10 - TRANSFORMAÇÕES

Toda transformação é uma função. Seu domínio é o conjunto de pontos do plano π e sua imagem também é π.

Logo, a transformação é uma função de π em π, que a cada ponto $X \in \pi$ associa um ponto $X' \in \pi$.

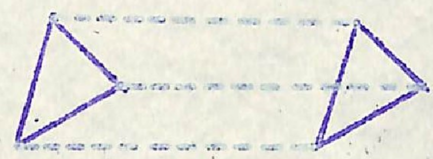
São transformações: a <u>translação</u>, a <u>rotação</u>, a <u>simetria</u>.

Toda transformação que conserva a forma e o tamanho das figuras é chamado <u>Isometria</u>.

Translação

Translação de uma figura é o movimento pelo qual todos os seus pontos se deslocam na mesma direção, percorrendo as mesmas distâncias. A translação consiste simplesmente em "empurrar" a figura de uma posição para outra, sem girá-la durante o movimento.

Exemplo:



Verificamos que $m(\overline{AA'}) = m(\overline{BB'}) = m(\overline{CC'})$ e que

$$\overline{AA'} \parallel \overline{BB'} \parallel \overline{CC'}.$$

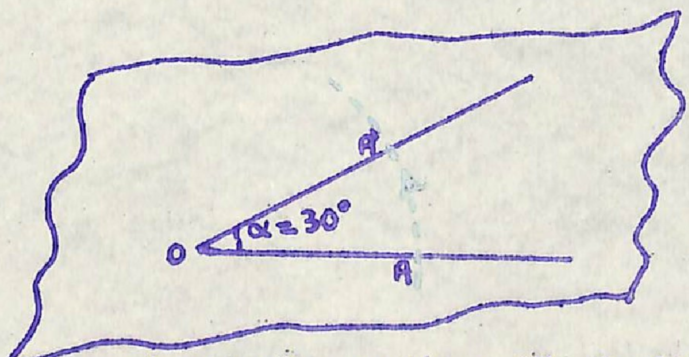
Dizemos então que uma translação é uma transformação do conjunto dos pontos do plano π em π, que a cada ponto $X \in \pi$ e $Y \in \pi$, associa o ponto $X' \in \pi$ e $Y' \in \pi$ respectivamente, tal que

$$m(\overline{XX'}) = m(\overline{YY'}) \quad e \quad \overline{XX'} \text{ é paralelo a } \overline{YY'}$$

A translação é uma isometria, pois conserva a forma e o tamanho das figuras.

Rotação

Rotação ao redor de um ponto.



Consideremos um ponto fixo <u>O</u>. Com centro em <u>O</u> e raio $\overline{OA}$ tracemos um arco de círculo, de α graus no sentido anti-horário. O movimento poderia ser no outro sentido). O ponto <u>A</u> passará a ocupar a posição <u>A'</u>.

Esse tipo de deslocamento é chamado <u>rotação</u>.

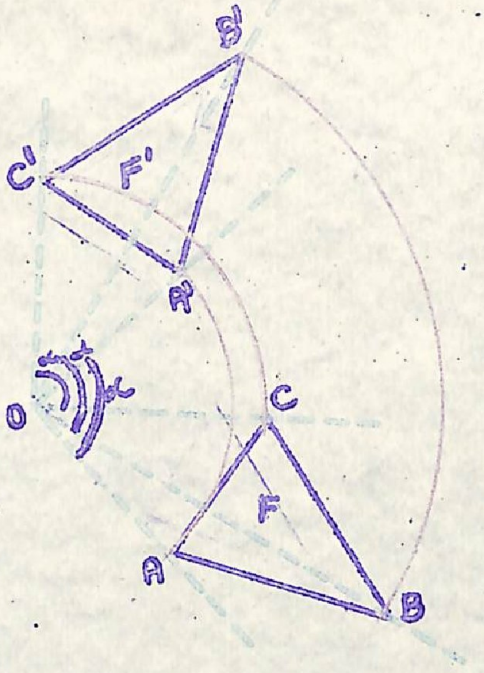
A rotação consta então de dois elementos: O centro <u>O</u> e o ângulo α.

Dada uma figura <u>F</u> sua imagem, pela rotação <u>R</u>, é encontrada determinando-se as imagens de todos os seus pontos por esta rotação.

Exemplo:

A figura F', da página seguinte, é a imagem de F pela rota -

ção R de centro O e $\alpha = 90^{\circ}$. A figura F se desloca para F' sem mudança de forma e tamanho.



Dizemos que uma rotação é uma transformação do conjunto dos pontos do plano π em π que a cada ponto $X \in \pi$ associa o ponto $X' \in \pi$ tal que:

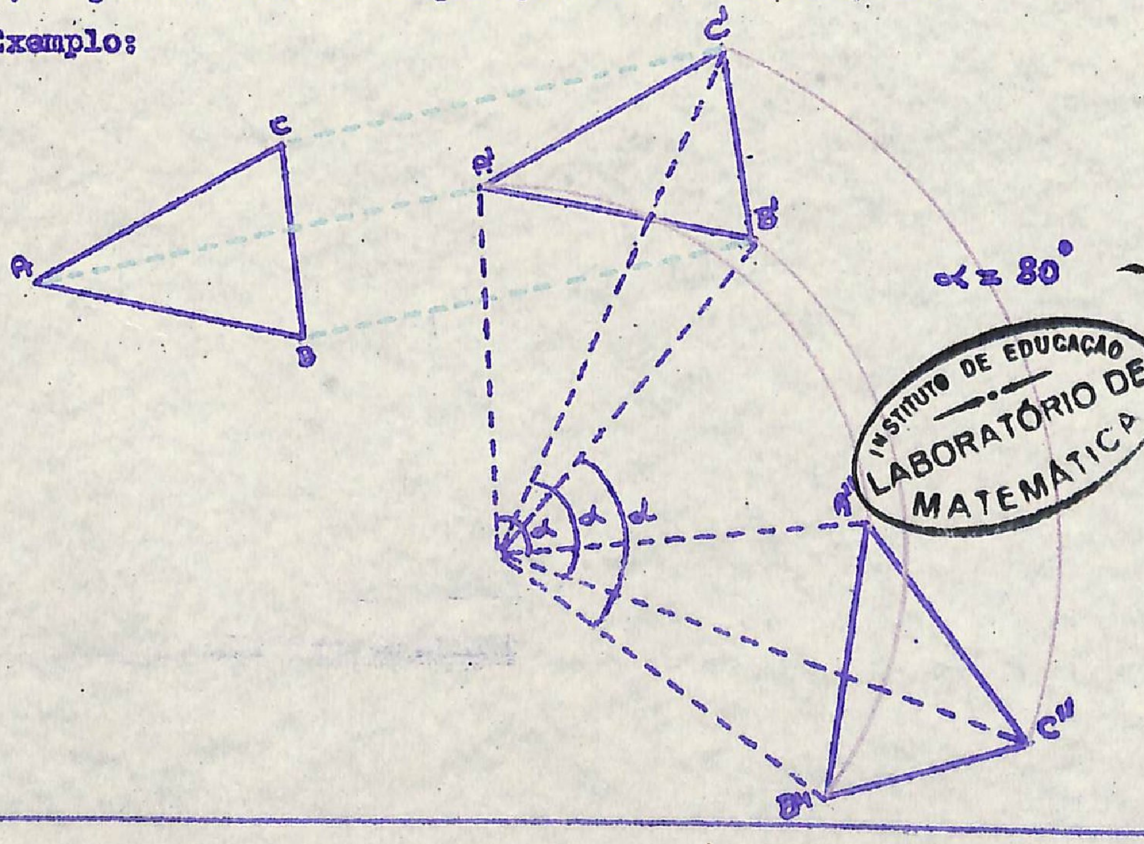
$$m(\overline{OX}) = m(\overline{OX'}) \quad \text{e} \quad X\hat{O}X' \text{ mede } \alpha \text{ graus.}$$

A rotação conserva a forma e o tamanho das figuras, ela é, portanto, uma <u>isometria</u>.

<u>Composição de translações e rotações</u>

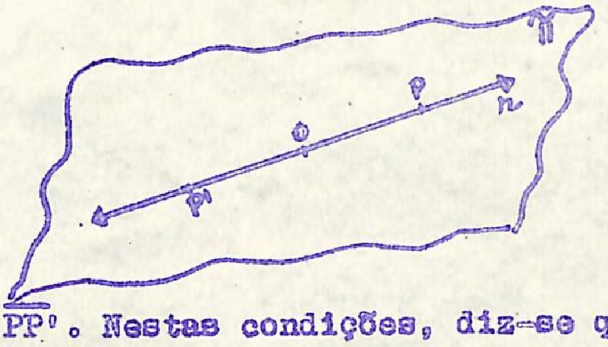
Há casos em que realizamos ao mesmo tempo uma translação e uma rotação, o que nos dá uma composição de transformações.

Exemplo:



Simetria

Simetria Central ou Puntual



Observe o desenho ao lado. O ponto O pertence ao plano π e r é uma reta que passa por O. Os pontos P e P' são marcados sobre r de tal modo que:

$$m(\overline{P'O}) = m(\overline{OP})$$

Portanto, O é o ponto médio de PP'. Nestas condições, diz-se que P é o ponto simétrico de P' em relação ao ponto O.

O ponto O é chamado centro de simetria. Diz-se também que P' é a imagem de P pela simetria de centro O.

Logo, a simetria de centro O é uma transformação do conjunto dos pontos do plano π em sí mesmo, que leva cada ponto X em X', simétrico de X em relação ao ponto O, isto é:

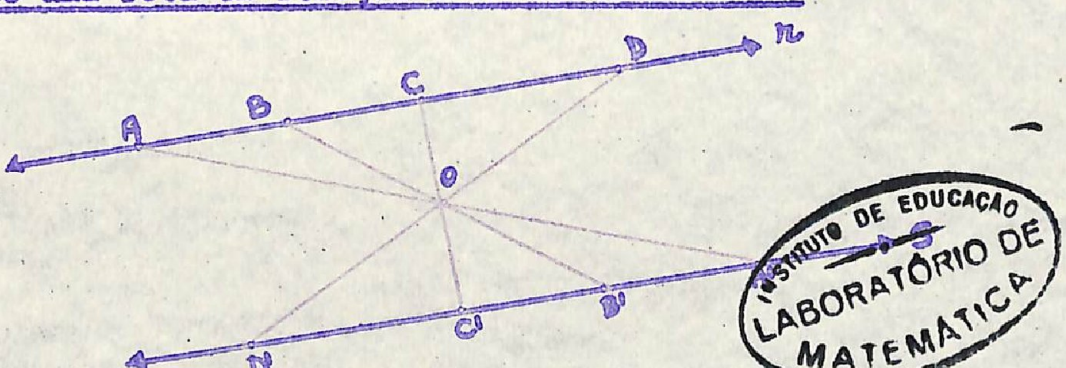
$$m(\overline{X'O}) = m(\overline{OX}).$$

É fácil verificar que a simetria de centro O é um caso especial de rotação, isto é, é uma rotação de 180^{o} e centro O.

Logo, sendo a rotação uma isometria, podemos afirmar que a simetria central é, também, uma isometria.

Imagens de figuras por "Simetria Puntual"

1) Imagem de uma reta em relação a um centro externo.



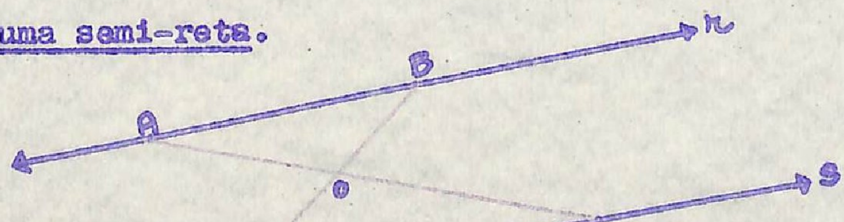
Consideremos a reta r com os pontos A, B, C, D.

O ponto O é o centro de simetria e O   r.

A', B', C' e D' são respectivamente as imagens de A, B, C e D, pela simetria de centro O.

É fácil verificar que as imagens estão sobre uma reta (s) que é paralela a r.

2) Imagem de uma semi-reta.

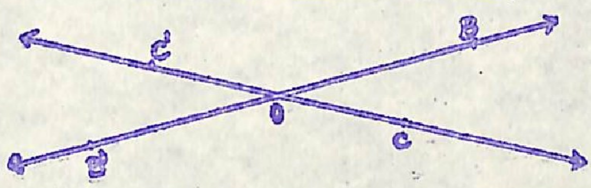


Sejam $\overrightarrow{AB}$ uma semi-reta, r a reta suporte de $\overrightarrow{AB}$ e O um centro de simetria. A imagem de r pela simetria de centro O é s.

A imagem de $\overrightarrow{AB}$ pela simetria de centro O é a semi-reta $\overrightarrow{A'B'}$

Observe que AB e A'B' têm sentidos opostos.

3) Imagem de um ângulo em relação ao vértice.



Observe que:

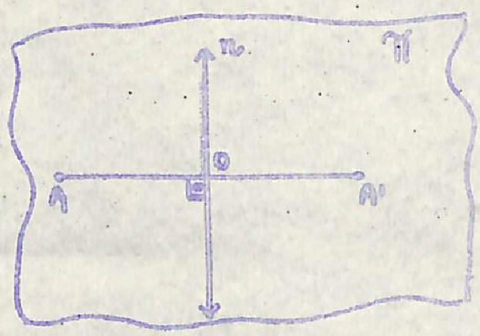
A imagem da semi-reta $\overrightarrow{OB}$ é a semi-reta $\overrightarrow{OB'}$.

A imagem da semi-reta $\overrightarrow{OC}$ é a semi-reta $\overrightarrow{OC'}$.

A imagem do ângulo $B\hat{O}C$ é o ângulo $C'\hat{O}B'$, oposto pelo vértice.

Simetria axial

A simetria axial é uma transformação de um plano nele mesmo.



Observe o desenho ao lado.

Dizemos que A' é o simétrico de A (A é o simétrico de A') em relação à reta r, pois

$m(\overline{AO}) = m(\overline{OA'})$ e

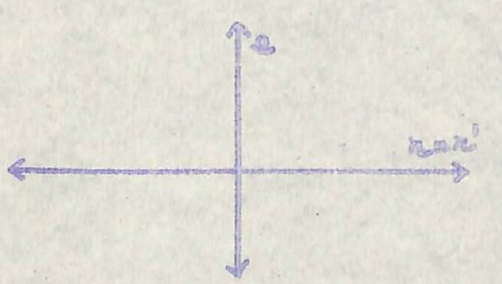
$\overline{AA'}$ é um segmento perpendicular a r.

A reta r é chamada de eixo de simetria. Por isto chamamos esta simetria de simetria axial.

Logo, a simetria axial é uma transformação que a cada ponto X do plano π associa um ponto X' de π , tal que X' é simétrico de X em relação ao eixo dado.

Imagens por "Simetria Axial"

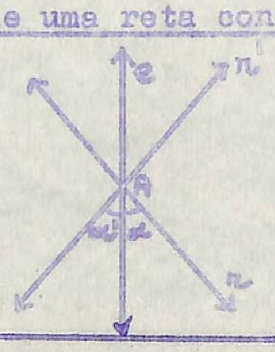
1) Imagem de uma reta perpendicular ao eixo.



Observe que se r é perpendicular ao eixo " e " então r e sua imagem r' são retas coincidentes.

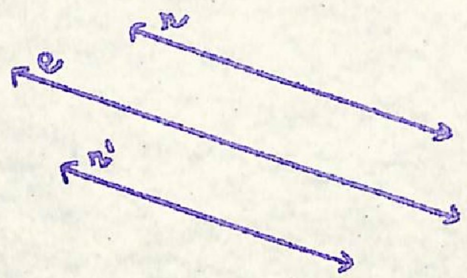
r = r'

2) Imagem de uma reta concorrente ao eixo



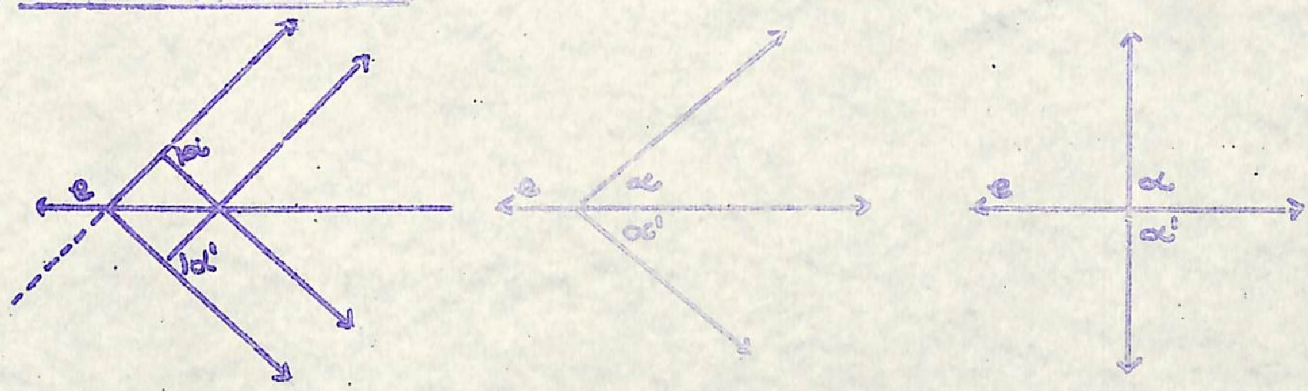
Observe que se "r" e "e" se cortam num ponto A, então r', a imagem de r, corta "e" no mesmo ponto A e os ângulos formados por r e r' com e são congruentes.

3) Imagem de uma reta paralela ao eixo.



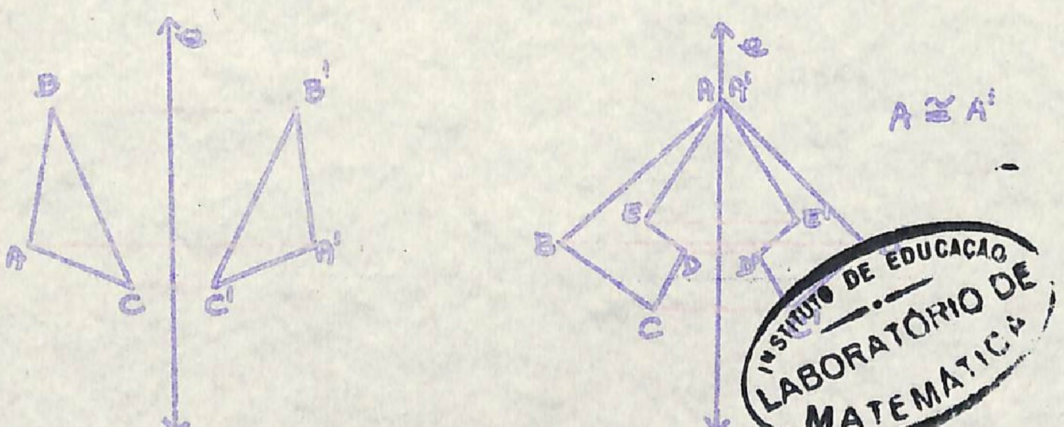
Observe que se r é paralela a "e", então r' também é paralela a "e". Logo, r é paralela a r' .

4) Imagem de um ângulo.



A imagem α' de um ângulo α obtém-se pelas imagens dos lados do ângulo.

5) Imagem de uma figura.

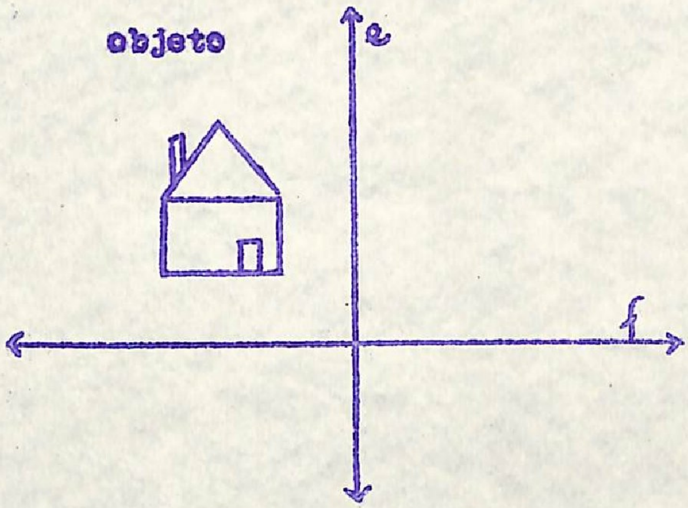


A imagem de uma figura obtém-se pelas imagens dos lados das figuras ou pelas imagens dos vértices da figura.

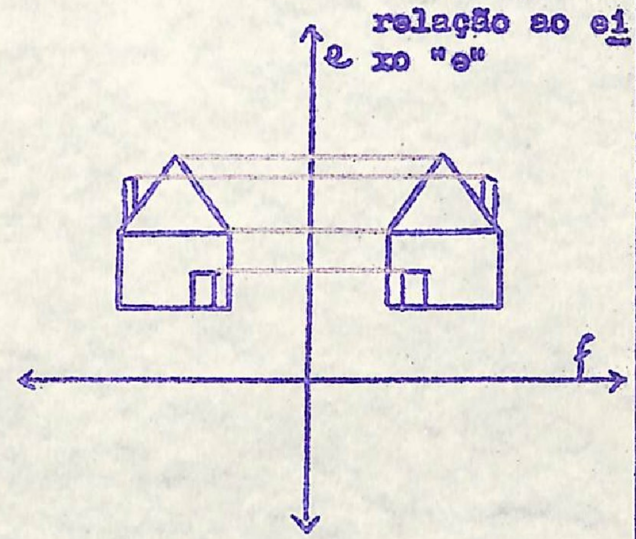
Simetria em relação a dois eixos perpendiculares

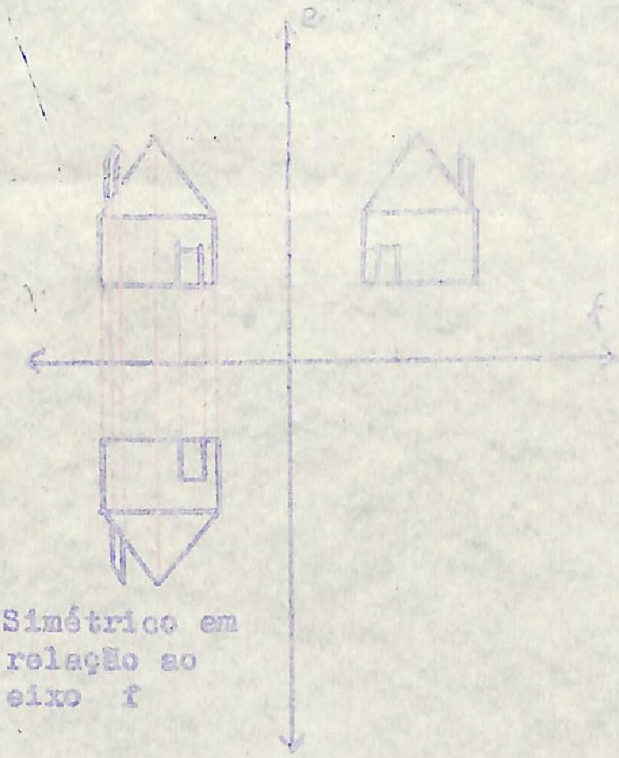
Veja, em quatro etapas, como ocorre a simetria do desenho de um objeto em relação a dois eixos perpendiculares "e" e "f".

objeto

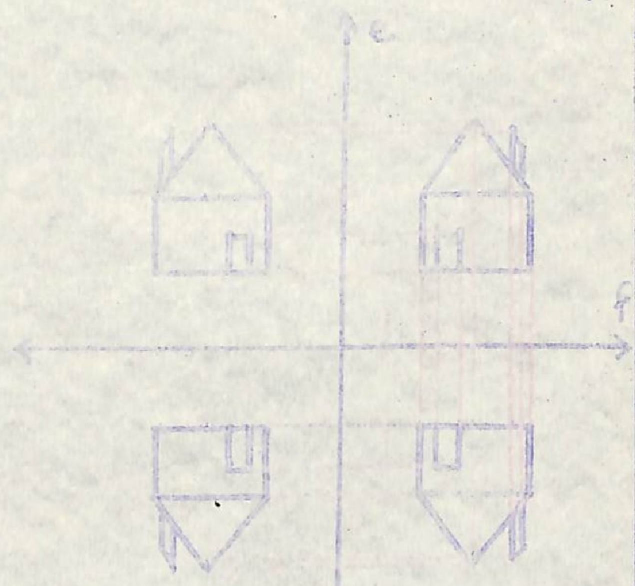


simétrico em relação ao ei
xo "e"





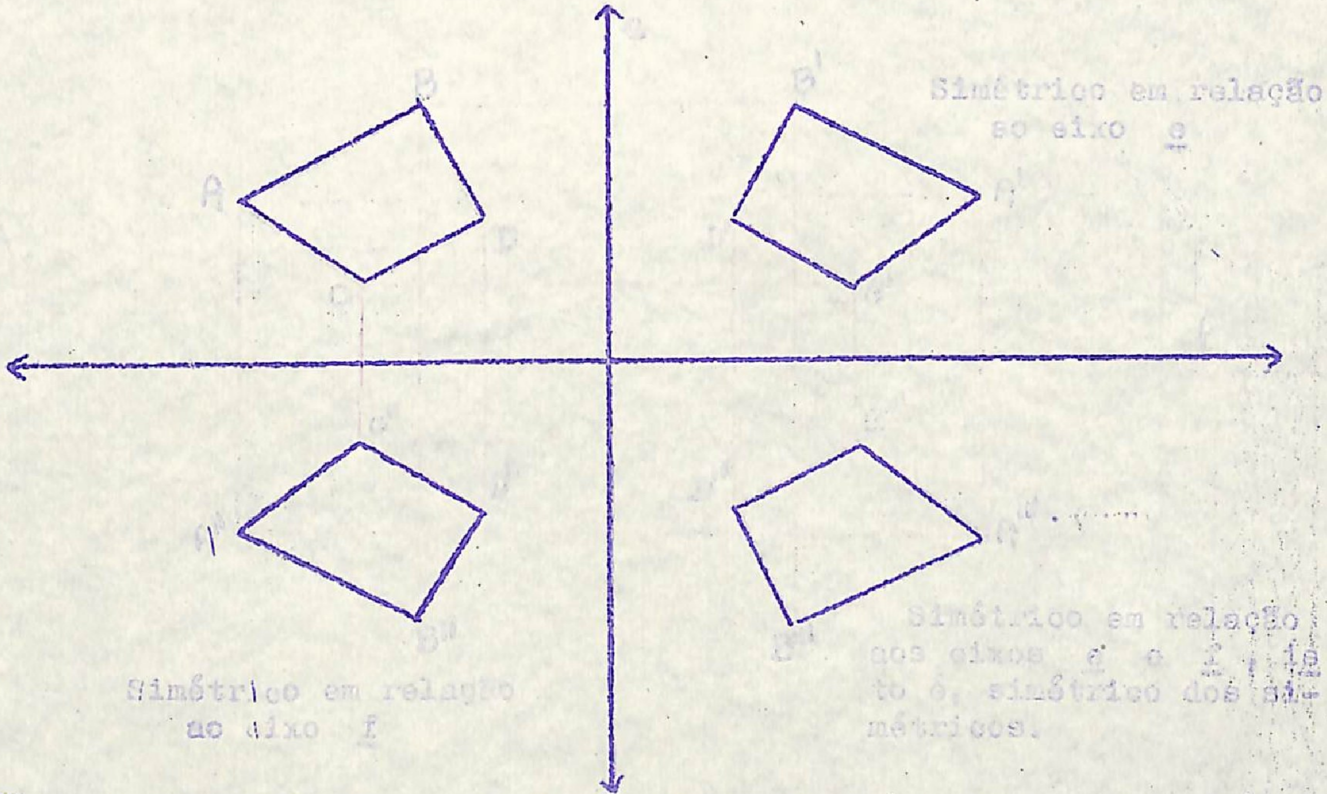
Simétrico em
relação ao
eixo f



Os dois simé-
tricos já obti
dos produzem
um terceiro si
métrico em re-
lação aos ei-
xos e e f.

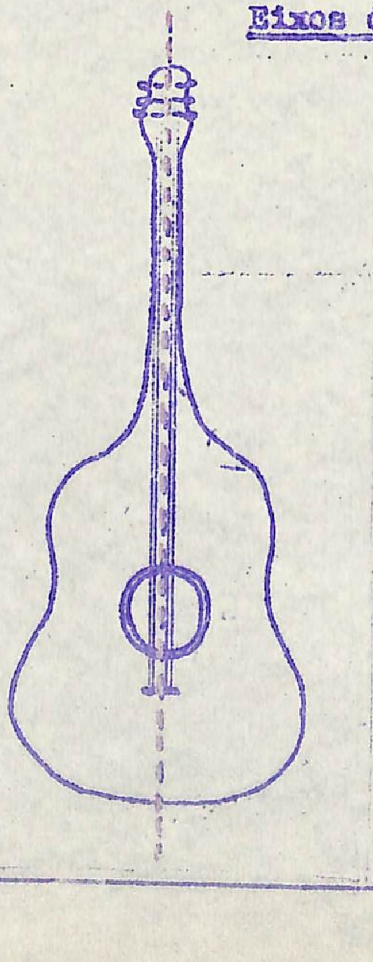
Exemplo com uma figura geométrica

Veremos, agora, utilizando um quadrilátero, os simétricos em relação aos eixos perpendiculares "e" e "f".



A composta de duas simetrias de eixos perpendiculares é equivalente a uma rotação de 180° e a uma simetria puntual cujos centros coincidem com a intersecção dos eixos.

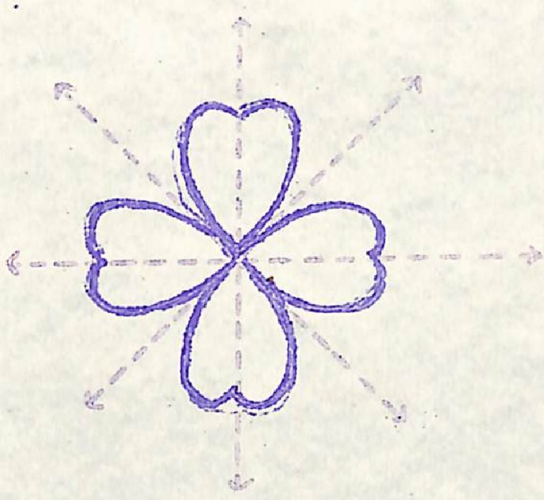
<u>Eixos de simetria de uma figura</u>



O desenho do violão ao lado é uma figura simétrica, pois a parte à esquerda do eixo tem a mesma forma e as mesmas dimensões que a parte direita, porém em posição inversa

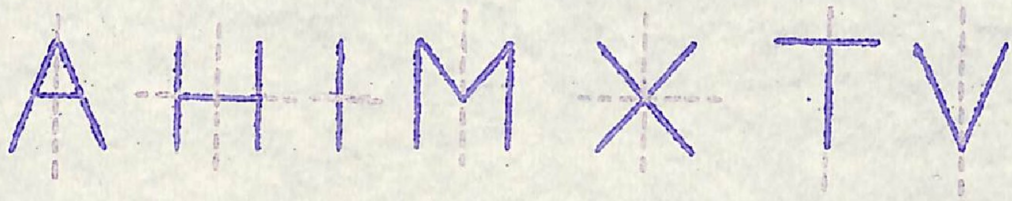
O violão tem apenas um eixo de simetria.

Existem outras figuras que possuem mais de um eixo de simetria.



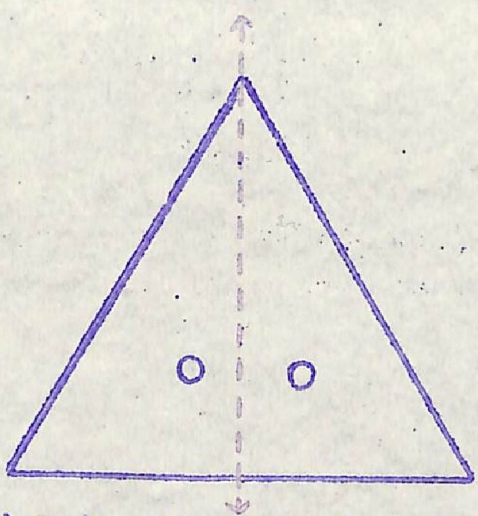
Observe a figura de um trevo de quatro folhas. Ela possui quatro eixos de simetria.

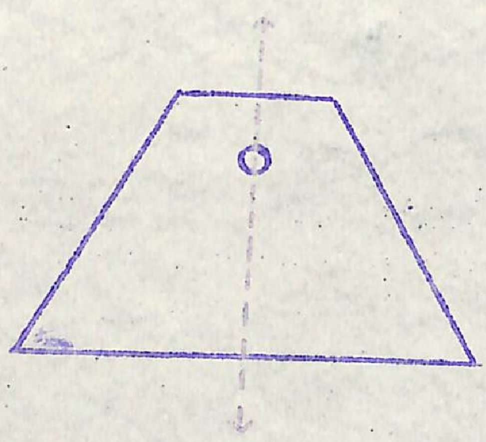
Algumas letras também possuem um ou mais eixos de simetria.
Exemplo:

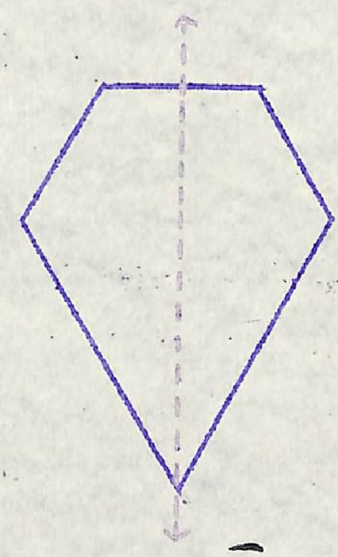


<u>Exemplos com figuras geométricas</u>

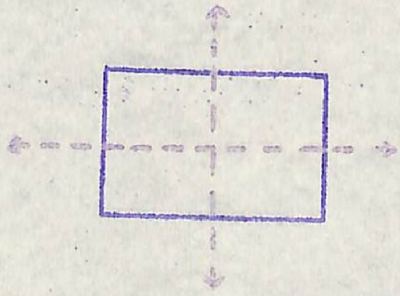
1) <u>Um eixo de simetria</u> - Figuras do trimath



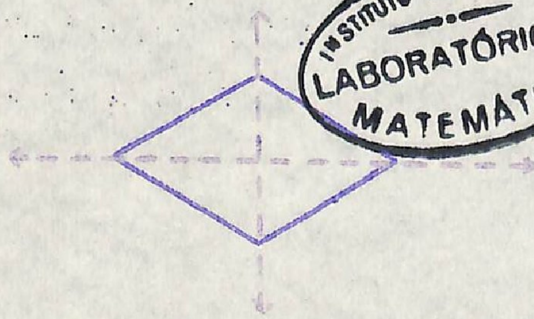




2) <u>Dois eixos de simetria</u>

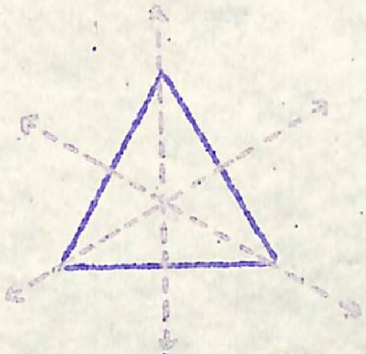


retângulo

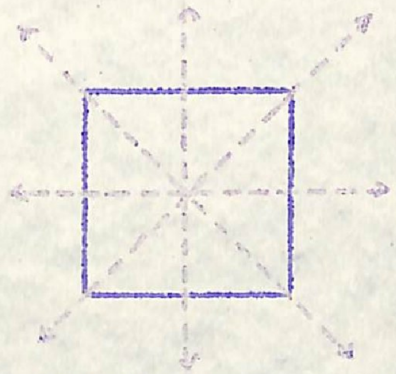


losango

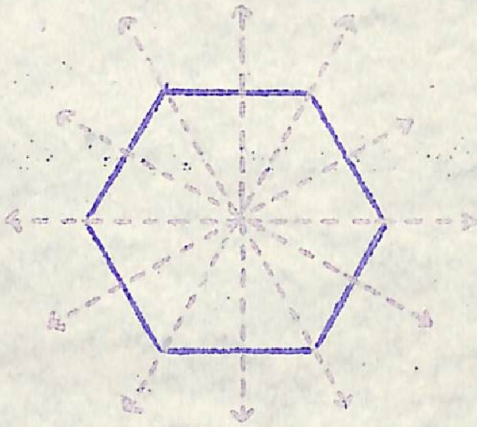
3) <u>Com mais de dois eixos de simetria</u>



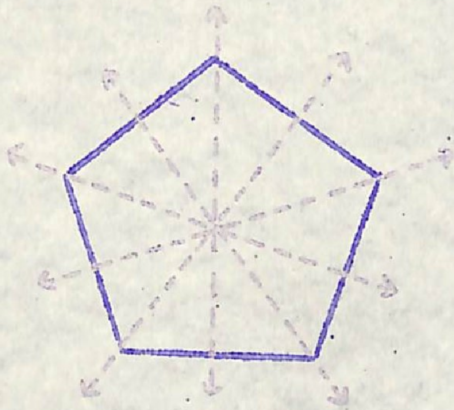
triângulo equilátero (três eixos de simetria)



quadrado (quatro eixos de simetria)

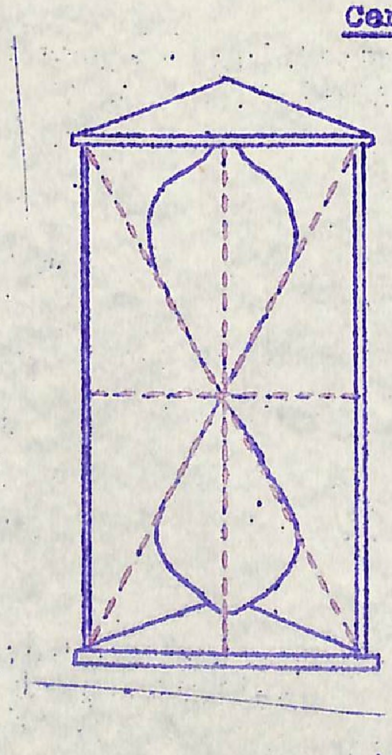


hexágono regular (seis eixos de simetria)



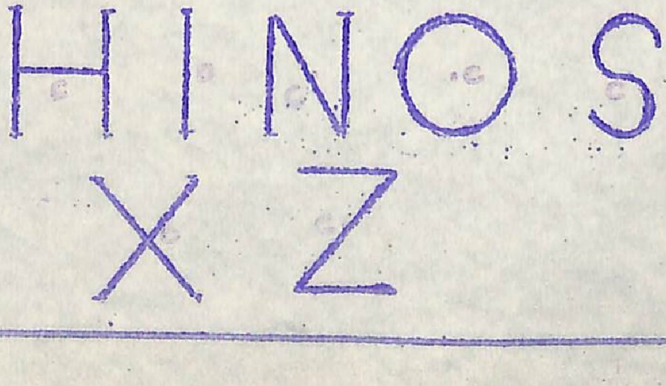
pentágono regular (cinco eixos de simetria)

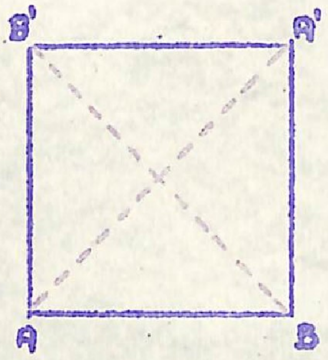
<u>Centro de simetria de uma figura</u>

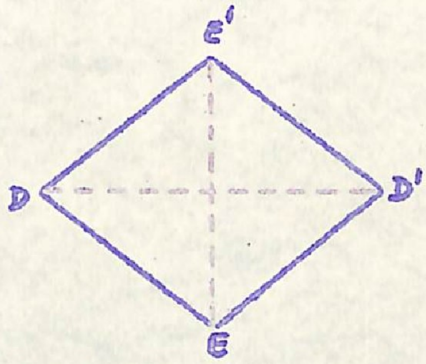


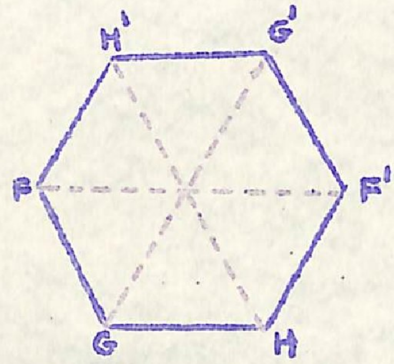
Existem algumas figuras que possuem um centro de simetria. É o caso da ampulheta, do carretel, de algumas letras do nosso alfabeto e de algumas figuras geométricas.

Qualquer ponto do desenho possui um simétrico também pertencente ao desenho.



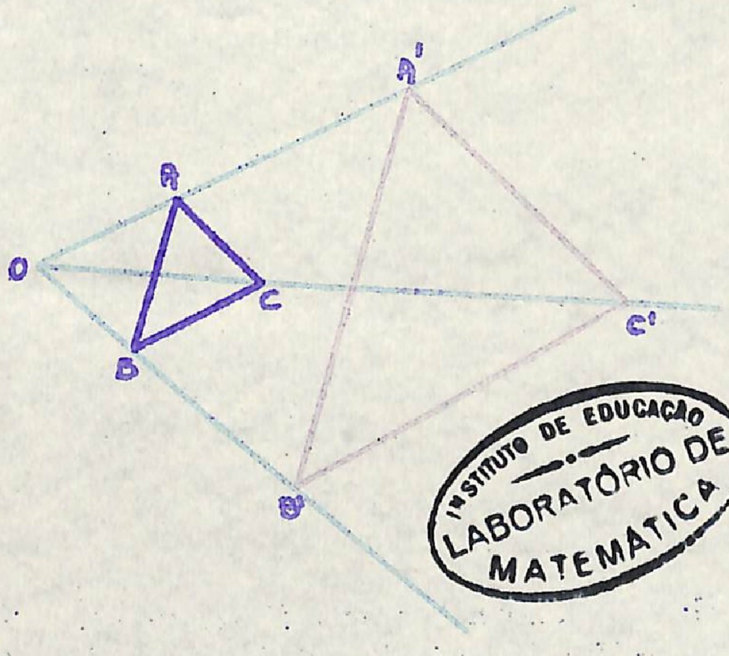






HOMOTETIA

Homotetia é uma transformação não isométrica (mesma medida), usada para reduzir ou ampliar figuras.



O desenho ao lado, mostra duas figuras, uma azul e uma vermelha. A figura azul é a original. A figura vermelha é a imagem da azul, transformada por uma homotetia.

As figuras original e transformada não são congruentes. A homotetia conserva a forma, mas não as medidas.

O ponto O é o centro da homotetia. No desenho ao lado a homotetia leva o ponto B em B', A em A' e C em C'. Os pontos A', B' e C' são as imagens de B, A e C, respectivamente.

O centro O, um ponto A e sua imagem A' estão sobre a mesma reta, isto é, são colineares.

A medida de $\overline{OA'}$ é duas vezes e meia a medida de OA, isto é:

$$m(\overline{OA'}) = 2{,}5 . m(\overline{OA})$$

Do mesmo modo: $m(\overline{OB'}) = 2{,}5 . m(\overline{OB})$ e $m(\overline{OC'}) = 2{,}5 . m(\overline{OC})$.

O tamanho da figura ABC foi ampliado de duas vezes e meia. Por isso diz-se que a razão dessa homotetia é igual a 2,5.

Se a razão da homotetia for negativa, teremos uma redução da figura original. No desenho acima, considerando A'B'C' como figura original, ABC será a homotética reduzida de razão -2,5.

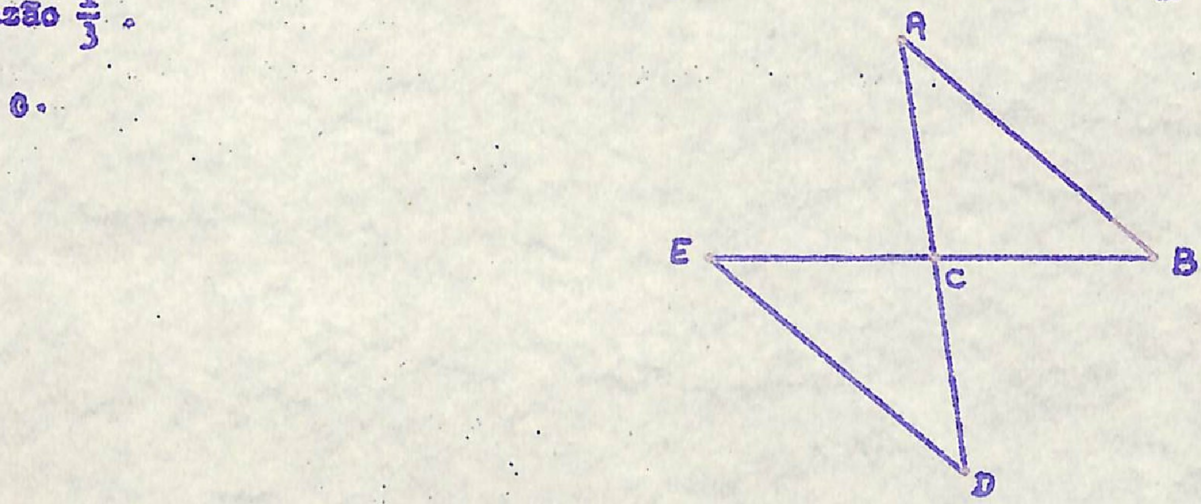
Dizemos então que:

"Uma homotetia de centro O e razão r é uma função do conjunto dos pontos de um plano π em π, que a cada ponto P do plano associa um ponto P' tal que os pontos O, P e P' são colineares e $\dfrac{m(\overline{OP'})}{m(\overline{OP})} = r$."

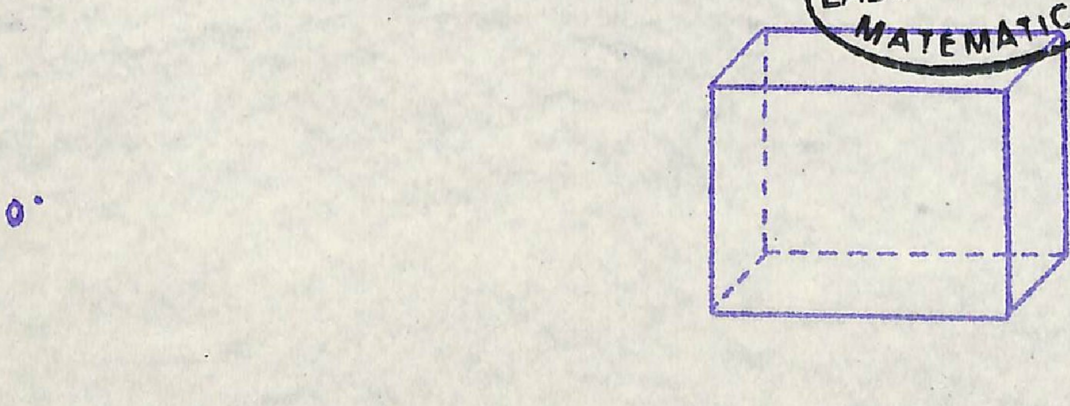
EXERCÍCIOS - GRUPO 8

1) Amplie de duas vezes o tamanho da seguinte figura, considerando o centro O.

2) Construa a imagem reduzida de ABCDE pela homotetia de centro O e razão $\frac{1}{3}$.

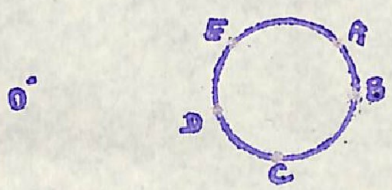


3) Reduza o prisma dado pela homotetia de centro O e razão $\frac{1}{2}$.

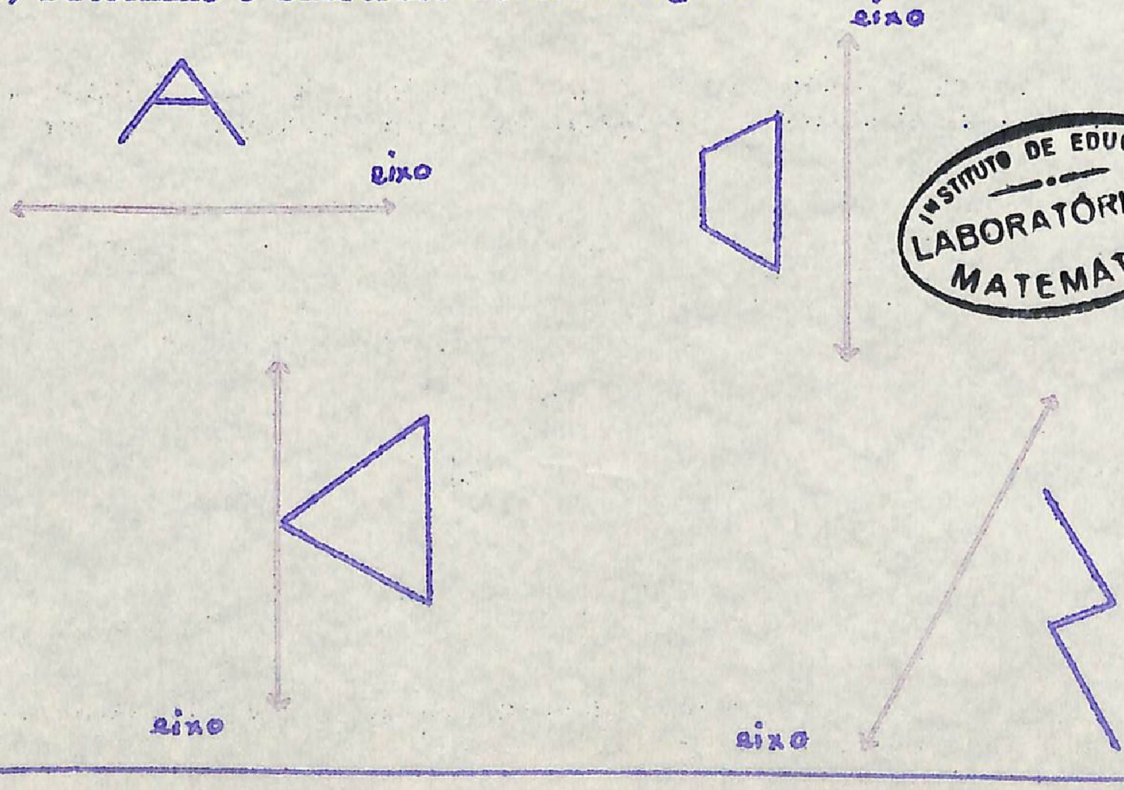


4) Desenhe as homotetias da figura abaixo nas razões 2 e $\frac{1}{2}$ e centro O.

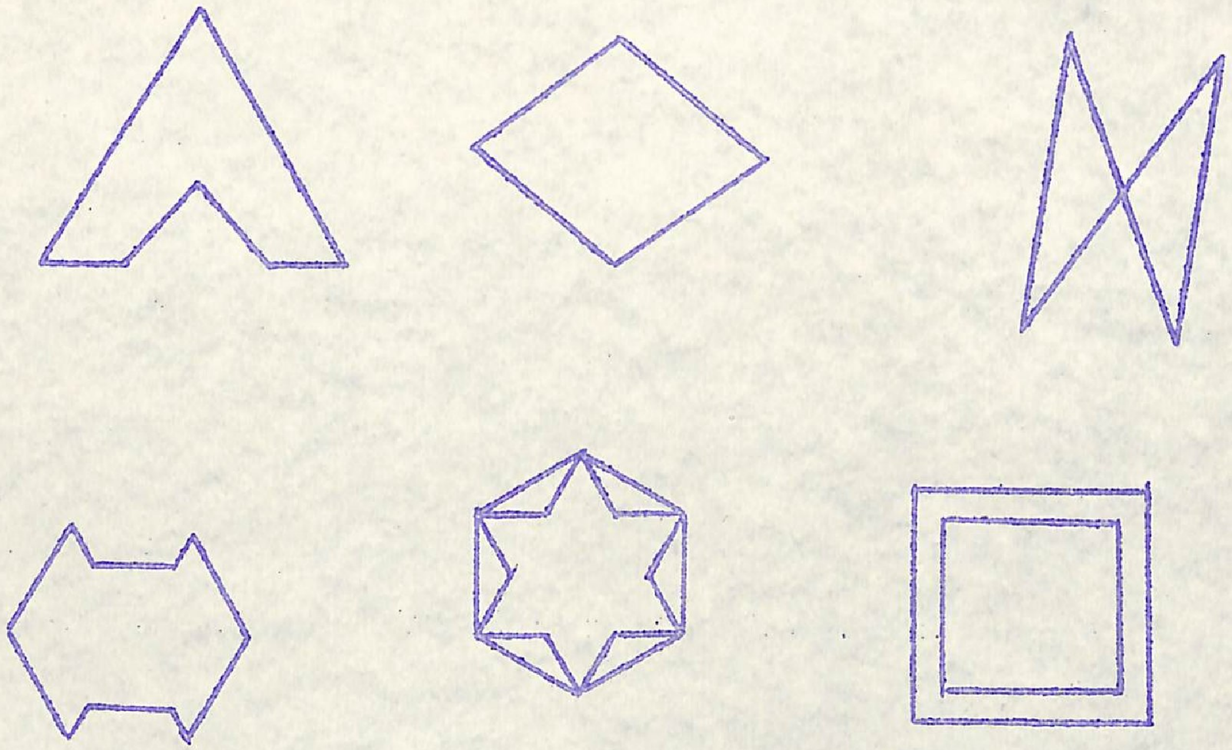
5) Construa as imagens de A, B, C, D e E pela homotetia de centro O e razão 3 e verifique se as imagens também estão sobre um círculo.



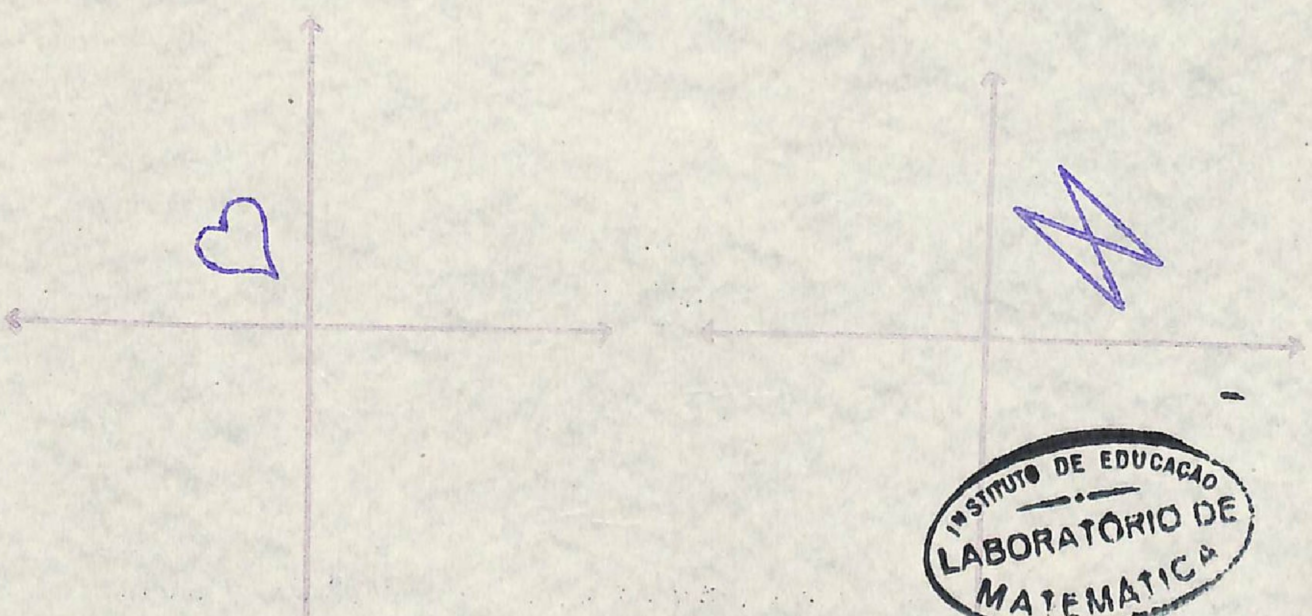
6) Determine o simétrico de cada figura:



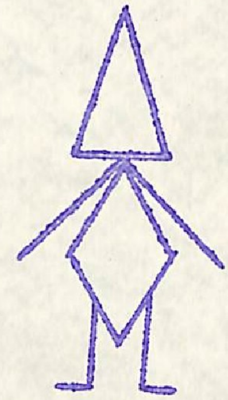
7) Trace os eixos de simetria das seguintes figuras:



8) Determine o simétrico de cada figura, relativo aos dois eixos:

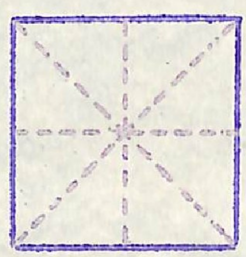


9) Trace o simétrico da figura que segue, em relação ao centro Ç.

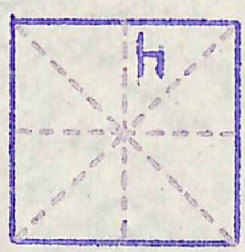


Ç

10) a) Tome uma folha de papel, corte um quadrado de 12cm de lado e dobre conforme os traços do desenho:



b) Faça um desenho simples entre duas dobras:



c) Continue desenhando entre as dobras como se elas fossem espelhos até que tenha feito oito desenhos.

d) As figuras obtidas são simétricos?
As dobras de sua folha são os eixos de simetria?

11) Procure e trace os eixos de simetria das figuras que seguem: