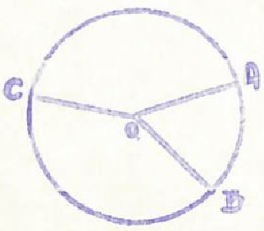
b) Círculo é a região do plano limitada pela circunferência, incluindo pontos da própria circunferência.

Elementos:



O ponto O é o centro da circunferência.

A distância de qualquer ponto da circunferência ao seu centro é chamada raio.

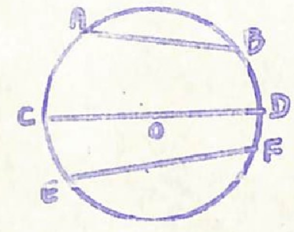
$m(\overline{OA}) = m(\overline{OB}) = m(\overline{OC}) = r$

Os segmentos cujos extremos pertencem à circunferência são chamados cordas.

$\overline{AB}$, $\overline{CD}$ e $\overline{EF}$ são cordas.

Toda a corda que passa pelo centro denomína-se diâmetro.

$\overline{CD}$ é diâmetro.



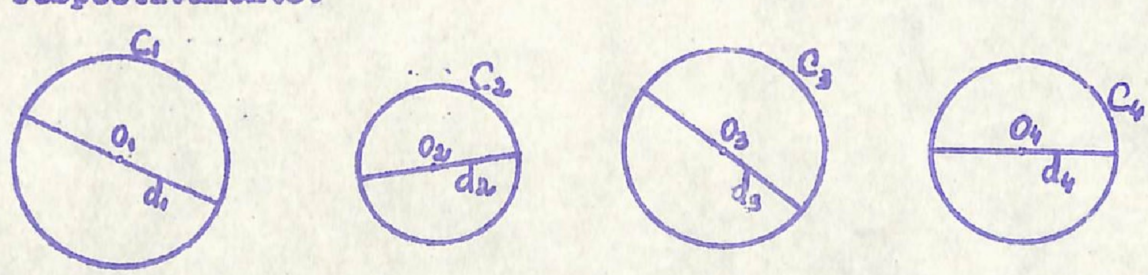
Observação: Raio é também um segmento cujos extremos são o centro e um ponto qualquer da circunferência.

A medida do diâmetro é igual ao dobro da medida do raio, em qualquer circunferência.

Observe que estamos usando a palavra raio com dois sentidos, significando um segmento ou um número, mas deve ficar claro no contexto qual o significado desejado.

COMPRIMENTO DA CIRCUNFERÊNCIA

Sejam as circunferências de centros O_1, O_2, O_3, e O_4 representadas abaixo cujas medidas são C_1, C_2, C_3 e C_4 e diâmetros d_1, d_2, d_3 e d_4 respectivamente.



Para cada circunferência, a razão entre a sua medida e a do seu diâmetro é constante, isto é

$$\frac{C_1}{d_1} = \frac{C_2}{d_2} = \frac{C_3}{d_3} = \frac{C_4}{d_4} = \text{constante}$$

Esta constante é o número irracional que vale aproximadamente 3,1416.

Assim: $\frac{C_1}{d_1} = \pi$, $\frac{C_2}{d_2} = \pi$, $\frac{C_3}{d_3} = \pi$ e $\frac{C_4}{d_4} = \pi$

De maneira geral, podemos escrever:

$$\frac{C}{d} = \pi \quad , \text{ de onde } \quad C = \pi \times d$$

Como $d = 2r$ temos finalmente $C = 2\pi r$ que é a fórmula que permite encontrar o comprimento da circunferência.

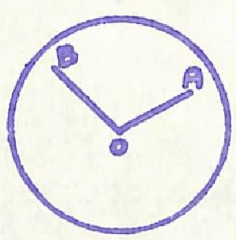
<u>Exemplo</u>:

O comprimento da circunferência cujo diâmetro mede 12 cm é 12π cm, pois:

$d = 12cm$ $r = 6cm$ $C = 2\pi . 6cm$ $C = 12\pi$ cm.

<u>Interior e exterior de uma circunferência</u>

Os pontos do plano cuja distância ao centro de uma circunferência é menor que o raio, constituem o interior de uma circunferência.

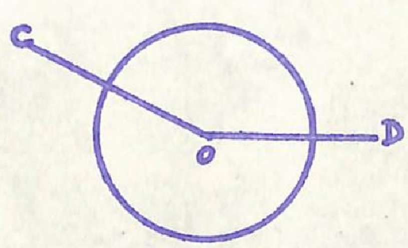


$m(\overline{OA}) < r$

$m(\overline{OB}) < r$

A e B são pontos do interior da circunferência.

Os pontos do plano cuja distância ao centro de uma circunferência é maior que o raio, constituem o exterior de uma circunferência.



$m(\overline{OC}) > r$

$m(\overline{OD}) > r$

C e D são pontos do exterior da circunferência.

<u>Posições relativas de uma reta e uma circunferência</u>

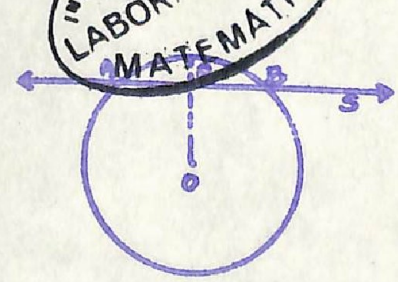
Uma reta pode ter com uma circunferência dois pontos em comum, um ponto em comum ou nenhum ponto em comum.

a) A reta que intercepta a circunferência em dois pontos é chamada <u>reta secante</u>.

<u>Observação</u>: 1- A distância do centro à reta <u>s</u> é menor que o raio.

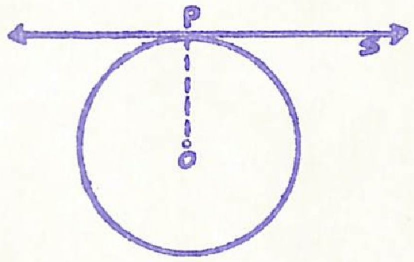
$m(\overline{OP}) < r$

2- Toda corda determina uma secante e toda secante contém uma corda.



b) A reta que intercepta a circunferência em um e um só ponto é chamada <u>reta tangente</u>. Esse ponto é chamado ponto de tangência ou ponto de contato. Dizemos que a reta e a circunferência se tangenciam nesse ponto.

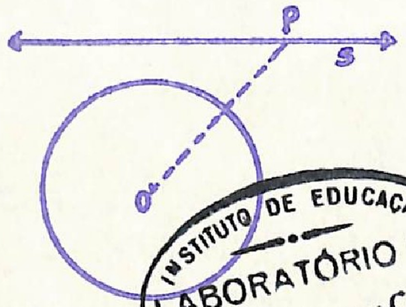
Observação: A distância do centro do círculo à reta s (tangente) é igual ao raio. Então $\overline{OP}$ é perpendicular a s.



$$m(\overline{OP}) = r$$

c) A reta que não intercepta a circunferência em nenhum ponto é chamada reta externa.

Observação: A distância do centro à reta externa é maior que o raio.

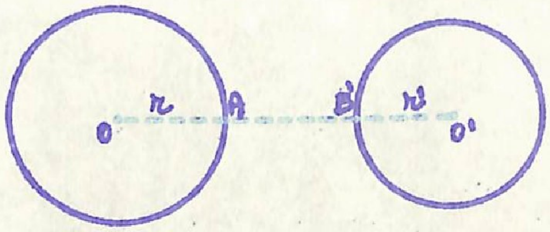


$$m(\overline{OP}) > r$$

Posições relativas de duas circunferências

Duas circunferências de um mesmo plano podem ocupar, uma em relação à outra, cinco posições diferentes, a saber:

a) Circunferências exteriores - Duas circunferências são exteriores quando elas não têm nenhum ponto comum. A reta que passa pelos centros é chamada linha dos centros.



Consideremos duas circunferências de centros O e O' e raios r e r' respectivamente.

Unindo-se O com O' resulta:

$m(\overline{OO'}) > r + r'$, pois pela figura temos:

$$m(\overline{OO'}) = M(\overline{OA}) + m(\overline{AB'}) + m(\overline{BO'})$$
$$m(\overline{OA}) = r$$
$$m(\overline{BO'}) = r'$$
$$m(\overline{OO'}) > r + r'$$

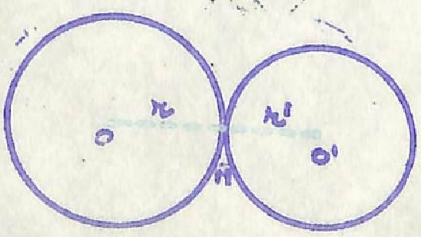
Logo, duas circunferências são exteriores quando a distância dos centros é maior que a soma dos respectivos raios.

b) Circunferências tangentes exteriormente - Duas circunferências são tangentes exteriormente quando todos os pontos são exteriores com exceção de apenas um que é comum. O ponto comum denomina-se ponto de contato ou ponto de tangência.

Unindo-se O com O' resulta:

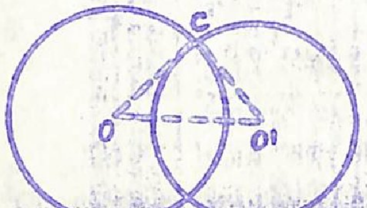
$m(\overline{OO'}) = r + r'$, pois

$$m(\overline{OO'}) = m(\overline{OA}) + m(\overline{O'A})$$
$$m(\overline{OA}) = r$$
$$m(\overline{O'A}) = r'$$
$$m(\overline{OO'}) = r + r'$$



Logo, duas circunferências são tangentes exteriormente quando a distância dos centros é igual à soma dos respectivos raios

c) Circunferências secantes - Duas circunferências são secantes quando elas têm dois pontos em comum.



Unindo-se O e O' e um dos pontos comuns C, teremos o triângulo OCO'.

Aplicando-se o teorema: "Em todo triângulo, qualquer lado é menor que a soma dos outros dois e maior que a sua diferença", temos:

$m(\overline{OO'}) < r + r'$

$m(\overline{OO'}) > r - r'$, ou

$r - r' < m(\overline{OO'}) < r + r'$, pois

$m(\overline{OO'}) < m(\overline{OC}) + m(\overline{O'C})$

$m(\overline{OO'}) < r + r'$

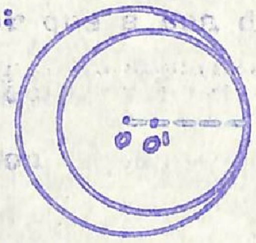
$m(\overline{OO'}) > r - r'$

Logo, duas circunferências são secantes quando a distância dos centros é maior do que a diferença dos raios e menor do que a soma.

d) Circunferências tangentes interiormente - Duas circunferências são tangentes interiormente quando têm um ponto em comum e todos os pontos interiores à que tem menor raio, são também interiores à outra.

$\overline{OA} = r$ (contém o centro O' da circunferência de raio r')

$m(\overline{OO'}) = r - r'$, pois de acordo com a figura:



$m(\overline{OO'}) = m(\overline{OA}) - m(\overline{O'A})$

$m(\overline{OA}) = r$

$m(\overline{O'A}) = r'$

$m(\overline{OO'}) = r - r'$

Logo, duas circunferências são tangentes interiormente quando a distância dos centros é igual à diferença dos raios.

e) Circunferências interiores - Duas circunferências são interiores quando não têm um ponto em comum e todos os pontos internos da de menor raio são também internos da outra.

O raio $\overline{OA} = r$ contém o raio $\overline{O'A'} = r'$ e podemos escrever:

$m(\overline{OO'}) + m(\overline{O'A'}) + m(\overline{A'A}) = r$, ou

$m(\overline{OO'}) = r - m(\overline{O'A'}) - m(\overline{A'A})$

ou ainda

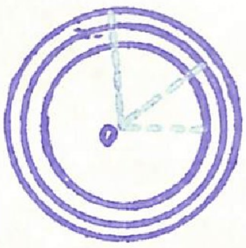
$\overline{OO'} = r - r' - \overline{AA'}$ $(\overline{O'A'} = r')$

de onde concluimos que

$\overline{OO'} < r - r'$

Logo, uma circunferência é interior a outra quando a distância dos centros é menor do que a diferença dos raios.

Duas ou mais circunferências interiores são ditas Concêntricas quando possuem o mesmo centro.



"O" é o centro comum das três circunferências da figura ao lado.

ARCOS

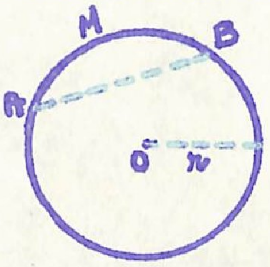
Dois pontos A e B de uma circunferência dividem-na em duas partes. Cada parte denomina-se arco circular ou simplesmente arco e os pontos A e B são os extremos.

Representa-se cada um dos arcos escrevendo: AMB e ANB onde M e N são respectivamente pontos de cada um dos arcos determinados por A e B.

Quando os arcos são designados com apenas duas letras fica convencionado:

a) as duas letras são as que indicam os seus extremos;

b) a representação vale somente para o menor arco.



Assim, para representarmos AMB escreve-se AB.

Observação: A corda que une os extremos de um arco, subtende esse arco.

PROPRIEDADES DE ARCOS E CORDAS (Demonstr. na 2ª parte)

1- O diâmetro perpendicular a uma corda divide-a ao meio. (Demonstração nº 44).

2- O diâmetro que divide ao meio uma corda é perpendicular a essa corda. (Demonstr. nº 45).

3- A mediatriz de uma corda qualquer passa pelo centro da circunferência. (Demonstr. nº 46).

4- Num mesmo círculo ou em círculos congruentes, cordas de medidas iguais subtendem arcos de medidas iguais e reciprocamente. (Demonstração nº 47).

5- Num mesmo círculo ou em círculos congruentes, se duas cordas têm medidas diferentes, à maior corda corresponde o maior arco e reciprocamente. (Demonstr. nº 48).

6- A tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio que passa pelo ponto de contato. (Demonstr. nº 49).

EXERCÍCIOS - GRUPO 6

1- Pode existir uma circunferência de raio igual a 8cm e na qual uma corda meça 20cm? Por que?

2- O diâmetro de um círculo de centro O mede 10cm. Calcule a distância de um ponto exterior P à circunferência desse círculo, sabendo que a distância PO mede 18cm.

3- Numa circunferência cujo raio meça 15cm, pode existir uma corda com 25 cm? Por que?

4- Determine a distância entre os centros de duas circunferências tangentes exteriormente cujos raios medem 8cm e 3cm.

5- Se os raios de duas circunferências tangentes interiormente medem, respectivamente, 12cm e 7cm, determine a distância entre os centros dessas circunferências.

6- Diga qual a posição relativa de duas circunferências que satisfaçam as seguintes condições, sendo OO' a distância entre seus centros, r e r' seus respectivos raios:

a) $m(\overline{OO'}) = 15cm$, $r = 7cm$, $r' = 4cm$

b) $m(\overline{OO'}) = 0cm$, $r = 15cm$, $r' = 9cm$

c) $m(\overline{OO'}) = 9cm$, $r = 11cm$, $r' = 6cm$

d) $m(\overline{OO'}) = 28cm$, $r = 4cm$, $r' = 10cm$

e) $m(\overline{OO'}) = 6cm$, $r = 13cm$, $r' = 17cm$

O ÂNGULO EM RELAÇÃO AO CÍRCULO

1. ÂNGULO CENTRAL - Ângulo central de um círculo é o ângulo cujo vértice coincide com o centro do círculo.

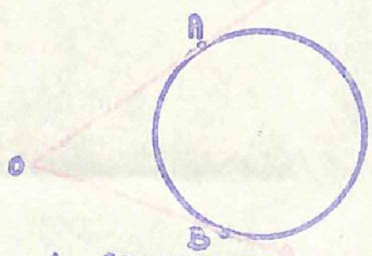
AÔB é ângulo central

O ângulo central tem a mesma medida do arco compreendido entre os seus lados.

2. ÂNGULO INSCRITO - Ângulo inscrito é o ângulo cujo vértice é um dos pontos da circunferência e os lados são semi-retas secantes de orígem no vértice.

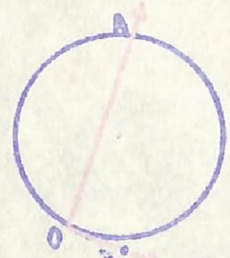
AÔB é ângulo inscrito

3. ÂNGULO CIRCUNSCRITO - Ângulo circunscrito é o ângulo formado por duas semi-retas tangentes ao círculo, com orígem num mesmo ponto exterior ao círculo, sendo este ponto o vértice do ângulo.



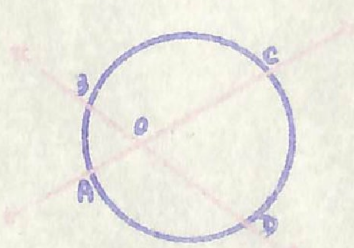
AÔB é ângulo circunscrito

4. ÂNGULO DE SEGMENTO - Ângulo de segmento é o ângulo inscrito em que um dos lados é a semi-reta tangente ao seu vértice e o outro é a semi-reta secante que passa pelo seu vértice.



AÔB é ângulo de segmento

5. ÂNGULO EXCÊNTRICO INTERNO - Ângulo excêntrico interno é o ângulo que tem como vértice um ponto interior ao círculo, distinto do centro, e os seus lados são semi-retas secantes.



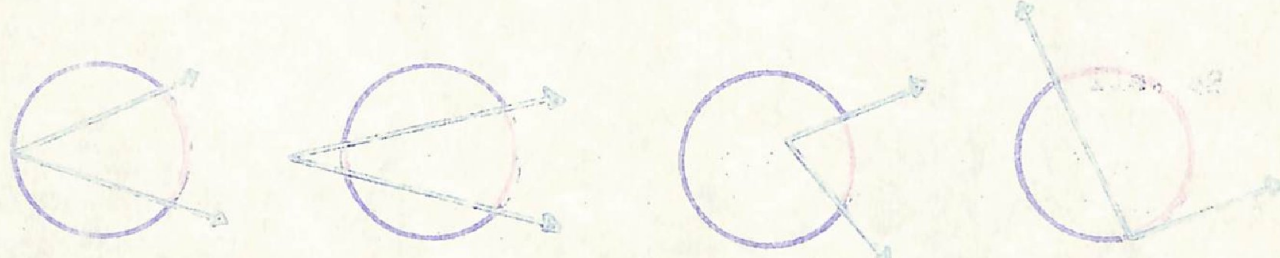
Os ângulos AÔB e CÔB são ângulos excêntricos internos.

6. ÂNGULO EXCÊNTRICO EXTERNO - Ângulo excêntrico externo é o ângulo que tem como vértice um ponto exterior ao círculo e os seus lados são ambos semi-retas secantes ou uma é secante e a outra é tangente ao círculo, com origem no vértice.

AÔB e CÔD são ângulos excêntricos externos

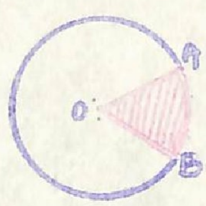
ARCO INTERCEPTADO

Nas figuras seguintes, o ângulo intercepta o arco ou os arcos desenhados em vermelho.

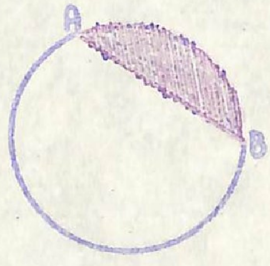


Dizemos que um ângulo intercepta um arco quando:
a) as extremidades do arco estão sobre os lados do ângulo;
b) todos os outros pontos do arco estão no interior do ângulo;
c) cada lado do ângulo contém uma extremidade do arco.

SETOR CIRCULAR - Setor circular é a região do círculo compreendida entre dois raios e o arco que os mesmos interceptam.



SEGMENTO CIRCULAR - Segmento circular é a região do plano limitada por um arco de circunferência e a corda do arco.



Observamos que a corda divide o círculo em dois segmentos, salvo indicação expressa em contrário, consideramos sempre o menor segmento.

Nota: Se a corda for o diâmetro, o círculo fica dividido em dois segmentos circulares congruentes, denominados semi-círculos.

ZONA CIRCULAR - Zona circular é a região do círculo limitada por duas de suas cordas paralelas entre sí.

COROA CIRCULAR - Coroa circular é a região do círculo compreendida entre duas circunferências concêntricas de raios distintos.

$r \neq r'$

PROPRIEDADES DE ÂNGULOS E ARCOS. (Demonstr. na 2ª parte)

1- Numa mesma circunferência ou em circunferências congruentes, a razão de dois ângulos centrais é igual à razão dos arcos compreendidos entre seus lados. (Demonstr. nº 50).

2- O ângulo inscrito tem por medida a metade do arco compreendido entre seus lados. (Demonstr. nº 51).

3- O ângulo de segmento tem por medida a metade do arco compreendido entre seus lados. (Demonstr. nº 52).

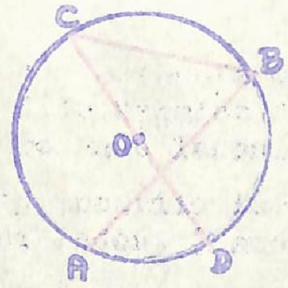
4- O ângulo excêntrico interno tem por medida a metade da soma das medidas dos arcos compreendidos entre seus lados e entre as semi-retas opstas a esses lados. (Demonstr. nº 53).

5- O ângulo excêntrico externo tem por medida a semi-diferença dos arcos compreendidos entre seus lados. (Demonstr. nº 54)

EXERCÍCIOS - GRUPO 7

1) Determine as medidas que se pedem:

a)



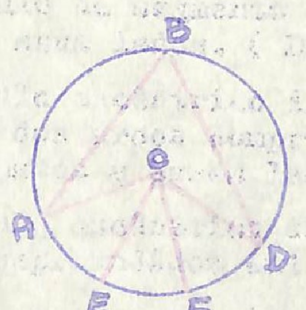
$m(C\hat{B}A) = 60^\circ$

$m(\widehat{CB}) = 93^\circ$

$m(\widehat{AD}) =$ ________

$m(D\hat{C}B) =$ ________

b)



$\widehat{AE} \cong \widehat{EF} \cong \widehat{FD}$

$m(E\hat{C}F) = 40^\circ$

$m(A\hat{B}D) =$ ________

c)

$\overline{NQ}$ é diâmetro

$m(M\hat{O}Q) = 74^\circ$

$m(\widehat{PQ}) = 130^\circ$

$m(N\hat{P}Q) =$ ________

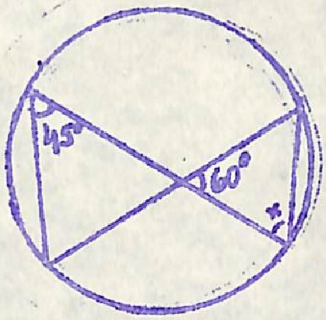
$m(\widehat{MN}) =$ ________

$m(N\hat{Q}P) =$ ________

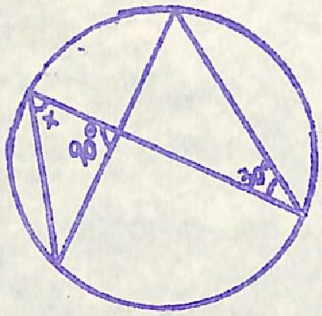
43 a)

2) Calcule a medida do ângulo "x" nas seguintes figuras:

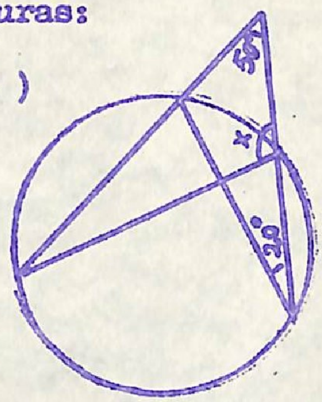
a)



b)



c)



3) Num ângulo inscrito um lado é o diâmetro e o outro lado subtende um arco igual ao triplo do arco compreendido entre os seus lados. Quanto mede esse ângulo inscrito?

4) Complete as lacunas abaixo, de acordo com a figura:

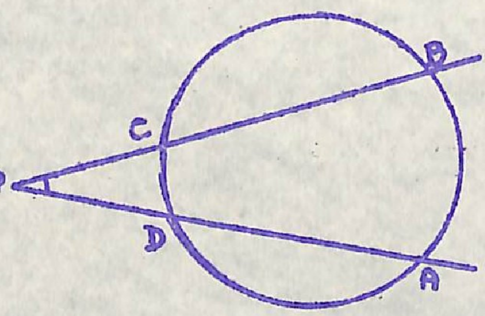
$m(E\hat{A}D) =$ ....

$m(A\hat{D}B) =$ ....

$m(A\hat{C}B) =$ ....

$m(C\hat{E}D) =$ ....

5) Assinale o ítem correto de acordo com a figura abaixo:



a) $\hat{m} = \dfrac{m(\overset{\frown}{AB}) - m(\overset{\frown}{CD})}{2}$

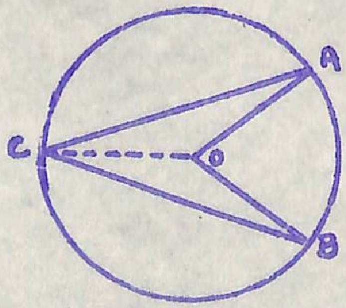
b) $\hat{m} = \dfrac{m(\overset{\frown}{AB}) - m(\overset{\frown}{CD})}{2}$

c) $\hat{m} = \dfrac{m(\overset{\frown}{CD}) - m(\overset{\frown}{AB})}{2}$

d) $\hat{m} = m(\overset{\frown}{AB}) - m(\overset{\frown}{CD})$

6) Na figura, abaixo, sabendo-se que $m(\overset{\frown}{BD}) = 60^\circ$ e $m(\overset{\frown}{BC}) = m(\overset{\frown}{CE}) = m(\overset{\frown}{ED})$, determinar o valor do ângulo $\hat{A}$.

7)



Na figura, sendo $m(A\hat{O}B) = 80^\circ$ e $m(\overset{\frown}{AC}) = m(\overset{\frown}{CB})$, determine os ângulos dos triângulos OCB e OAC.

SUGESTÕES DE EXERCÍCIOS DE REVISÃO

1. A OVELHA NEGRA - Sublinhe o nome que não pertence ao conjunto do qual as outras palavras fazem parte:

   a) losango, retângulo, trapézio, triângulo.

   b) escaleno, acutângulo, isósceles, equilátero.

   c) vértices, lados, alturas, medianas.

   d) quadrado, hexágono, ângulo, triângulo.

   e) raso, agudo, obtuso, bissetriz, nulo.

2. No diagrama abaixo estão escondidos os nomes indicados nas pistas que seguem. Localiza esses nomes no diagrama, assinala-os e escreve-os ao lado das definições dadas.

   a) Parte limitada por dois pontos de uma reta. ______________

   b) Semi-reta que partindo do vértice de um ângulo o divide em dois outros congruentes. ______________

   c) Intersecção de dois lados de um polígono. ______________

   d) Segmento de perpendicular que vai de um vértice de qualquer triângulo ao lado oposto. ______________

   e) Diz-se dos pontos ou segmentos que pertencem a uma mesma reta.

   ____

   f) Triângulo que possui dois lados congruentes. ______________

   g) Lado sobre o qual se assenta um triângulo. ______________

   h) Soma das medidas dos lados de um polígono. ______________

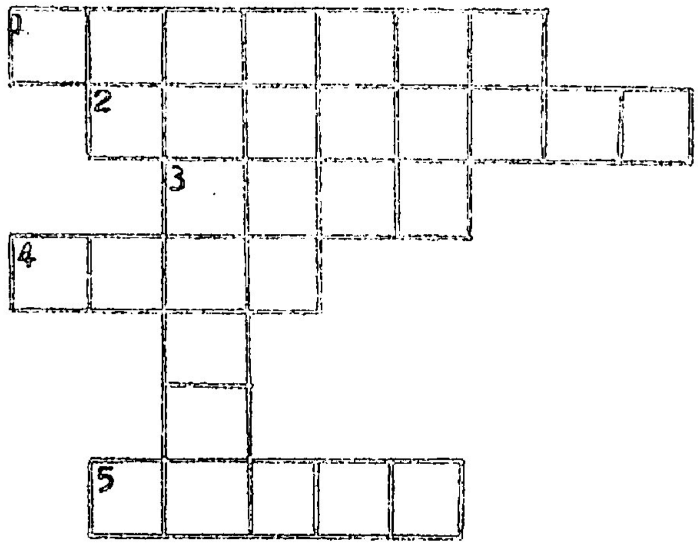
   i) Lados do triângulo retângulo que formam o ângulo reto. ______________

   j) Reta que corta outras retas ou corta uma figura qualquer.

   ____

P	B	P	E	R	I	M	E	T	R	O	I	S
E	I	D	I	O	N	V	O	P	I	H	S	O
R	S	I	C	A	T	E	T	O	S	I	O	L
I	S	A	B	P	E	R	I	M	E	S	S	I
S	E	G	M	E	N	T	O	E	L	O	G	[illegible]
O	T	O	C	O	L	I	N	E	A	R	E	S
A	R	U	T	L	A	C	O	L	I	N	L	I
C	I	A	B	I	S	E	C	A	N	T	E	A
P	Z	L	O	S	A	N	G	O	B	A	S	E

3. Completa as cruzadas usando para as horizontais os conceitos abaixo:



1- Reta que corta o círculo.
2- Maior corda de um círculo.
3- Distância do centro da circunferência a qualquer um de seus pontos.
4- Qualquer uma das partes da circunferência limitada por dois de seus pontos.
5- Segmento de reta determinado pelas extremidades de um arco.

4. Coloca as figuras que seguem no lugar certo do diagrama abaixo em que A é o conjunto dos quadriláteros: