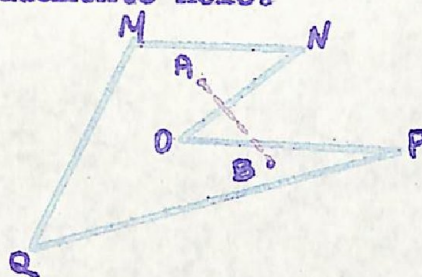
Os polígonos classificam-se em convexos e não convexos.

POLÍGONOS CONVEXOS - Um polígono é convexo quando, e somente quando, todos os segmentos determinados por dois de seus pontos quaisquer, estiverem inteiramente contidos nele.

POLÍGONOS NÃO CONVEXOS - Um polígono é não convexo quando, e somente quando, pelo menos um segmento determinado por dois de seus pontos quaisquer, não estiver contido inteiramente nele.



Polígono convexo



Polígono não convexo

Quanto ao número de lados e de ângulos os polígonos classificam-se em:

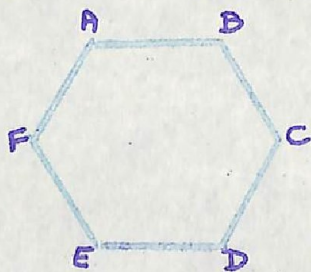
- Triângulo - polígono de três lados e três ângulos;
- Quadrilátero - polígono de quatro lados e quatro ângulos;
- Pentágono - polígono de cinco lados e cinco ângulos;
- Hexágono - polígono de seis lados e seis ângulos;
- Heptágono - polígono de sete lados e sete ângulos;
- Oitógono - polígono de oito lados e oito ângulos;
- Eneágono - polígono de nove lados e nove ângulos;
- Decágono - polígono de dez lados e dez ângulos;
- Undecágono - polígono de onze lados e onze ângulos;
- Duodecágono - polígono de doze lados e doze ângulos;
- Pentadecágono - polígono de quinze lados e quinze ângulos;
- Icoságono - polígono de vinte lados e vinte ângulos.

Os demais polígonos não têm nomes especiais. (Um polígono de "n" lados terá "n" ângulos).

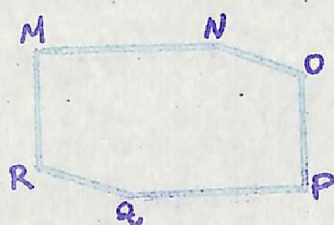
POLÍGONO REGULAR - Polígono regular é aquele que tem todos os ângulos e todos os lados congruentes.

O polígono de lados congruentes se diz equilátero e o polígono de ângulos congruentes se diz equiângulo.

CONGRUÊNCIA DE POLÍGONOS - Se através de um movimento de rotação e/ou translação dois polígonos podem ser levados a coincidir ponto a ponto, diremos que eles são congruos ou congruentes.



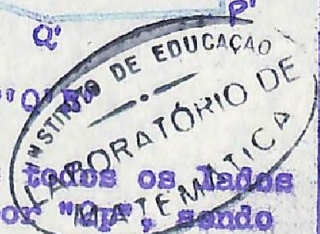
ABCDEF é um polígono regular

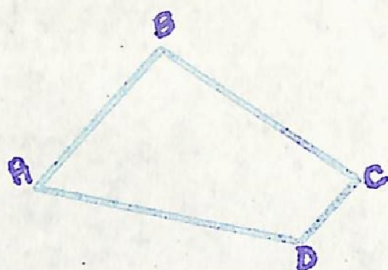


$MNOPQR \cong M'N'O'P'Q'R'$



PERÍMETRO DE UM POLÍGONO - A soma das medidas de todos os lados do polígono é seu perímetro. Indicaremos o perímetro por "p", sendo "p" o semi-perímetro.





Na figura ao lado, $m(AB) = 2,5\text{cm}$

$m(BC) = 3\text{cm}$

$m(CD) = 1\text{cm}$

$m(DA) = 3,5\text{cm}$,

então o perímetro do polígono ABCD será de 10cm.

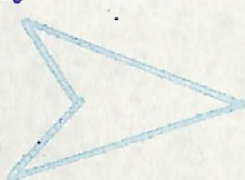
PROPRIEDADES DOS POLÍGONOS CONVEXOS:

- 1- A soma das medidas dos ângulos internos de um polígono de "n" lados é igual a $180^\circ(n-2)$. (Demonstração nº 22 da 2ª parte).
- 2- A soma das medidas dos ângulos externos de um polígono qualquer é sempre igual a 360° . (Demonstração nº 23).

EXERCÍCIOS - GRUPO 3

1) Identifique, nos desenhos, as poligonais abertas:

a)



b)



c)



d)



2) Desenhe um polígono de quatro lados assinalando suas diagonais.

3) Coloque "x" ao lado das sentenças verdadeiras:

a) O triângulo é um polígono. ()

b) O losango é um polígono regular. ()

c) Todo o icosaédono é regular. ()

d) Todo o polígono regular é equilátero. ()

e) Todo o polígono equilátero é regular. ()

f) O retângulo é equiângulo e portanto regular. ()

g) O trapézio não é polígono regular.

4) Quantas diagonais possui um decágono?

5) Calcule o número de diagonais de um icosaédono.

6) Qual é o polígono que tem nove diagonais?

7) Calcule o número de lados de um polígono cujo número de diagonais é vinte e sete.

8) Calcule o número de lados de um polígono cujo número de diagonais é igual ao dobro do número de lados.

9) Qual o polígono cujo número de diagonais é igual ao número de lados?

