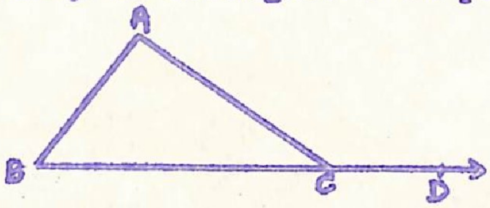
7 - TRIÂNGULOS

Definição: Triângulo é um polígono de três lados.



A, B, C são os vértices

$\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ são os lados

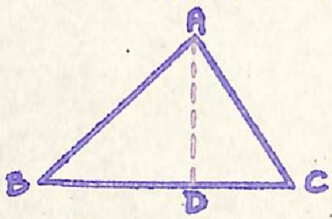
$B\hat{A}C$, $A\hat{B}C$, $A\hat{C}B$ são os ângulos internos. Se for óbvio qual o triângulo mencionado, podemos representar seus ângulos por $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$.

$A\hat{C}D$ é um ângulo externo do triângulo. Todo o ângulo externo de um triângulo forma um ângulo de 180° com o ângulo interno que lhe é adjacente. Os outros dois ângulos são chamados ângulos internos não adjacentes.

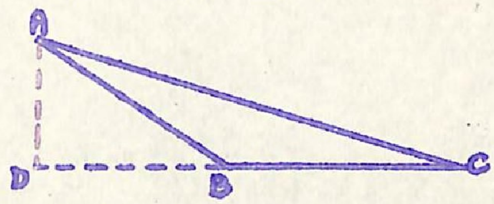
Base - chama-se base do triângulo o lado sobre o qual o triângulo está assente. BC é a base do triângulo dado.

Altura, mediana e bissetriz

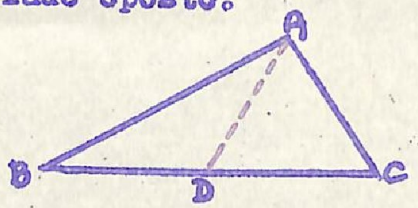
Chama-se altura de um triângulo o segmento da perpendicular traçada de um vértice ao lado oposto ou ao seu prolongamento.



$\overline{AD}$ é a altura



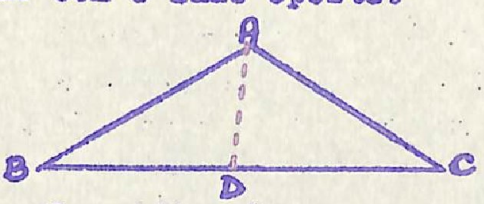
Chama-se mediana o segmento que une um vértice com o ponto médio do lado oposto.



$\overline{AD}$ é mediana

$\overline{BD} \cong \overline{DC}$

Chama-se bissetriz de um triângulo o segmento da bissetriz de um de seus ângulos, cujas extremidades são o vértice do ângulo e a intersecção com o lado oposto.



$\overline{AD}$ é bissetriz do triângulo

$\hat{x} \cong \hat{y}$

Classificação

Podemos classificar os triângulos quanto às medidas de seus lados e quanto à medida de seus ângulos internos.

1º) Quanto à medida de seus lados um triângulo pode ser:

a) Equilátero: possui os três lados congruentes

b) Isósceles: possui dois lados congruentes

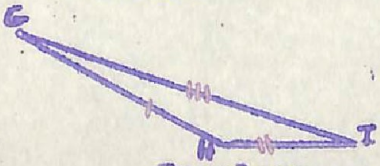
c) Escaleno: possui três lados com medidas diferentes.

Equilátero

$\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{AC}$

Isósceles

$\overline{ED} \cong \overline{DF}$

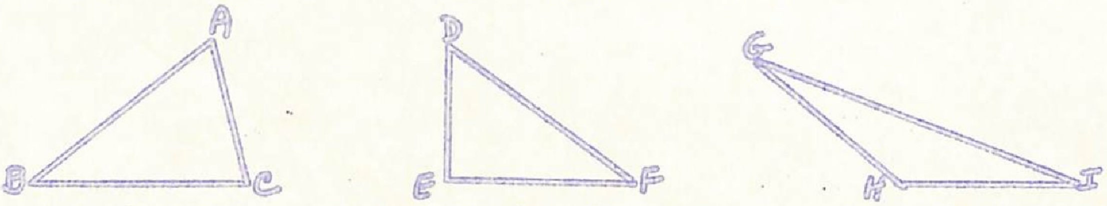


Escaleno

$\overline{GH} \neq \overline{GI} \neq \overline{HI}$

2º) Quanto à medida de seus ângulos internos o triângulo pode ser:

a) Acutângulo: possui os três ângulos agudos;
b) Retângulo: possui um ângulo reto;
c) Obtusângulo: possui um ângulo obtuso.



Acutângulo — $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ são âng. agudos
Retângulo — $\hat{E}$ é ang. reto
Obtusângulo — $\hat{H}$ é angulo obtuso

<u>Observação</u>: No triângulo retângulo os lados que formam o ângulo reto são denominados <u>catetos</u> e o lado oposto ao ângulo reto é a <u>hipotenusa</u>.

Congruência de triângulos.

Consideremos os triângulos ABC e DEF abaixo

Comumente dizemos que dois triângulos são congruentes se possuem a mesma forma e o mesmo tamanho.

Se transportarmos um triângulo sobre o outro, veremos que coincidem exatamente, então diremos que são congruentes.

Podemos escrever mostrando os pares que se correspondem, assim:

$A \longleftrightarrow D$, $B \longleftrightarrow E$, $C \longleftrightarrow F$.

Temos aí uma correspondência bijetora entre os vértices dos dois triângulos. Podemos escrever as correspondências bijetoras de um modo mais rápido, numa só linha:

$$ABC \longleftrightarrow DEF$$

Isto nos dá automaticamente uma correspondência entre os lados dos triângulos:

$\overline{AB} \longleftrightarrow \overline{DE}$, $\overline{AC} \longleftrightarrow \overline{DF}$, $\overline{BC} \longleftrightarrow \overline{EF}$,

e uma correspondência entre os ângulos dos dois triângulos:

$\hat{A} \longleftrightarrow \hat{D}$, $\hat{B} \longleftrightarrow \hat{E}$, $\hat{C} \longleftrightarrow \hat{F}$.

Podemos agora enunciar a definição de congruência entre dois triângulos:

<u>Definição</u> - Seja dada uma correspondência $ABC \longleftrightarrow DEF$ entre os vértices de dois triângulos. Se os pares de lados correspondentes são congruentes e os pares de ângulos correspondentes são congruentes, então a correspondência $ABC \longleftrightarrow DEF$ é chamada uma congruência entre os dois triângulos.

Quando escrevemos $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ queremos dizer que a correspondência $ABC \longleftrightarrow DEF$ é uma congruência.

A simples expressão $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ nos diz seis coisas de uma só vez, a saber:

$\overline{AB} \cong \overline{DE}$ ou $m(\overline{AB}) = m(\overline{DE})$

$\overline{AC} \cong \overline{DF}$ ou $m(\overline{AC}) = m(\overline{DF})$

$\overline{BC} \cong \overline{EF}$ ou $m(\overline{BC}) = m(\overline{EF})$

$\hat{A} \cong \hat{D}$ ou $m(\hat{A}) = m(\hat{D})$

$\hat{B} \cong \hat{E}$ ou $m(\hat{B}) = m(\hat{E})$

$\hat{C} \cong \hat{F}$ ou $m(\hat{C}) = m(\hat{F})$

Para concluir que dois triângulos são congruentes não é necessário comparar todos os seus lados e todos os seus ângulos. Existem casos especiais, em que, conhecendo-se três de seus elementos podemos dizer se os triângulos são ou não congruentes.

Os casos especiais de congruência de triângulos são:

1- Teorema LAL (lado, ângulo, lado): Se dois triângulos possuem dois lados e o ângulo compreendido por esses lados respectivamente congruentes, então eles são congruentes. (Ver demonstração nº 4 na segunda parte deste trabalho).

2- Teorema ALA (ângulo, lado, ângulo): Se dois triângulos possuem dois ângulos e o lado compreendido entre eles, respectivamente congruentes, então eles são congruentes. (Demonstr. nº 5).

3- Teorema LLL (lado, lado, lado): Se dois triângulos possuem os três lados respectivamente congruentes, então eles são congruentes. (Demonstração nº 6).

4- Teorema LAA_o (lado, ângulo, ângulo oposto): Se dois triângulos tiverem um lado, um ângulo adjacente e o ângulo oposto a esse lado respectivamente congruentes, então esses dois triângulos são congruentes. (Demonstração nº 17).

PROPRIEDADES DOS TRIÂNGULOS: (Estas propriedades serão demonstradas na segunda parte deste trabalho).

1- A medida de qualquer lado de um triângulo é sempre menor que a soma e maior que a diferença das medidas dos outros dois lados. (Demonstração nº 12).

2- Os ângulos da base de um triângulo isósceles são congruentes ou " se dois lados de um triângulo isósceles têm a mesma medida, então os ângulos opostos a esses lados são congruentes". (Demonstr. nº 7).

3- A bissetriz relativa ao ângulo do vértice de um triângulo isósceles é também mediana e altura. (Demonstr. nº 8).

4- Se dois ângulos de um triângulo são congruentes, então os lados opostos a esses ângulos são congruentes. (Demonstr. nº 9).

5- Um ângulo externo de um triângulo é maior que qualquer ângulo interno que não lhe é adjacente. (Demonstr. nº 10).

6- Se em um triângulo dois lados não são congruentes, então ao maior lado opõe-se o maior ângulo. (Demonstr. nº 11).

7- Quando dois triângulos retângulos têm a hipotenusa e um cateto respectivamente congruentes, então eles são congruentes.(Demonstr.nº13)

8- A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer é igual a 180^o . (Demonstr. nº 19).

9- A Medida do ângulo externo de um triângulo é igual à soma das medidas dos dois ângulos internos não adjacentes. (Demonstr. nº 20).

10- Em qualquer triângulo isósceles as alturas relativas aos lados congruentes são congruentes.(Demonstr. nº 24).

11- Em qualquer triângulo isósceles as medianas relativas aos lados congruentes são congruentes. (Demonstr. nº25).

12- Em qualquer triângulo isósceles as bissetrizes do triângulo relativas aos ângulos da base são congruentes. (Demonstr. nº 26).

13- As três mediatrizes dos lados de um triângulo concorrem num mesmo ponto, equidistante dos três vértices. Esse ponto de encontro é chamado "circuncentro". (Demonstr. nº 28).

14- O segmento que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e vale a metade de sua medida. (Demonstração nº 29).

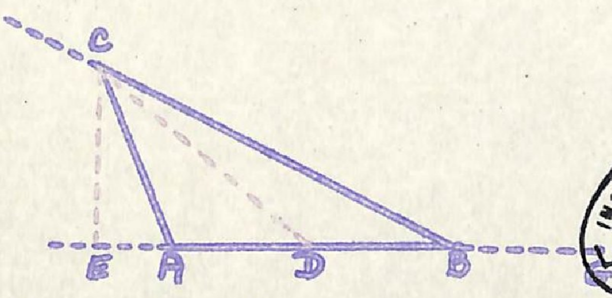
15- As três alturas de um triângulo concorrem num mesmo ponto chamado "ortocentro". (Demonstr. nº 30).

16- As três bissetrizes internas de um triângulo concorrem num mesmo ponto equidistante dos lados. Esse ponto de encontro é chamado "incentro". (Demonstr. nº 31).

17- As três medianas de um triângulo concorrem num mesmo ponto situado a dois terços de cada uma a partir do vértice. Esse ponto é chamado "baricentro" ou "centro de gravidade do triângulo". (Demonstr. nº 32).

<u>EXERCÍCIOS</u> - <u>GRUPO 4</u>

1) De acordo com a figura que segue, escreve o que se pede:



a) A base do triângulo dado é o segmento ________________.

b) Seus lados são os segmentos ________, ________ e ________.

c) A altura do triângulo ABC é o segmento ________ e uma de suas medianas é o segmento ________.

d) Os ângulos internos são ________, ________ e ________.

e) O ângulo externo adjacente ao ângulo $A\hat{B}C$ é ________.

2) Com segmentos de 4cm, 9cm e 15cm podemos construir um triângulo? Por que?

3) Construa um triângulo isósceles com 3cm de base e 5cm de altura. No triângulo que você construiu marque os ângulos que são congruentes.

4) Construa um triângulo retângulo cuja medida dos catetos seja 4cm e 5cm respectivamente. Assinale nesse triângulo qual a hipotenusa e e quais os catetos.

5) Os lados de um triângulo ABC têm as seguintes medidas: $m(\overline{AB}) = 6cm$, $m(\overline{AC}) = 4cm$, $m(\overline{BC}) = 9cm$. Qual é o maior ângulo desse triângulo?

6) Num triângulo MNP tem-se: $m(\hat{M}) = 65^\circ$, $m(\hat{N}) = 80^\circ$, $m(\hat{P}) = 35^\circ$. Qual é o menor lado desse triângulo? E o maior lado?

7) Complete:

a) Se no triângulo RST, $\overline{ST}$ é o maior lado, então o maior ângulo será o ângulo ________.

b) Se no triângulo ABC, o ângulo $\hat{B}$ é o que tem menor medida, então o menor lado desse triângulo será o lado ________.

8) Num triângulo temos as seguintes medidas: 10cm, 8cm e 6cm para os lados e 30°, 90°, 60° para os ângulos. Escreva os pares ordenados: (lado, ângulo oposto).

9) Num triângulo MNP, retângulo em N, qual será o lado de maior medida?

10) Num triângulo retângulo qual será sempre o lado de maior medida? Por que?

11) Assinale qual ou quais dos conjuntos abaixo podem ser as medidas dos ângulos internos de um triângulo:

a) $\{40^\circ, 40^\circ, 120^\circ\}$

b) $\{75^\circ, 75^\circ, 30^\circ\}$

c) $\{45^\circ, 100^\circ, 35^\circ\}$

d) $\{90^\circ, 25^\circ, 75^\circ\}$

12) Num triângulo isósceles o ângulo do vértice mede 76°. Calcule a medida de cada ângulo da base.

13) Se num triângulo isósceles um dos ângulos da base mede $56^\circ 30'$, então o outro ângulo da base medirá ____________.

14) Determine a medida de cada ângulo interno de um triângulo isósceles, sabendo que um dos ângulos da base mede $38^\circ 15'$.

15) Calcule a medida de cada ângulo da base de um triângulo isósceles, sabendo que o ângulo externo do vértice mede $85^\circ 10'$.

16) Se dois ângulos de um triângulo medem respectivamente $56^\circ 10'$ e $66^\circ 30'$, calcule a medida do terceiro ângulo desse triângulo.

17) Se num triângulo retângulo um dos ângulos agudos mede 55°, então a medida do outro ângulo agudo será ____________.

18) Calcule a medida de cada ângulo agudo de um triângulo retângulo sabendo que a sua diferença é 24°.

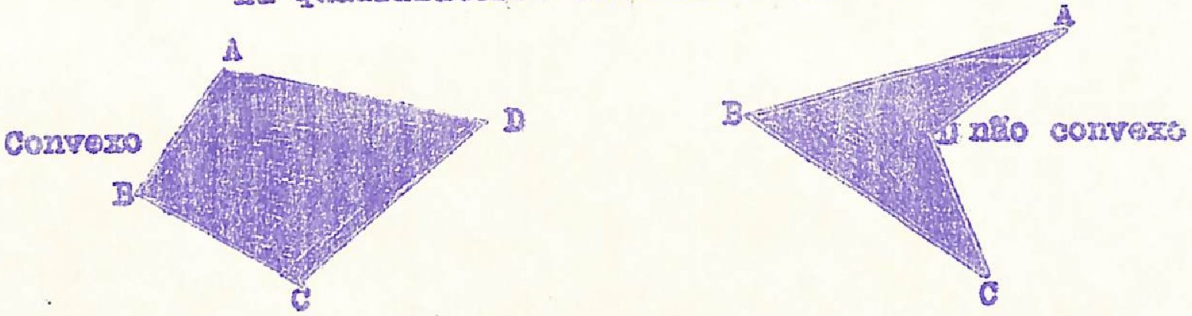
19) Num triângulo ABC, o ângulo externo $\hat{B}$ mede 140°, e o ângulo interno $\hat{C}$ mede 60°. Calcule a medida dos ângulos internos $\hat{A}$ e $\hat{B}$.

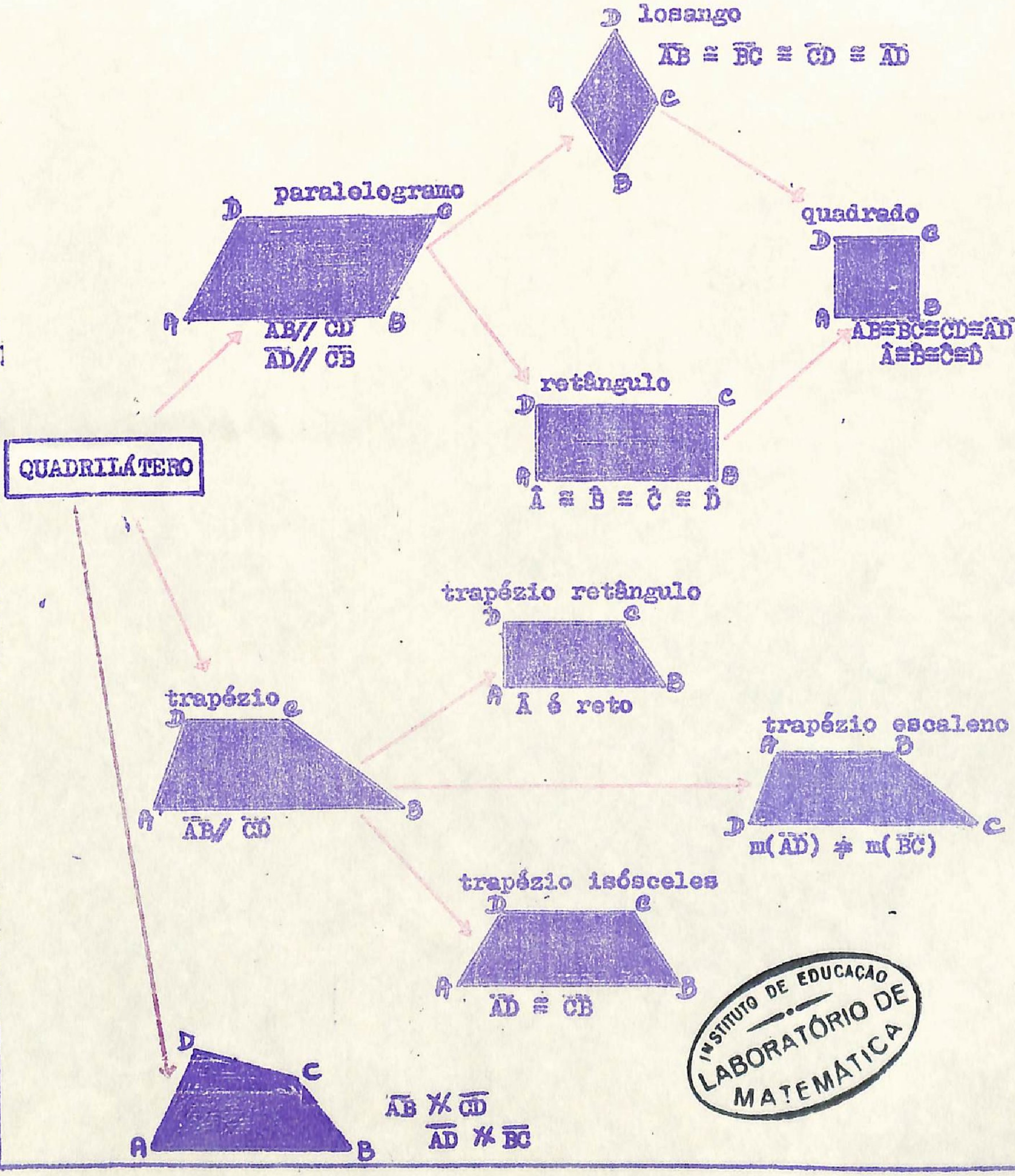
20) As medidas dos ângulos internos de um triângulo são proporcionais aos números 2, 3 e 5. Calcule quanto vale cada um desses ângulos.

21) Num triângulo ABC, os três ângulos têm, respectivamente, para expressão: $x + 36^\circ$, $2x - 15^\circ$ e $3x - 39^\circ$. Calcule o valor de cada um desses ângulos.

8 - QUADRILÁTEROS

Conceito: Quadrilátero é um polígono de 4 lados.
Há quadriláteros convexos e não convexos.



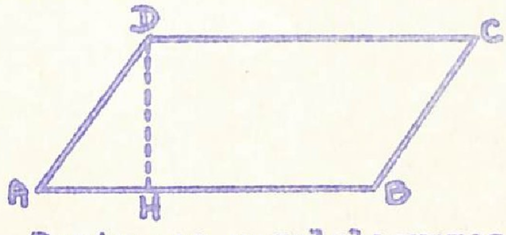


Propriedade dos quadriláteros convexos:

Num quadrilátero a soma das medidas dos ângulos internos vale 360°. (Ver demonstração na 2ª parte deste trabalho).

PARALELOGRAMOS

Conceito: Paralelogramo é o quadrilátero que possui os dois pares de lados opostos respectivamente paralelos.

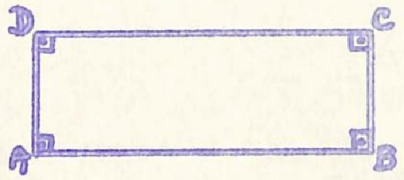


$\overline{AB} // \overline{CD}$ e $\overline{AD} // \overline{BC}$

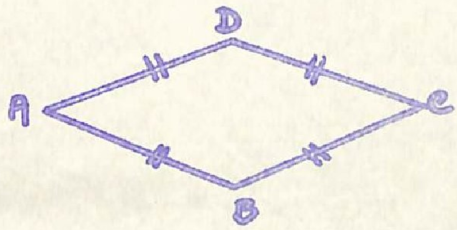
$\overline{AB}$ (ou $\overline{CD}$) é a base

$\overline{DH}$ é altura

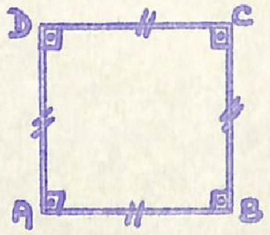
Dentre os paralelogramos destacam-se os seguintes tipos particulares:



Retângulo é o paralelogramo que tem os quatro ângulos congruentes (retos)



Losango é o paralelogramo que tem os quatro lados congruentes.



Quadrado é o paralelogramo que tem os quatro lados congruentes e os quatro ângulos congruentes(retos)

Propriedades dos paralelogramos (demonstrações na 2ª parte)

1- Se um quadrilátero é um paralelogramo então os lados opostos são congruentes. (Demonstração nº 33)

2- Se um quadrilátero é um paralelogramo, então as diagonais interceptam-se ao meio. (Demonstração nº 35)

3- Se um quadrilátero é um paralelogramo então os ângulos opostos são congruentes. (Demonstração nº 34)

4- As diagonais do retângulo são congruentes.(Demonstr. nº 36)

5- As diagonais do losango são perpendiculares entre si e bissetrizes dos ângulos internos. (Demonstr. nº 37)

TRAPÉZIOS

Conceito: Trapézio é o quadrilátero que possui dois, e apenas dois, de seus lados paralelos.

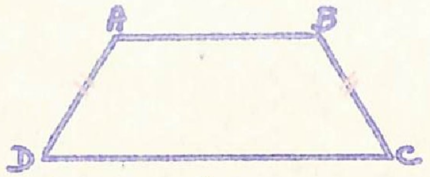
Esses lados paralelos são chamados bases do trapézio. Assim o trapézio tem duas bases: uma maior e outra menor.

Base média é o segmento que une os pontos médios dos lados não paralelos de um trapézio.

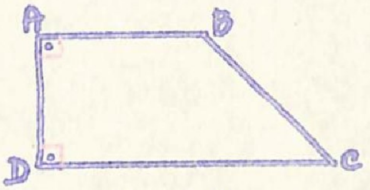
Lados transversos são os lados não paralelos do trapézio.

CLASSIFICAÇÃO DOS TRAPÉZIOS

Trapézio isósceles é aquele que possui os lados não paralelos congruentes: $AD \cong BC$

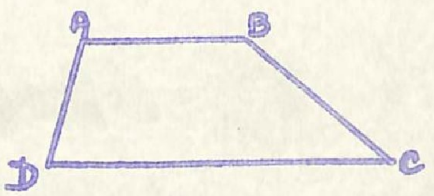


Trapézio retângulo é o trapézio que possui dois ângulos retos.(Um dos lados não paralelos é perpendicular às bases).



$m(\hat{A}) = m(\hat{D}) = 90^\circ$

Trapézio escaleno é o trapézio em que os lados não paralelos não são congruentes.



$m(\overline{AD}) \neq m(\overline{BC})$

Propriedades dos trapézios (ver demonstrações na 2ª parte deste trabalho.

1- Em todo trapézio os ângulos adjacentes a um lado transverso são suplementares. (Demonstração nº 38)

2- Em todo trapézio a base média é paralela às outras duas bases e mede a semi-soma de suas medidas. (demonstr. nº 39)

3- Em todo trapézio isósceles os ângulos adjacentes a uma mesma base são congruentes. (Demonstr. nº 40)

4- Quando os ângulos adjacentes a uma mesma base de um trapézio são congruentes, o trapézio é isósceles. (Recíproca da nº 3 e a demonstração é nº 41)

5- Em um trapézio isósceles as diagonais são congruentes. (Demonstração nº 42)

6- Em um trapézio isósceles as diagonais cortam-se em segmentos respectivamente congruentes.(Demonstração nº 43)

TRAPEZOIDES

Conceito: Trapezoide é o quadrilátero que não possui lados paralelos.

EXERCÍCIOS - Grupo 6

1- Um paralelogramo tem dois lados cujas medidas são 15cm e 9cm. Qual é a medida dos outros dois lados?

2- O perímetro de um paralelogramo mede 42cm. Um dos lados tem 11,5cm. Qual é a medida de cada um dos outros três lados?

3- O perímetro de um retângulo é de 16,4 m. Calcule a medida da base sabendo que a altura tem 2,8 m.

4- Quanto mede o lado de um losango que tem 28cm de perímetro?

5- Calcule a medida de cada ângulo de um paralelogramo sabendo que um desses ângulos mede 65°.

6- Um dos ângulos externos de um paralelogramo mede 45°. Calcule a medida de cada ângulo interno desse paralelogramo.

7- A diferença entre dois ângulos consecutivos de um paralogramo é 30°. Quanto mede cada ângulo desse paralogramo?

8- Num paralelogramo, um dos ângulos obtusos é igual à soma das medidas dos ângulos agudos. Calcule quanto vale cada ângulo desse paralelogramo.

9- Um dos ângulos agudos de um paralelogramo é igual à terça parte de um dos ângulos obtusos. Determine os ângulos desse paralelogramo.

10- Calcule a medida dos ângulos de um losango sabendo que um deles vale 70°.

11- Uma das diagonais de um losango forma com um dos lados um ângulo de 50°. Calcule a medida de cada ângulo desse losango.

12- As diagonais de um losango medem 5cm e 3cm. Construa esse losango.

13- A base média de um trapézio é de 12cm. Calcule a medida das bases desse trapézio sabendo que sua diferença é de 8cm.

14- O ângulo agudo de um trapézio retângulo mede 72°. Calcule a medida do ângulo obtuso desse trapézio.

15- Calcule a medida de cada ângulo de um trapézio isósceles, sabendo que um deles mede 60°.

16- A altura de um trapézio isósceles forma com um dos lados um ângulo de 40°. Calcule a medida dos ângulos desse trapézio.

17- Calcule a medida dos ângulos de um trapézio isósceles, sabendo que os ângulos agudos são iguais à metade dos ângulos obtusos.

18- Calcule a medida dos ângulos diferentes de um trapézio retângulo sabendo que a diferença de suas medidas vale 118°.

9 - CIRCUNFERÊNCIA E CÍRCULO

Conceito:

a) Circunferência é a figura formada pelos pontos de um plano equidistantes de um ponto fixo desse plano,

ou

Seja O um ponto e r um número positivo. A circunferência de centro O e raio r é o conjunto de todos os pontos do plano cuja distância a O é igual a r.