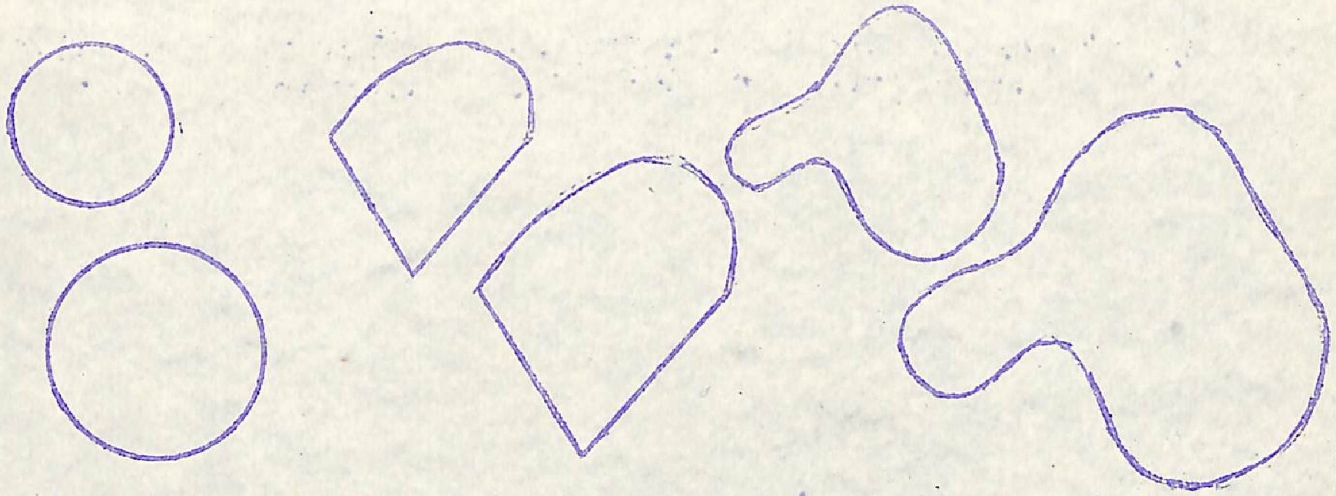
FIGURAS SEMELHANTES

Observe os pares, que possuem a mesma letra, nas figuras abaixo:



Estes pares de figuras, que têm a mesma forma, recebem o nome de figuras semelhantes.

Dizemos que duas figuras são semelhantes se elas mantém uma proporcionalidade entre as suas dimensões lineares e mantém as medidas angulares.

Figuras semelhantes são obtidas através de homotetias, pois toda homotetia transforma uma figura em outra semelhante. Esta transformação tanto pode ser uma ampliação como uma redução da figura dada.

Semelhança de triângulos

Dizemos que dois triângulos são semelhantes se, e somente se, possuem os ângulos respectivamente congruentes ou os lados homólogos proporcionais.

Para mostrar que dois triângulos são semelhantes, não é necessário mostrar a congruência de todos os ângulos homólogos e a proporcionalidade dos lados homólogos. Como na congruência, existem para a semelhança, também, certos casos, que simplificam bastante a demonstração de semelhança de triângulos.

1º caso: Se dois triângulos possuem dois ângulos respectivamente congruentes, então eles são semelhantes.

2º caso: Se dois triângulos possuem um ângulo congruente compreendido entre lados respectivamente proporcionais, então eles são semelhantes.

3º caso: Se dois triângulos têm os três lados respectivamente proporcionais, então eles são semelhantes.

Proporcionalidade de segmentos e aplicações de semelhança

1- Se um feixe de paralelas determina segmentos congruentes sobre uma transversal, ele determinará noutra transversal, também segmentos congruentes.

2- Um feixe de paralelas determina em duas transversais quaisquer, segmentos proporcionais.

3- **Toda paralela a um dos lados de um triângulo divide os outros dois lados em segmentos proporcionais.**

4- **Toda paralela a um dos lados deum triângulo que intercepte os outros dois lados, determina um outro triângulo semelhante ao primeiro.**

5- Dois polígonos semelhantes podem ser decompostos no mesmo número de triângulos semelhantes.

6- Dois polígonos, constituidos pelo mesmo número de triângulos semelhantes e ordenadamente dispostos, são semelhantes (recíproco do nº 5).

7- Os perímetros de dois polígonos semelhantes estão entre sí como dois lados homólogos quaisquer.

8- A bissetriz de um ângulo interno de um triângulo divide o lado oposto em partes proporcionais **aos lados adjacentes.**

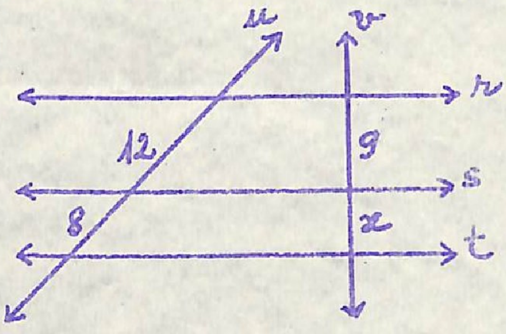
9- A bissetriz de um ângulo externo de um triângulo divide o lado oposto externamente em segmentos proporcionais aos lados adjacentes.

10- As bissetrizes interna e externa traçadas de um mesmo vértice de um triângulo, dividem o lado oposto numa mesma razão.

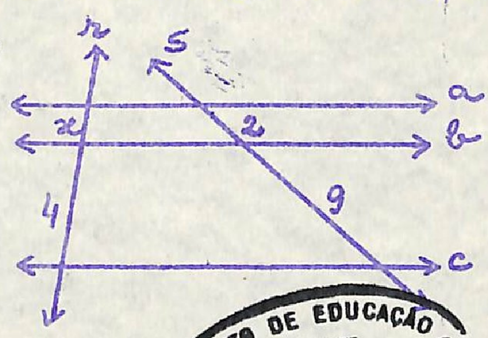
<u>EXERCÍCIOS</u> - <u>Grupo 9</u>

1- Calcule as medidas dos segmentos indicados nas figuras abaixo:

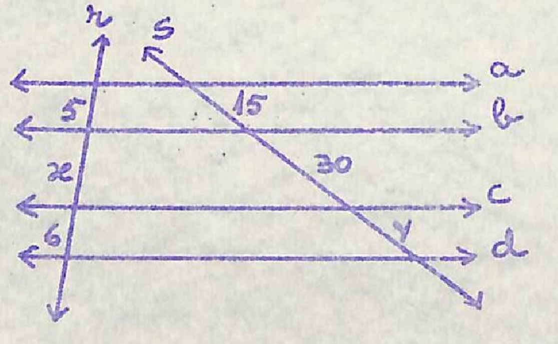
a)



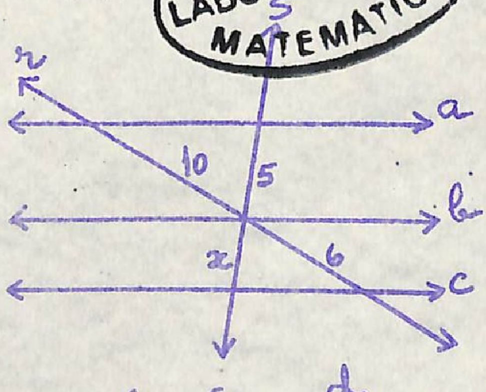
b)



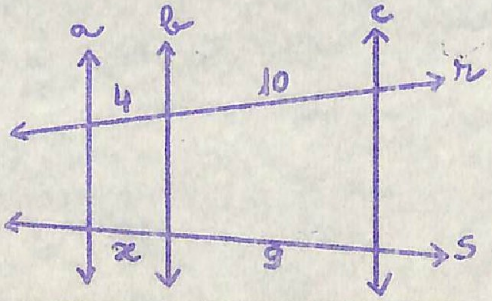
c)



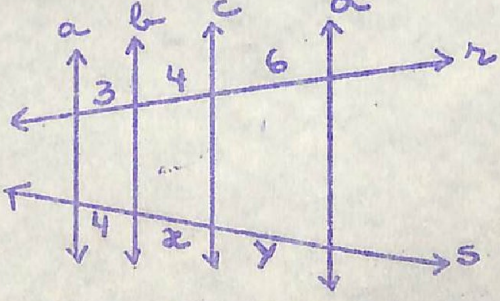
d)

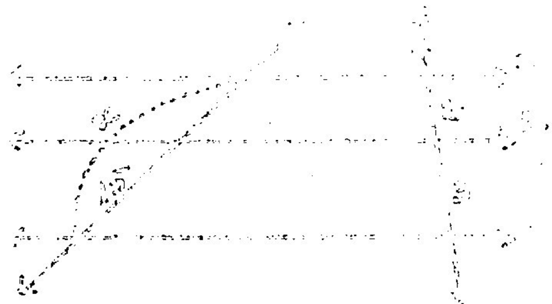


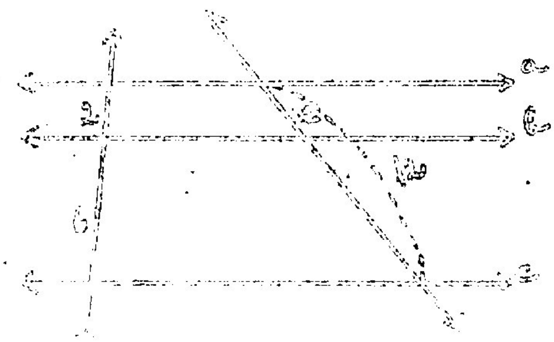
e)



f)



g) 

h) 

2- Traça-se a paralela a [illegible] de um triângulo, que determina sobre um dos outros lados segmentos de [illegible] e [illegible]cm respectivamente. Sabendo-se que o menor [illegible] que essa paralela determina sobre o outro lado mede [illegible]cm, calcular o comprimento do maior segmento.

3- O lado $\overline{AB}$ de um triângulo ABC mede 15cm. Pelo ponto D, do lado $\overline{AB}$, distante [illegible], traça-se a paralela ao lado $\overline{BC}$, que encontra o lado $\overline{AC}$ em um ponto [illegible] a [illegible]cm de A. Calcular o comprimento de $\overline{AC}$.

4- Num triângulo dois lados medem, respectivamente, 15cm e 20cm. Sobre o primeiro, a 4cm do vértice, toma-se um ponto, traçando-se a seguir por esse ponto uma paralela ao 3º lado. Determine os comprimentos dos segmentos que essa paralela determina sobre o 2º lado.

5- A paralela a um dos lados de um triângulo divide os outros dois na razão de 3 para 4. Achar os comprimentos dos segmentos determinados por essa paralela sobre esses dois lados, sabendo-se que eles medem respectivamente [illegible] e [illegible]cm.

6- Os lados de um triângulo medem, respectivamente, 8cm, 10cm e 15cm. Num triângulo semelhante, o lado correspondente ao primeiro mede 16cm. Determinar as medidas dos demais lados do 2º triângulo.

7- A paralela $\overline{MN}$ ao lado $\overline{BC}$ do triângulo ABC, determina sobre o lado $\overline{AC}$ segmentos de 5cm e 7cm, respectivamente. Calcular os lados do triângulo AMN, sabendo-se que $\overline{AB}$ mede 36cm e $\overline{BC}$ mede 42cm.

8- Dados os triângulos ABC e DEF tendo por medidas: m($\overline{AB}$) = 2cm, m($\overline{BC}$) = 4,8cm, m($\overline{AC}$) = 4cm, m($\overline{DE}$) = 4cm, m($\overline{EF}$) = 9,6cm e m($\overline{DF}$) = 8cm, verificar se o triângulo ABC é semelhante ao triângulo DEF.

9- Os lados de um triângulo medem 5cm, 7cm e 10cm. Quais as medidas dos lados de um triângulo que é semelhante a este e cujo perímetro é de 66cm?

10- A razão de semelhança de dois quadrados é de 3 para [illegible]. Calcular o perímetro do 1º quadrado, sabendo que o lado do 2º [illegible] 15cm.

11- Em dois polígonos semelhantes a razão de semelhança [illegible] mede 6cm o lado do 1º polígono, calcular o comprimento do [illegible] homólogo do 2º polígono.

12- A razão de semelhança entre dois triângulos equiláteros é de 3 para 2. Calcular a medida do lado do 2º triângulo, sabendo que o perímetro do 1º mede 90cm.

13- Uma fotografia de 3cm por 4cm deve ser ampliada na razão de $\frac{1}{5}$.
Quais as dimensões dessa ampliação?

14- Os triângulos ABC e A'B'C' são semelhantes e a razão de semelhança é de 3:4. Sabendo-se que os lados do maior medem, respectivamente, 12cm, 18cm e 20cm, calcular o comprimento dos lados do menor.

15- Os lados de um triângulo ABC medem: m(AB) = 20cm, m(BC) = 18cm e m(AC) = 16cm. O segmento MN da paralela à base AB mede 10cm. Calcular CM e CN.

16- Qual é a razão de semelhança de dois triângulos semelhantes cujos perímetros medem, respectivamente, 16cm e 64cm?

17- Os lados de um triângulo medem 14, 17 e 19cm respectivamente. Determinar o perímetro do triângulo semelhante em que o lado correspondente ao primeiro mede 42cm.

18- Os lados de um quadrilátero medem 12, 56, 9 e 15cm respectivamente. Determinar o perímetro de um quadrilátero semelhante ao 1º e menor que ele, sabendo-se que a razão de semelhança é de 4 para 3.

19- Dois hexágonos são semelhantes na razão de 2:5. Determinar o perímetro do 1º, sabendo-se que o do 2º é de 36cm.

20- O perímetro de um triângulo mede 27cm. Dois dos lados de um triângulo semelhante medem, respectivamente, 4cm e 6cm. Calcular os tres lados do 1º e o 3º lado do 2º, sabendo-se que a razão de semelhança é de 3 para 2.

21- As dimensões de um retângulo são, respectivamente 22 e 18cm. Calcular o perímetro de um retângulo semelhante e reduzido, sendo a razão de semelhança de 3:5.

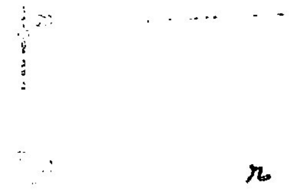
II — RELAÇÕES MÉTRICAS

Noções básicas para o estudo das relações métricas

Projeções ortogonais

a) Projeção ortogonal de um ponto sobre uma reta — Chama-se projeção de um ponto sobre uma reta o pé da perpendicular traçada desse ponto à reta. Pé da perpendicular é o ponto de intersecção dessa perpendicular com a reta dada.

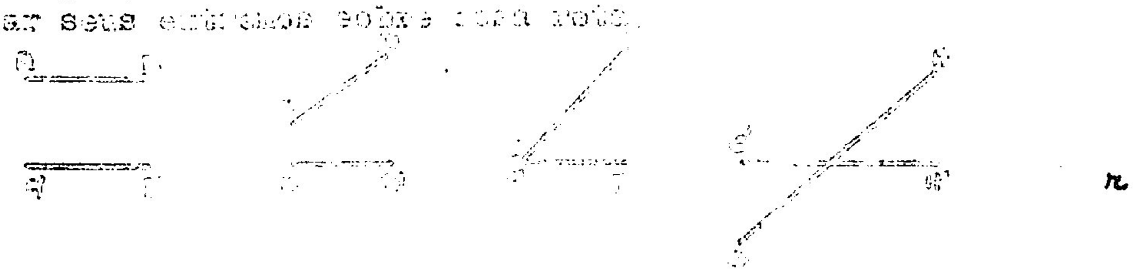
Na figura ao lado, P' é a projeção de P sobre a reta r.



$\overleftrightarrow{PP'} \perp r$

$\overleftrightarrow{PP'} \cap r = \{P'\}$

b) Projeção ortogonal de um segmento sobre uma reta — Chama-se projeção ortogonal de um segmento sobre uma reta o conjunto das projeções ortogonais de todos os pontos desse segmento sobre a reta dada. Para projetar ortogonalmente segmentos sobre uma reta, basta projetar seus extremos sobre essa reta.



Escreve-se: $\overline{A'B'} = proj_r \overline{AB}$ $\overline{E'F'} = proj_r \overline{EF}$

$\overline{C'D'} = proj_r \overline{CD}$ $\overline{G'H'} = proj_r \overline{GH}$

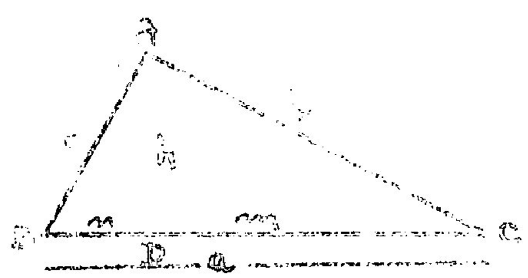
Observação:

Assim como fizemos projeções sobre uma reta também podemos projetar sobre um segmento ou sobre um plano.

I — RELAÇÕES MÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Neste estudo trataremos das relações entre as medidas dos lados do triângulo retângulo, da sua altura relativa à hipotenusa e das projeções dos catetos sobre ela.

Considerando o triângulo retângulo ABC onde



$m(\hat{A}) = 90^o$

$m(\overline{BC}) = a$

$m(\overline{AC}) = b$

$m(\overline{AB}) = c$

$m(\overline{AD}) = h$

$proj_{\overline{BC}} \overline{AB} = \overline{BD}$ e $m(\overline{BD}) = n$

$proj_{\overline{BC}} \overline{AC} = \overline{DC}$ e $m(\overline{DC}) = m$

[illegible]

[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
3,5cm		[illegible]			
	$\sqrt{[illegible]}$	$\sqrt{[illegible]}$			
				[illegible]	32cm
	[illegible]			[illegible]	
		[illegible]	[illegible]		

2- Sendo [illegible] um triângulo [illegible]:

[illegible]

3- A altura relativa à hipotenusa de um triângulo [illegible] mede 12cm e a hipotenusa vale [illegible] triângulo.

4- A base de um triângulo [illegible] calcule o perímetro [illegible]

5- A base de um [illegible] con[illegible] 65 [illegible]

6- Quanto vale a diagonal de um retângulo cujas dimensões são 9cm e 12cm?

8 – [illegible] ma-
[illegible]

9 – [illegible] cm.

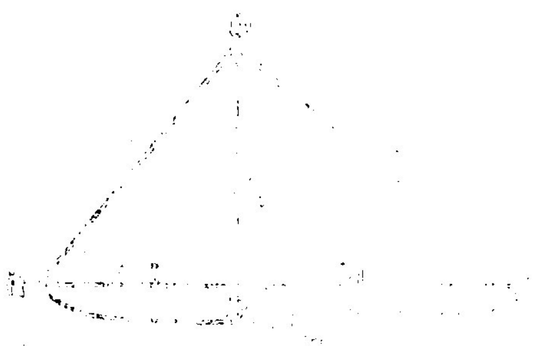
10 – [illegible]

11 – [illegible]

12 – [illegible] congruentes
[illegible]

II – [illegible]

[illegible]



a) Se m(Â) [illegible] 90°

[illegible]

b) Se m(Â) [illegible] 90°

$a^2 = b^2 + c^2$ [illegible]

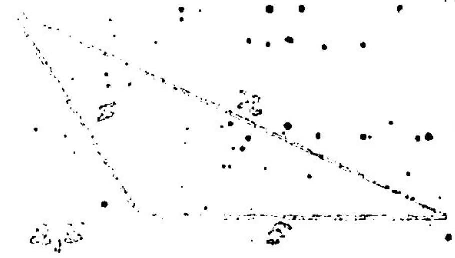
EXERCÍCIOS [illegible]

1 – [illegible] dos lados são:

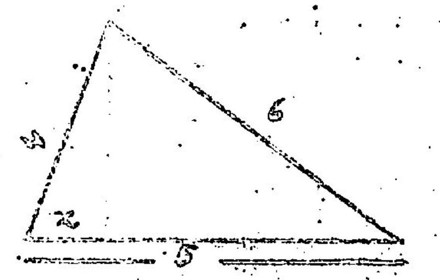
a) 8cm, 1[illegible]cm e 1[illegible]cm
b) 12 [illegible] e 8cm
c) 6cm, 8cm e 10cm
d) 7cm, 6cm e 5cm
e) 10cm, 11cm e 15cm

2- Determine o valor de "x" nos triângulos abaixo:

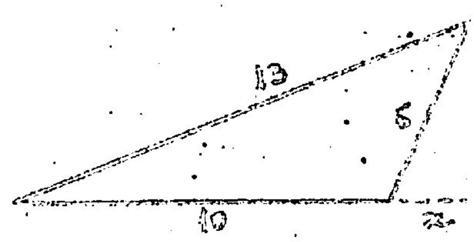
a)



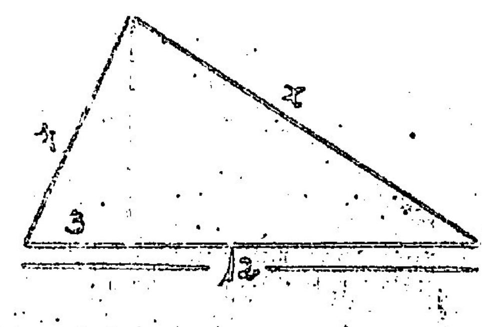
b)



c)



d)



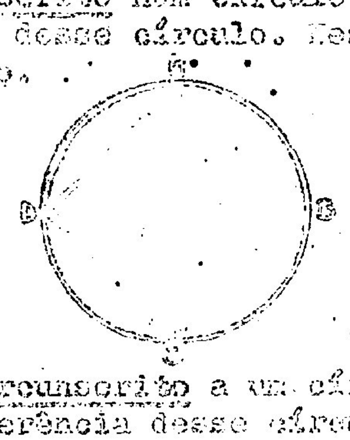
Polígonos regulares inscritos e circunscritos

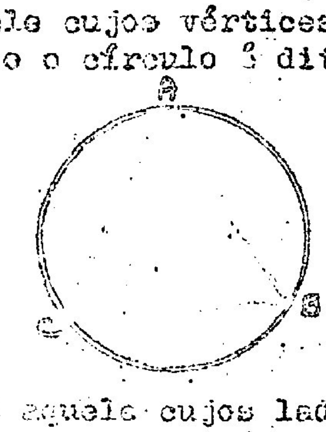
Relações métricas

Polígono regular é aquele cujos lados e cujos ângulos são congruentes. Todo polígono regular pode ser inscrito num círculo ou circunscrito à um círculo.

Polígono inscrito num círculo é aquele cujos vértices pertencem à circunferência desse círculo. Neste caso o círculo é dito circunscrito ao polígono.

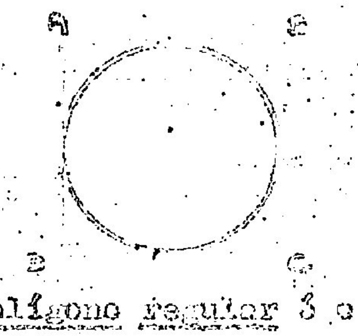
Exemplos:

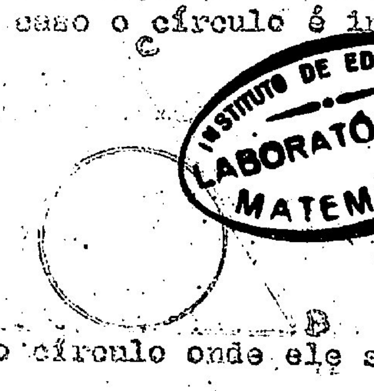




Polígono circunscrito a um círculo é aquele cujos lados são tangentes à circunferência desse círculo. Neste caso o círculo é inscrito no polígono.

Exemplos:





Centro do polígono regular é o centro do círculo onde ele se inscreve ou circunscreve.

Apótema do polígono regular é o segmento de reta perpendicular a um dos lados, que tem como extremos o centro do polígono e o ponto médio desse lado.

[illegible] do polígono ABCDE

[illegible] inscrito nesse

[illegible] do círculo circunscrito.

[illegible]

polígono inscrito	[illegible]	[illegible]	
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible] nº 80
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]rações nº 82 e 84
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]ações nº 82 [illegible] 82

polígono circunscrito	[illegible]	[illegible]	
[illegible]	[illegible]	[illegible]	
[illegible]	[illegible]	[illegible]	demonstração nº 85
[illegible]	$l_3 = 2r\sqrt{3}$	[illegible]	demonstração nº 86

[illegible] para que um quadrilátero [illegible] os ângulos opostos suplementares. ([illegible]).

[illegible] para que um quadrilátero [illegible] dos lados opostos [illegible]. Demonstração ([illegible])

[illegible] círculo de raio igual [illegible]

2- [illegible] num círculo [illegible] o lado [illegible] círculo.

3- O lado [illegible] num círculo mede [illegible]. Calcular [illegible]

4- O lado do [illegible] do círculo.

5- O apótema [illegible] Calcular o raio do círculo e o [illegible]

6- O lado do [illegible] 4 [illegible]. Calcular o apótema [illegible] círculo.

7- [illegible] cujo lado mede 5m. Calcular [illegible] inscrito no mesmo círculo.

8- [illegible] um quadrado. Calcular o perímetro [illegible]

9- [illegible] inscrito num círculo [illegible] inscrito nesse círculo [illegible]

10- [illegible] do quadrado cir[illegible]

11- [illegible] a um círculo é de [illegible]

12- [illegible] círculo mede [illegible]. Calcu[illegible] círculo.

12 - ÁREAS

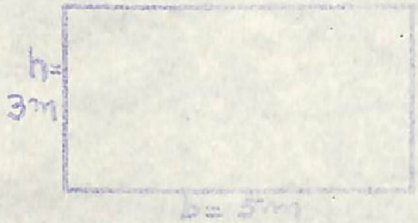
ÁREA DE UMA SUPERFÍCIE - Chama-se área de uma superfície o número que resulta quando se estabelece a razão entre a superfície dada e a de uma outra escolhida como unidade. Dizemos então que a área de uma superfície é o número que exprime a sua medida em relação a uma certa unidade.

UNIDADES - A unidade legal de área é o metro quadrado que é a área de um quadrado de 1m de lado. O símbolo do metro quadrado é m^2. O metro quadrado tem por múltiplos o decâmetro quadrado, o hectômetro quadrado e o quilômetro quadrado e por submúltiplos o decímetro quadrado, o centímetro quadrado e o milímetro quadrado que são representados respectivamente por dam^2, hm^2, km^2, dm^2, cm^2 e mm^2.

1- ÁREA DO RETÂNGULO

Calcula-se a área do retângulo multiplicando-se as medidas de suas dimensões.

Exemplo:



Chamando-se de A a área da superfície do retângulo e de h e b as medidas de suas dimensões, em metros, temos:

$$A = h \times b$$

No exemplo:

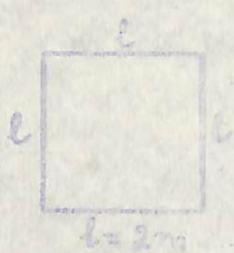
$$A = 3 \times 5 = 15$$

Como a unidade de área é o metro quadrado, a área do retângulo é igual a $15m^2$. (Ver demonstração nº 86).

2- ÁREA DO QUADRADO

A área de um quadrado é igual ao quadrado da medida de seu lado.

Exemplo:



"l" representa o lado do quadrado.

A área desse quadrado será

$$A = l^2$$

No exemplo:

$$A = 2^2$$

$$A = 4$$

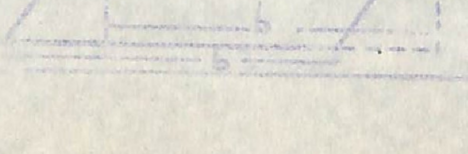
Logo a área do quadrado é igual a $4m^2$.

3- ÁREA DO PARALELOGRAMO

Consideremos o paralelogramo, abaixo, de base "b" e altura "a".

Sua área será dada pela multiplicação da base pela sua altura, isto é

$$A = b \times a$$

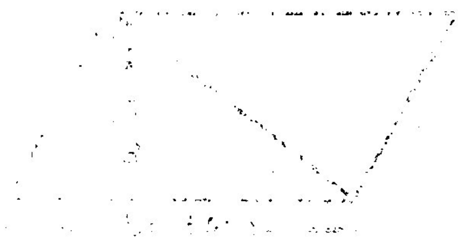


[illegible]

4 – [illegible]

A área do [illegible] metade do [illegible] das medidas de sua [illegible]

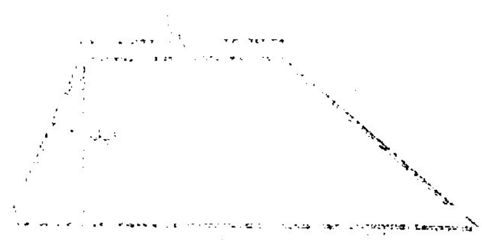
[illegible]



[illegible]

5 – [illegible]

[illegible] as medidas [illegible]



[illegible]

[illegible] 15cm e 12cm e a [illegible]

[illegible]

$A = 55cm^2$ [illegible]

[illegible]

[illegible] representam as medidas das [illegible] maior e menor, respectivamente.

[illegible] é igual ao [illegible] produto das [illegible]

$A = \frac{[illegible]}{2}$

[illegible]

[illegible] respectivamente, [illegible] e [illegible] sua [illegible]

$A = \frac{[illegible]}{2}$

$A = [illegible]$

[illegible]

[illegible] multiplicando-se seu semi-perímetro [illegible]

$A = p \times a$

[illegible]

[illegible] apótema mede 5,20m. Sua área [illegible]:

$A = [illegible]$
$A = [illegible]$
$A = [illegible]$

8- [illegible]

A área [illegible] decompondo-o em [illegible] traçamos uma diagonal [illegible] perpendicula- res [illegible] dividido em triângulos [illegible]

9- [illegible]

A área do círculo é igual ao produto do número [illegible] pelo quadrado do raio

$A = [illegible]^2$

[illegible]

A área de um círculo cujo diâmetro mede [illegible] será:

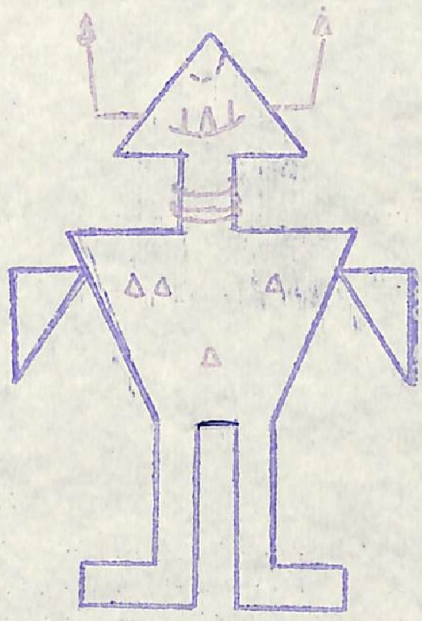
$A = \quad r^2$ $\qquad\qquad$ $r = 20cm : 2 = 10cm$

$A = 3,14 \times 10^2$

$A = 314cm^2$

EXERCÍCIOS - GRUPO 13

1- Calcula em cm^2 a área da superfície ocupada pela figura do " Robonildo, composta de figuras geométricas conhecidas. Usa tua régua para determinar as medidas das figuras que o compõe.



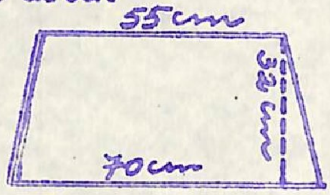
2- Completa o quadro:

Figuras	retângulo	triâng. isósc.	paralel.	trapézio isósc.	quadrado	losango
Base(s)	5dm	9cm	28mm	11m / 9,2m		
Altura	3,5dm	6cm	15mm	5m		
Lado		7,5cm	18mm	6m	8,3m	3cm
Diagonais						5cm / 3cm
Perímetro						
Área						

3- Um retângulo tem $96m^2$ de área. Sabendo que a base mede 12cm, calcule a medida da altura.

4- Sabendo que o perímetro de um terreno retangular mede 182m , e que a sua largura mede 50m , ache a medida de sua área.

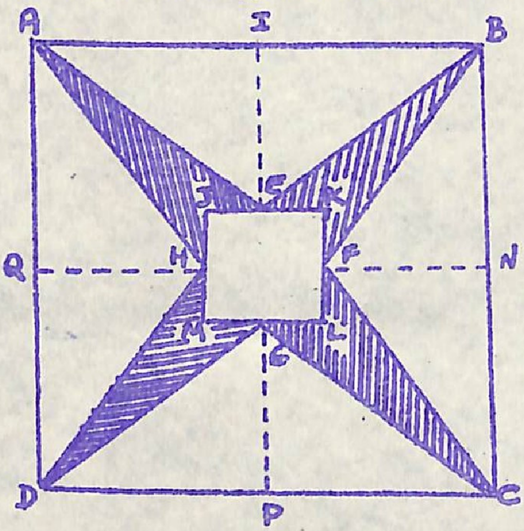
5- Quantos centímetros quadrados de papel precisarei para forrar uma prateleira que tem a forma de um trapézio com as dimensões da figura ao lado?



6- Quanto pagarei pela moldura de um quadro com a forma de um losango de 40cm de lado, sabendo que a moldura custa Cr$ 150,00 o metro?

7- Quantos metros quadrados de tapete serão necessários para cobrir o chão de uma sala retangular que mede 3 metros de comprimento por 2,5 metros de largura?

8- Observe a figura abaixo:



ABCD e JKLM são quadrados

$\triangle AEB \cong \triangle BFC \cong \triangle CGD \cong \triangle DHA$

$\overline{EI} \perp \overline{AB}$

$m(\overline{AE}) = m(\overline{EB})$

$m(\overline{EI}) = 2{,}2cm$

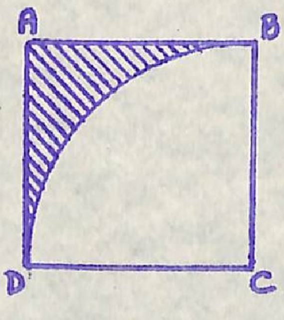
$m(\overline{AB}) = 6cm$

$m(\overline{LM}) = 1{,}6cm$

Calcula a área da região hachurada.

9- Determina, em cada caso, a área da região hachurada.

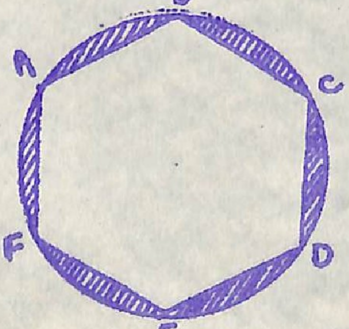
a)



ABCD é um quadrado cujo lado mede 3cm.

O arco $\widehat{BD}$ pertence a um círculo cujo raio é congruente ao lado do quadrado.

b)



ABCDEF é um hexágono regular inscrito num círculo de 4cm de raio.