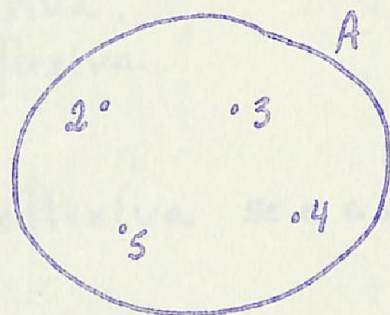


Propriedades das Relações

3) Reflexiva

1) a) No diagrama do conjunto  $A \subset \mathbb{N}$ :

A - Trace as flechas que indicam a relação  $P$  de  $A$  em  $A$ , definida por " $x$  é múltiplo de  $y$ ".



b) Complete:

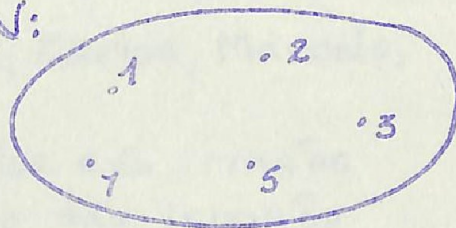
$$P = \{$$

c) Quais os elementos de  $A$  que são imagens de si mesmos pela relação  $P$ ?

d) Quais os que não o são?

2) a) No diagrama do conjunto  $B \subset \mathbb{N}$ :

- Trace as flechas que indicam a relação  $M$  de  $B$  em  $B$ :



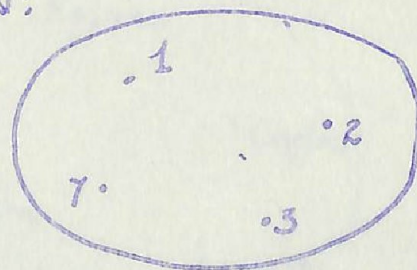
$$M = \{(5, 5), (5, 3), (2, 1), (1, 1)\}$$

b) Quais os elementos de  $B$  que são imagens de si mesmos pela relação  $M$ ?

c) Quais os que não o são?

3) a) No diagrama do conjunto  $D \subset \mathbb{N}$ :

- Trace as flechas que indicam a relação  $N$  de  $D$  em  $D$ , definida por " $x > y$ ".



b) Complete:

$$N = \{$$

c) Quais os elementos de  $D$  que são imagens de si mesmos pela relação  $N$ ?

d) Quais os que não o são?



Observe que:

No gráfico do exercício 1, todo ponto possui "laço", isto é, todo elemento do conjunto  $A$  é imagem de si mesmo pela relação  $R$ ; no gráfico do exercício 2 nem todo ponto possui "laço" e, no do exercício 3, nenhum ponto "laço".

possui

Dizemos que:

A relação  $P$  de  $A$  em  $A$  é reflexiva.

A relação  $M$  de  $B$  em  $B$  não é reflexiva.

A relação  $N$  de  $D$  em  $D$  não é reflexiva.

De um modo geral

Uma relação  $R$  de  $A$  em  $A$  é reflexiva se e somente se  $\forall x \in A, (x, x) \in R$ .

No gráfico:

•  $x \circlearrowleft$  para todo ponto do gráfico.

II) Simétrica e Anti-simétrica

1) Seja  $A = \{Rejane, Sandra, Hugo, Carlos, Marcelo, Ana, Luciana\}$ .

Sabemos que: Rejane e Carlos são irmãos

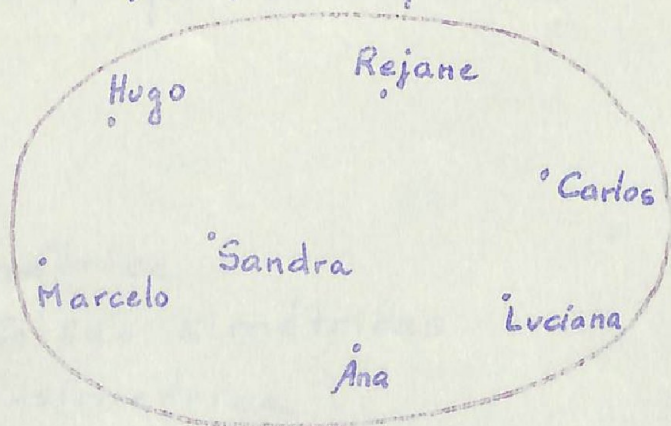
Hugo, Sandra e Marcelo são irmãos

Ana e Luciana são irmãs

a) No diagrama de  $A$  trace as flechas que representam a relação  $R$  de  $A$  em  $A$ , definida por " $x$  é irmão de  $y$ ".

b) Complete:

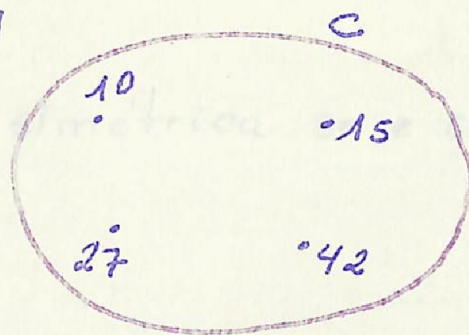
$R = \{$





2) Seja  $C = \{10, 15, 27, 42\} \subset \mathbb{N}$

a) No diagrama de  $C$ , trace as flechas que indicam a relação  $L$ , de  $C$  em  $C$ , definida por " $x < y$ ".



b) Complete:

$$L = \{$$

3) Seja  $D = \{3, 7, 18, 402\} \subset \mathbb{N}$  e a relação  $T$ , de  $D$  em  $D$ ,  $T = \{(3, 7), (7, 3), (3, 3), (18, 3), (3, 402)\}$

a) No diagrama de  $D$  trace as flechas que representam  $T$ .



Observe que:

No gráfico da relação  $R$ , para cada flecha que parte de um ponto  $a$  outro, há outra que parte do segundo para o primeiro ponto considerados. O que não ocorre nos gráficos de  $L$  e  $T$ .

No gráfico da relação  $L$ , para cada flecha que parte de um ponto para outro, distinto do primeiro, não há flecha que parte do segundo para o primeiro.

No gráfico da relação  $T$ , o que se observa?

A relação  $R$  é simétrica

As relações  $L$  e  $T$  não são simétricas

A relação  $L$  é anti-simétrica

As relações  $R$  e  $T$  não são anti-simétricas



## De um modo geral

a) Uma relação  $R$  de  $A$  em  $A$  é simétrica se e somente se

No gráfico

$x$                        $y$

b) Uma relação  $R$  de  $A$  em  $A$  é anti-simétrica se e somente se

No gráfico

$x$                        $y$       (para  $x \neq y$ )

## III) Transitiva

1) Considere o conjunto  $P$ , formado por alguns planetas do Sistema Solar;

$P = \{\text{Mercúrio, Vênus, Terra}\}$  e a relação  $M$  de  $P$  em  $P$ , definida por " $x$  está mais próximo do Sol que  $y$ ".

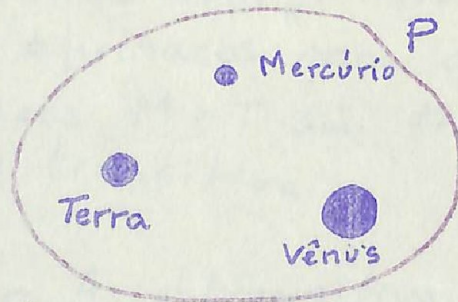
a) No diagrama de  $P$ , trace as flechas que representam a relação  $M$ .

b) Complete:

$M = \{$

Podemos dizer que:

Se Mercúrio está mais próximo do Sol que Vênus e Vênus está mais próximo do Sol que Terra então Mercúrio está mais próximo do Sol que Terra.



Representando Mercúrio por  $m$ , Vênus por  $v$  e Terra por  $t$ , podemos dizer que:  
Se  $(m, v) \in M$  e  $(v, t) \in M$   
então  $(m, t) \in M$ .



2) Considere o conjunto  $F$ , formado pelos membros de uma família: Antônio, pai de Manuel, que por sua vez é pai de Pedrinho. Represente-os, respectivamente, por  $a$ ,  $m$  e  $p$  e faça o que se pede:

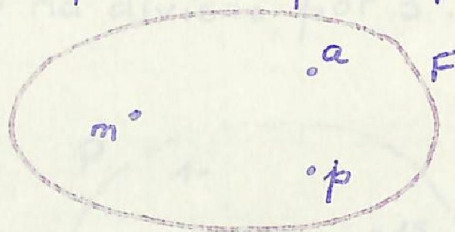
a) No diagrama de  $F$ , trace as flechas que indicam a relação  $S$  de  $F$  em  $F$ , definida por " $x$  é pai de  $y$ ".

b) Complete:

$$S = \{$$

se  $(a, m) \in S$  e  $(m, p) \in S$

então  $(\quad, \quad) \notin S$ .



3) Seja  $B = \{5, 7, 14, 15\} \subset \mathbb{N} \in T$ , a relação de  $B$  em  $B$ , definida por " $x > y$ ".

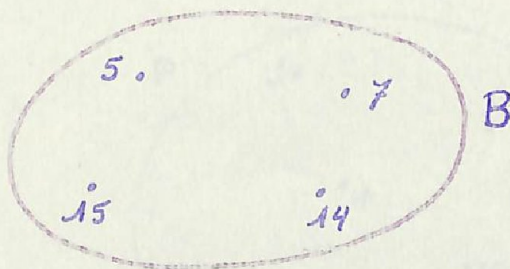
a) No diagrama de  $B$ , trace as flechas que representam a relação  $T$ .

b) Complete:

$$T = \{$$

Sejam três números,

$x$ ,  $y$  e  $z$ . Se  $x$  é maior que  $y$  e  $y$ , maior que  $z$ , então podemos afirmar que  $x$ .....



Para as relações  $M$  e  $T$ , podemos afirmar que: se  $x$  está relacionado com  $y$  e  $y$  está relacionado com  $z$ , então,  $x$  está relacionado com  $z$ . Porém, já não podemos fazer a mesma afirmação para a relação  $S$ .

Dizemos que as relações  $M$  e  $T$  são transitivas e que a relação  $S$  não é transitiva.

De um modo geral

Uma relação  $R$ , de  $A$  em  $A$ , é transitiva se e somente se

No gráfico:

$y$

$x$

$z$



## Relações de ordem e de equivalência

Seja  $P = \{1, 3, 4, 9, 15\}$  e as relações  $A, B, C$  e  $D$  de  $P$  em  $P$ , definidas, respectivamente por:

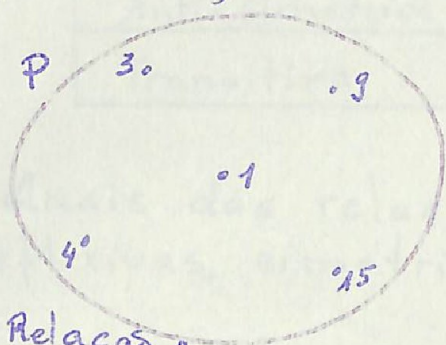
" $x$  é múltiplo de  $y$ "

" $x$  é menor que  $y$ "

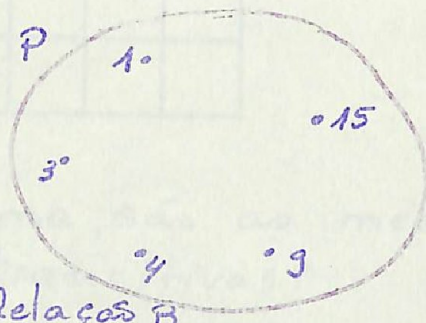
" $x$  é primo com  $y$ "

" $x$  tem o mesmo resto que  $y$  na divisão por 3".

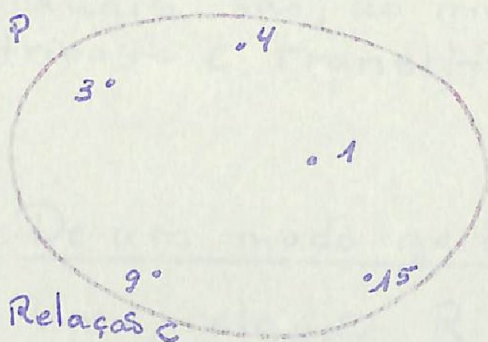
Represente  $A, B, C$  e  $D$ .



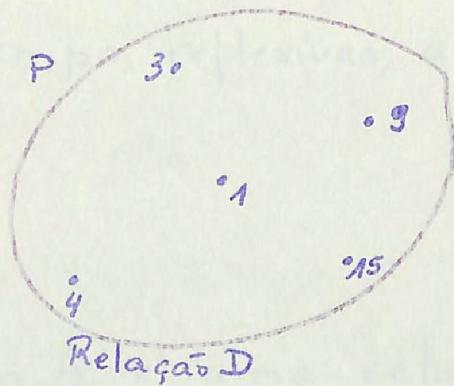
Relações A



Relações B



Relações C



Relações D

Seja  $G = \{A, B, C, D, E, F\}$  onde

$A = \{a, b, c\}$ ,  $B = \{a, b\}$ ,  $C = \{a\}$ ,  $D = \{b, c, f\}$ ,

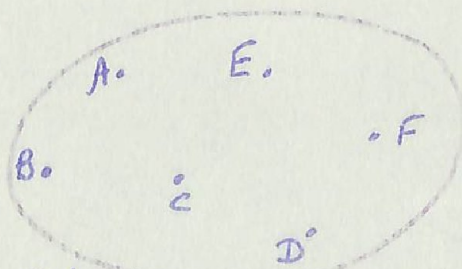
$E = \{g, h, i\}$  e  $F = \{g, h, i, f\}$  e as relações de

$G$  em  $G$  definidas por:

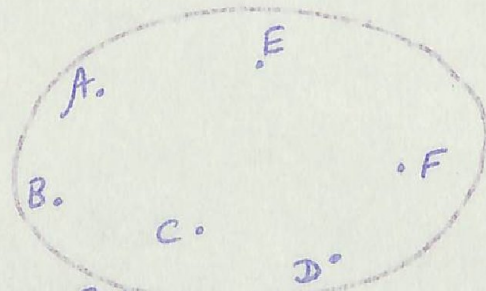
$E$ : " $X$  tem mesmo número de elementos que  $Y$ "

$F$ : " $X$  está contido em  $Y$ "

Represente as relações  $E$  e  $F$ .



Relações E



Relações F



Complete o quadro abaixo, assinalando com X os quadrinhos convenientes para indicar as propriedades das relações A, B, C, D, E, F

Relação Propriedade	A	B	C	D	E	F
Reflexiva						
Simétrica						
Anti-simétrica						
Transitiva						

Quais das relações, acima, são ao mesmo tempo, reflexivas, simétricas e transitivas?

Quais são, ao mesmo tempo, reflexivas, anti-simétricas e transitivas?

De um modo geral:

- Uma relação R de A em A é uma relação de equivalência se e somente se R for reflexiva, simétrica e transitiva.

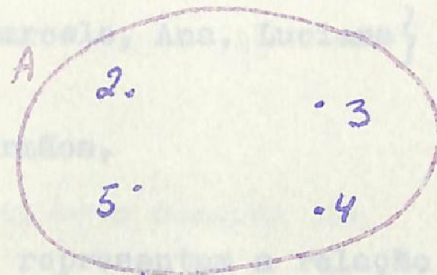
- Uma relação R de A em A é uma relação de ordem se e somente se R for reflexiva, anti-simétrica e transitiva.



PROPRIEDADES DAS RELAÇÕES

I - REFLEXIVA

1) a. No diagrama do conjunto A trace as flechas que indicam a relação P de A em A, definida por "x é múltiplo de y".



b. Complete:

P =

c. Quais os elementos de A que são imagens de si mesmos pela relação P?

d. Quais os que não o são?

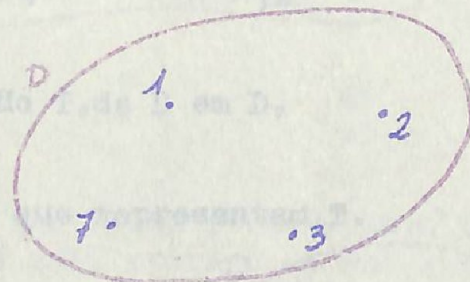
2) a. No diagrama do conjunto B trace as flechas que indicam a relação M de B em B,  $M = \{(5,5), (5,3), (2,1), (1,1)\}$ .



b. Quais os elementos de B que são imagens de si mesmos pela relação M?

c. Quais os que não o são?

3) a. No diagrama do conjunto D trace as flechas que indicam a relação N de D em D, definida por "x > y".



b. Complete:

N =

c. Quais os elementos de D que são imagens de si mesmos pela relação N?

d. Quais os que não o são?

Observe que;

No gráfico do exercício 1, todo ponto possui "laço", isto é, todo elemento do conjunto A é imagem de si mesmo pela relação R; no gráfico do exercício 2 nem todo ponto possui "laço" e, no gráfico do exercício 3, nenhum ponto possui laço.

Dizemos que :

A relação P de A em A é reflexiva.

A relação M de B em B não é reflexiva.

A relação N de D em D não é reflexiva.



De um modo geral:

Uma relação  $R$  de  $A$  em  $A$  é reflexiva se e somente se  $\forall x \in A, (x,x) \in R$ .

No gráfico :  $x \in R$  para todo ponto do gráfico.

## II- SIMÉTRICA e ANTI-SIMÉTRICA

1) Seja  $A = \{Rejane, Sandra, Hugo, Carlos, Marcelo, Ana, Luciana\}$ .

Sabemos que : Rejane e Carlos são irmãos,

Hugo, Sandra e Marcelo são irmãos,

Ana e Luciana são irmãs.

a. No diagrama de  $A$  trace as flechas que representam a relação  $R$  de  $A$  em  $A$ , definida por " $x$  é irmão de  $y$ ".

b. Complete :

III-  $R =$

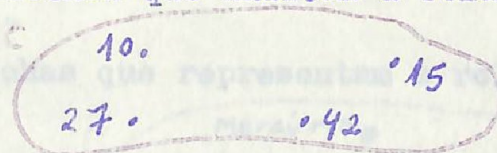


2) Seja  $C = \{10, 15, 27, 42\}$

a. No diagrama de  $C$ , trace as flechas que indicam a relação  $L$ , de  $C$  em  $C$ , definida por " $x < y$ ".

b. Complete:

$L =$

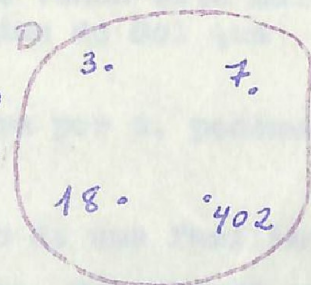


3) Seja  $D = \{3, 7, 18, 402\}$  e a relação  $T$ , de  $D$  em  $D$ ,  
 $T = \{(3,7), (7,3), (3,3), (18,3), (3,402)\}$

No diagrama de  $D$ , trace as flechas que representam  $T$ .

Observe que :

No gráfico da relação  $R$ , para cada flecha que parte de um ponto para outro, há outra que parte do segundo para o primeiro. O que não ocorre nos gráficos de  $L$  e  $T$ .



No gráfico da relação  $L$ , para cada flecha que parte de um ponto para outro, distinto do primeiro, não há flecha que parte do segundo para o primeiro.

No gráfico da relação  $T$ , o que se observa?



A relação R é simétrica.

As relações L e T não são simétricas.

A relação L é anti-simétrica.

As relações R e T não são anti-simétricas.

De um modo geral:

a. Uma relação R de A em A é simétrica se e somente se

No gráfico:

$x \circ \quad \circ y$

b. Uma relação R de A em A é anti-simétrica se e somente se

No gráfico:

$x \circ \quad \circ y$  ( para  $x \neq y$  )

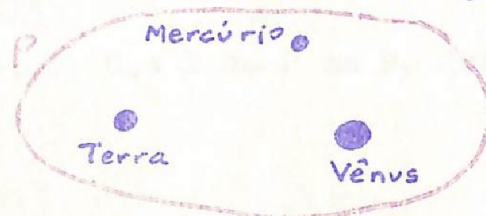
### III-TRANSITIVA

1) Considere o conjunto P, formado por alguns planetas do Sistema Solar:  $P = \{ \text{Mercúrio, Vênus, Terra} \}$  e a relação M de P em P, definida por "x está mais próximo do Sol que y".

a. No diagrama de P, trace as flechas que representam a relação M.

b. Complete:

M=



Podemos dizer que:

Se Mercúrio está mais próximo do Sol que Vênus e Vênus está mais próximo do Sol que Terra, então Mercúrio está mais próximo do Sol que Terra.

Representando Mercúrio por M, Vênus por v e Terra por t, podemos dizer que : Se  $(m,v) \in M$  e  $(v,t) \in M$  então  $(m,t) \in M$ .

2) Considere o conjunto F, formado pelos membros de uma família: Antônio, pai de Manuel, que por sua vez é pai de Pedrinho. Represente-os, respectivamente, por a, m e p e faça o que se pede.

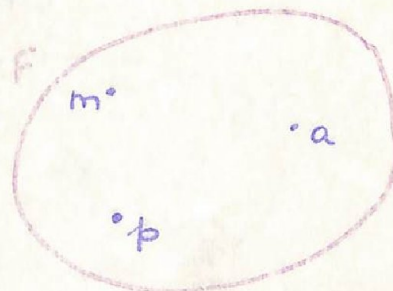
a. No diagrama de F, trace as flechas que indicam a relação S de F em F, definida por "x é pai de y".

b. Complete:

S=

Se  $(a,m) \in S$  e  $(m,p) \in S$

então  $( \quad , \quad ) \notin S$ .





3) Seja  $B = \{5, 7, 14, 15\}$  e  $T$  a relação De  $B$  em  $B$  definida por  $x y^m$ .

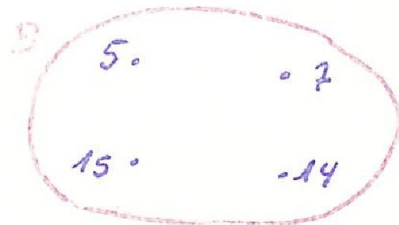
a. No diagrama de  $B$ , trace as flechas que representam a relação  $T$ .

b. Complete:

$T =$

Sejam três números  $x, y$  e  $z$ .

Se  $x$  é maior que  $y$  e  $y$  é maior que  $z$ ,  
então podemos afirmar que  $x$  é .....



Para as relações  $M$  e  $T$  podemos afirmar que : Se  $x$  está relacionado com  $y$  e  $y$  está relacionado com  $z$ , então  $x$  está relacionado com  $z$ . Porém, já não podemos fazer a mesma afirmação para a relação  $S$ .

Dizemos que as relações  $M$  e  $T$  são transitivas e que a relação  $S$  não é transitiva.

De um modo geral:

Uma relação  $R$  de  $A$  em  $A$  pe transitiva se e somente se

No gráfico :  $x \cdot y$

$x \cdot z$

RELAÇÕES DE ORDEM E DE EQUIVALÊNCIA

Seja  $P = \{1, 3, 4, 9, 15\}$  e as relações  $A, B, C, e D$  de  $P$  em  $P$ , definidas, respectivamente, por:

" $x$  é múltiplo de  $y$ "

" $x$  é menor que  $y$ "

" $x$  é primo com  $y$ "

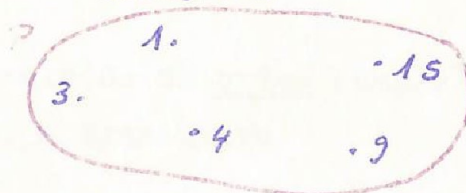
" $x$  tem o mesmo resto que  $y$  na divisão por três".

Represente  $A, B, C$  e  $D$ .

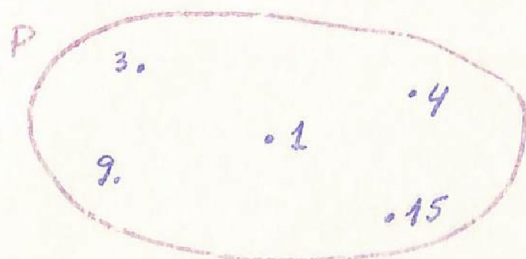
Relação A



Relação B



Relação C



Relação D



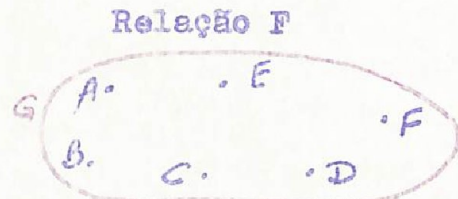
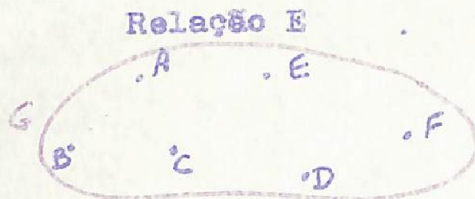


Seja  $G = \{A, B, C, D, E, F\}$  onde  $A = \{a, b, c\}$ ,  $B = \{a, b\}$ ,  $C = \{a\}$ ,  $D = \{b, c, f\}$ ,  $E = \{g, h, i\}$  e  $F = \{g, h, i, f\}$  e as relações de  $G$  em  $G$  definidas por :

E: "X tem mesmo número de elementos que Y"

F: "X está contido em Y".

Represente as relações E e F.



Complete o quadro abaixo, assinalando com x os quadrinhos convenientes para indicar as propriedades das relações A, B, C, D, E e F.

PROPRIEDADES \ RELAÇÃO	A	B	C	D	E	F
REFLEXIVA						
SIMÉTRICA						
ANTI-SIMÉTRICA						
TRANSITIVA						

Quais das relações acima são, ao mesmo tempo, reflexivas, simétricas e transitivas?

Quais são, ao mesmo tempo, reflexivas, anti-simétricas e transitivas?

De um modo geral:

- Uma relação  $R$  de  $A$  em  $A$  é uma relação de equivalência se e somente se for reflexiva, simétrica e transitiva.

- Uma relação  $R$  de  $A$  em  $A$  é uma relação de ordem (ampla) se e somente se  $R$  for reflexiva, anti-simétrica e transitiva.