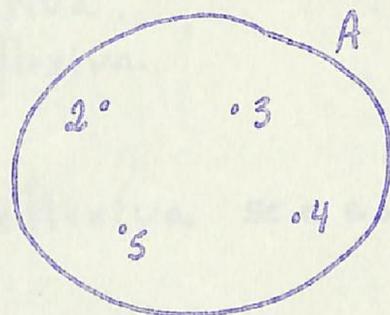


Propriedades das Relações

3) Reflexiva

1) a) No diagrama do conjunto $A \subset \mathbb{N}$:

A - Trace as flechas que indicam a relação P de A em A , definida por " x é múltiplo de y ".



b) Complete:

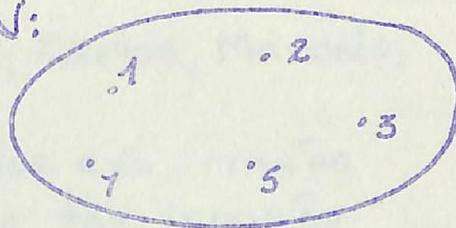
$$P = \{$$

c) Quais os elementos de A que são imagens de si mesmos pela relação P ?

d) Quais os que não o são?

2) a) No diagrama do conjunto $B \subset \mathbb{N}$:

- Trace as flechas que indicam a relação M de B em B :



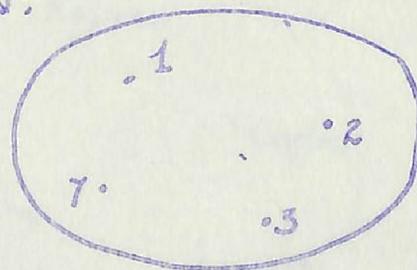
$$M = \{(5, 5), (5, 3), (2, 1), (1, 1)\}$$

b) Quais os elementos de B que são imagens de si mesmos pela relação M ?

c) Quais os que não o são?

3) a) No diagrama do conjunto $D \subset \mathbb{N}$:

- Trace as flechas que indicam a relação N de D em D , definida por " $x > y$ ".



b) Complete:

$$N = \{$$

c) Quais os elementos de D que são imagens de si mesmos pela relação N ?

d) Quais os que não o são?

Observe que:

No gráfico do exercício 1, todo ponto possui "laço", isto é, todo elemento do conjunto A é imagem de si mesmo pela relação R ; no gráfico do exercício 2 nem todo ponto possui "laço" e, no do exercício 3, nenhum ponto "laço".

possui

Dizemos que:

A relação P de A em A é reflexiva.

A relação M de B em B não é reflexiva.

A relação N de D em D não é reflexiva.

De um modo geral

Uma relação R de A em A é reflexiva se e somente se $\forall x \in A, (x, x) \in R$.

No gráfico:

• $x \circlearrowleft$ para todo ponto do gráfico.

II) Simétrica e Anti-simétrica

1) Seja $A = \{Rejane, Sandra, Hugo, Carlos, Marcelo, Ana, Luciana\}$.

Sabemos que: Rejane e Carlos são irmãos

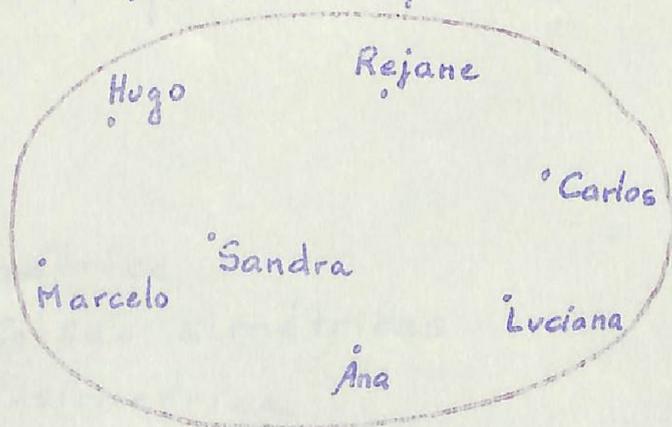
Hugo, Sandra e Marcelo são irmãos

Ana e Luciana são irmãs

a) No diagrama de A trace as flechas que representam a relação R de A em A , definida por " x é irmão de y ".

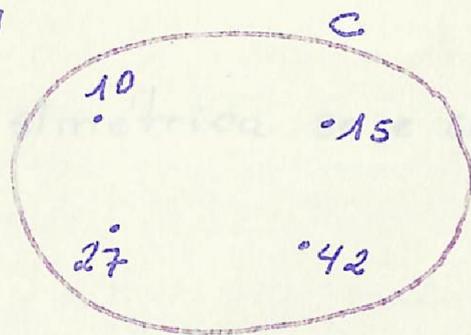
b) Complete:

$R = \{$



2) Seja $C = \{10, 15, 27, 42\} \subset \mathbb{N}$

a) No diagrama de C , trace as flechas que indicam a relação L , de C em C , definida por " $x < y$ ".



b) Complete:

$$L = \{$$

3) Seja $D = \{3, 7, 18, 402\} \subset \mathbb{N}$ e a relação T , de D em D , $T = \{(3, 7), (7, 3), (3, 3), (18, 3), (3, 402)\}$

a) No diagrama de D trace as flechas que representam T .



Observe que:

No gráfico da relação R , para cada flecha que parte de um ponto a outro, há outra que parte do segundo para o primeiro ponto considerados. O que não ocorre nos gráficos de L e T .

No gráfico da relação L , para cada flecha que parte de um ponto para outro, distinto do primeiro, não há flecha que parte do segundo para o primeiro.

No gráfico da relação T , o que se observa?

A relação R é simétrica

As relações L e T não são simétricas

A relação L é anti-simétrica

As relações R e T não são anti-simétricas

De um modo geral

a) Uma relação R de A em A é simétrica se e somente se

No gráfico

x y

b) Uma relação R de A em A é anti-simétrica se e somente se

No gráfico

x y (para $x \neq y$)

III) Transitiva

1) Considere o conjunto P , formado por alguns planetas do Sistema Solar;

$P = \{\text{Mercúrio, Vênus, Terra}\}$ e a relação M de P em P , definida por " x está mais próximo do Sol que y ".

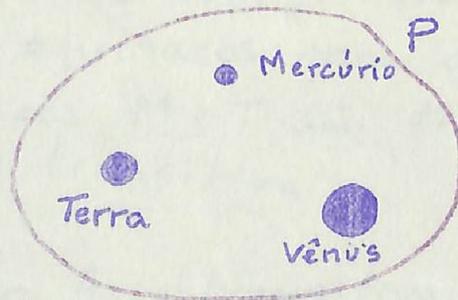
a) No diagrama de P , trace as flechas que representam a relação M .

b) Complete:

$M = \{$

Podemos dizer que:

Se Mercúrio está mais próximo do Sol que Vênus e Vênus está mais próximo do Sol que Terra então Mercúrio está mais próximo do Sol que Terra.



Representando Mercúrio por m , Vênus por v e Terra por t , podemos dizer que: Se $(m, v) \in M$ e $(v, t) \in M$ então $(m, t) \in M$.

2) Considere o conjunto F , formado pelos membros de uma família: Antônio, pai de Manuel, que por sua vez é pai de Pedrinho. Represente-os, respectivamente, por a , m e p e faça o que se pede:

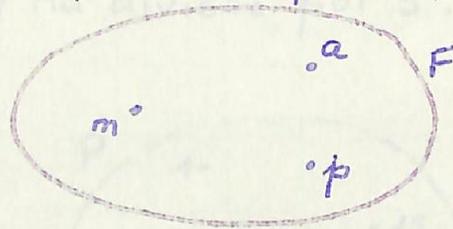
a) No diagrama de F , trace as flechas que indicam a relação S de F em F , definida por " x é pai de y ".

b) Complete:

$$S = \{$$

se $(a, m) \in S$ e $(m, p) \in S$

então $(\quad, \quad) \in S$.



3) Seja $B = \{5, 7, 14, 15\} \subset \mathbb{N} \in \mathbb{T}$, a relação de B em B , definida por " $x > y$ ".

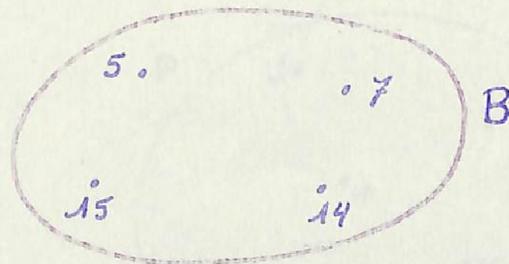
a) No diagrama de B , trace as flechas que representam a relação T .

b) Complete:

$$T = \{$$

Sejam três números,

x , y e z . Se x é maior que y e y , maior que z , então podemos afirmar que x



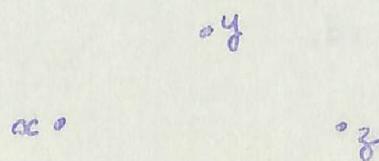
Para as relações M e T , podemos afirmar que: se x está relacionado com y e y está relacionado com z , então, x está relacionado com z . Porém, já não podemos fazer a mesma afirmação para a relação S .

Dizemos que as relações M e T são transitivas e que a relação S não é transitiva.

De um modo geral

Uma relação R , de A em A , é transitiva se e somente se

No gráfico:



Relações de ordem e de equivalência

Seja $P = \{1, 3, 4, 9, 15\}$ e as relações A, B, C e D de P em P , definidas, respectivamente por:

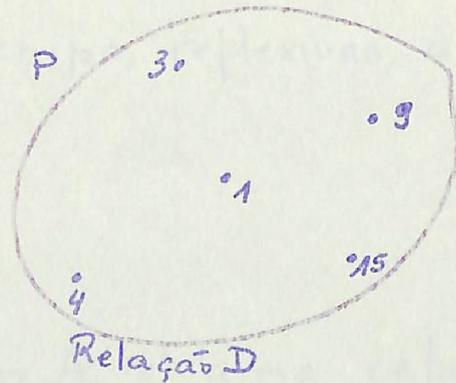
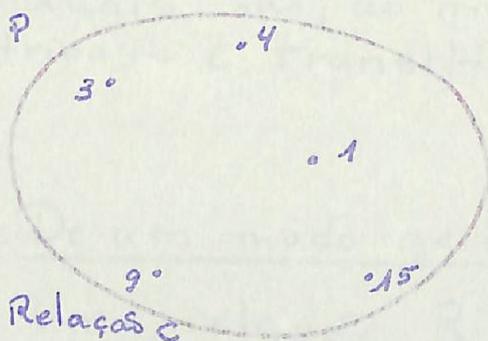
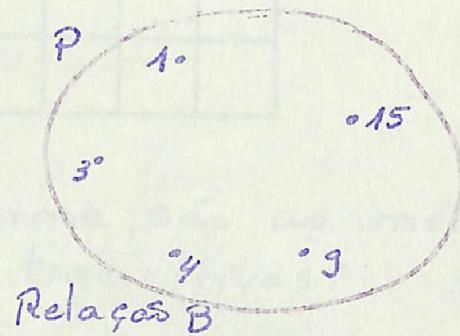
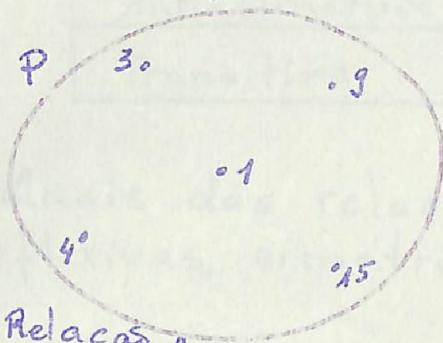
" x é múltiplo de y "

" x é menor que y "

" x é primo com y "

" x tem o mesmo resto que y na divisão por 3".

Represente A, B, C e D .



Seja $G = \{A, B, C, D, E, F\}$ onde

$A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, b\}$, $C = \{a\}$, $D = \{b, c, f\}$,

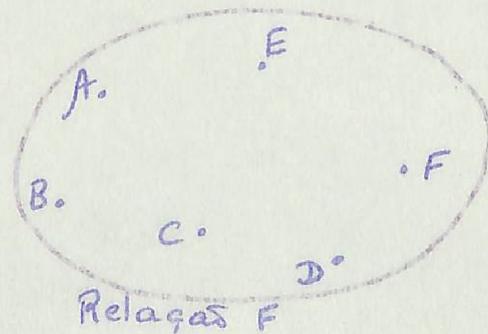
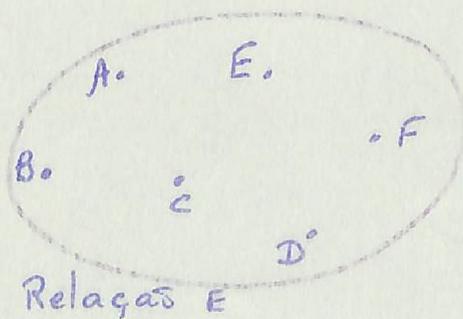
$E = \{g, h, i\}$ e $F = \{g, h, i, f\}$ e as relações de

G em G definidas por:

E : " X tem mesmo número de elementos que Y "

F : " X está contido em Y "

Represente as relações E e F .



Complete o quadro abaixo, assinalando com X os quadrinhos convenientes para indicar as propriedades das relações A, B, C, D, E, F

Relação Propriedade	A	B	C	D	E	F
Reflexiva						
Simétrica						
Anti-simétrica						
Transitiva						

Quais das relações, acima, são ao mesmo tempo, reflexivas, simétricas e transitivas?

Quais são, ao mesmo tempo, reflexivas, anti-simétricas e transitivas?

De um modo geral:

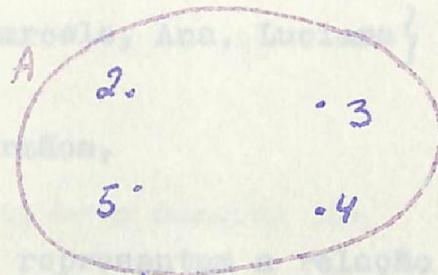
- Uma relação R de A em A é uma relação de equivalência se e somente se R for reflexiva, simétrica e transitiva.

- Uma relação R de A em A é uma relação de ordem se e somente se R for reflexiva, anti-simétrica e transitiva.

PROPRIEDADES DAS RELAÇÕES

I - REFLEXIVA

1) a. No diagrama do conjunto A trace as flechas que indicam a relação P de A em A, definida por "x é múltiplo de y".



b. Complete:

P =

c. Quais os elementos de A que são imagens de si mesmos pela relação P?

d. Quais os que não o são?

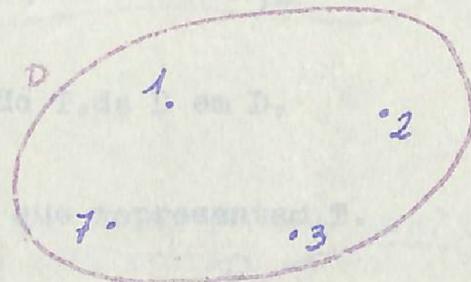
2) a. No diagrama do conjunto B trace as flechas que indicam a relação M de B em B, $M = \{(5,5), (5,3), (2,1), (1,1)\}$.



b. Quais os elementos de B que são imagens de si mesmos pela relação M?

c. Quais os que não o são?

3) a. No diagrama do conjunto D trace as flechas que indicam a relação N de D em D, definida por "x > y".



b. Complete:

N =

c. Quais os elementos de D que são imagens de si mesmos pela relação N?

d. Quais os que não o são?

Observe que;

No gráfico do exercício 1, todo ponto possui "laço", isto é, todo elemento do conjunto A é imagem de si mesmo pela relação R; no gráfico do exercício 2 nem todo ponto possui "laço" e, no gráfico do exercício 3, nenhum ponto possui laço.

Dizemos que :

A relação P de A em A é reflexiva.

A relação M de B em B não é reflexiva.

A relação N de D em D não é reflexiva.

De um modo geral:

Uma relação R de A em A é reflexiva se e somente se $\forall x \in A, (x,x) \in R$.

No gráfico : $x \in R$ para todo ponto do gráfico.

II- SIMÉTRICA e ANTI-SIMÉTRICA

1) Seja $A = \{Rejane, Sandra, Hugo, Carlos, Marcelo, Ana, Luciana\}$.

Sabemos que : Rejane e Carlos são irmãos,

Hugo, Sandra e Marcelo são irmãos,

Ana e Luciana são irmãs.

a. No diagrama de A trace as flechas que representam a relação R de A em A , definida por " x é irmão de y ".

b. Complete :

$R =$



2) Seja $C = \{10, 15, 27, 42\}$

a. No diagrama de C , trace as flechas que indicam a relação L , de C em C , definida por " $x < y$ ".

b. Complete:

$L =$

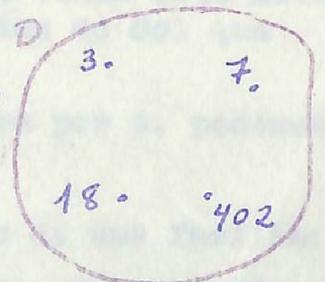


3) Seja $D = \{3, 7, 18, 402\}$ e a relação T , de D em D ,
 $T = \{(3,7), (7,3), (3,3), (18,3), (3,402)\}$

No diagrama de D , trace as flechas que representam T .

Observe que :

No gráfico da relação R , para cada flecha que parte de um ponto para outro, há outra que parte do segundo para o primeiro. O que não ocorre nos gráficos de L e T .



No gráfico da relação L , para cada flecha que parte de um ponto para outro, distinto do primeiro, não há flecha que parte do segundo para o primeiro.

No gráfico da relação T , o que se observa?

A relação R é simétrica.

As relações L e T não são simétricas.

A relação L é anti-simétrica.

As relações R e T não são anti-simétricas.

De um modo geral:

a. Uma relação R de A em A é simétrica se e somente se

No gráfico:

$x \circ \quad \circ y$

b. Uma relação R de A em A é anti-simétrica se e somente se

No gráfico:

$x \circ \quad \circ y$ (para $x \neq y$)

III-TRANSITIVA

1) Considere o conjunto P, formado por alguns planetas do Sistema Solar: $P = \{ \text{Mercúrio, Vênus, Terra} \}$ e a relação M de P em P, definida por "x está mais próximo do Sol que y".

a. No diagrama de P, trace as flechas que representam a relação M.

b. Complete:

M=



Podemos dizer que:

Se Mercúrio está mais próximo do Sol que Vênus e Vênus está mais próximo do Sol que Terra, então Mercúrio está mais próximo do Sol que Terra.

Representando Mercúrio por M, Vênus por v e Terra por t, podemos dizer que : Se $(m,v) \in M$ e $(v,t) \in M$ então $(m,t) \in M$.

2) Considere o conjunto F, formado pelos membros de uma família: Antônio, pai de Manuel, que por sua vez é pai de Pedrinho. Represente-os, respectivamente, por a, m e p e faça o que se pede.

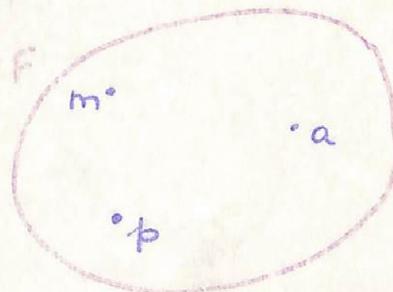
a. No diagrama de F, trace as flechas que indicam a relação S de F em F, definida por "x é pai de y".

b. Complete:

S=

Se $(a,m) \in S$ e $(m,p) \in S$

então $(\quad , \quad) \notin S$.



3) Seja $B = \{5, 7, 14, 15\}$ e T a relação De B em B definida por $x y^m$.

a. No diagrama de B , trace as flechas que representam a relação T .

b. Complete:

$T =$

Sejam três números x, y e z .

Se x é maior que y e y é maior que z ,
então podemos afirmar que x é



Para as relações M e T podemos afirmar que : Se x está relacionado com y e y está relacionado com z , então x está relacionado com z . Porém, já não podemos fazer a mesma afirmação para a relação S .

Dizemos que as relações M e T são transitivas e que a relação S não é transitiva.

De um modo geral:

Uma relação R de A em A pe transitiva se e somente se

No gráfico : $x \cdot y$

$x \cdot z$

RELAÇÕES DE ORDEM E DE EQUIVALÊNCIA

Seja $P = \{1, 3, 4, 9, 15\}$ e as relações $A, B, C, e D$ de P em P , definidas, respectivamente, por:

" x é múltiplo de y "

" x é menor que y "

" x é primo com y "

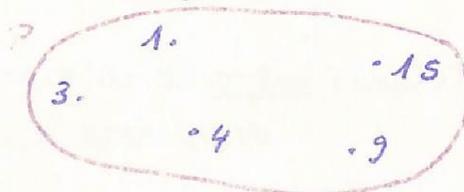
" x tem o mesmo resto que y na divisão por três".

Represente A, B, C e D .

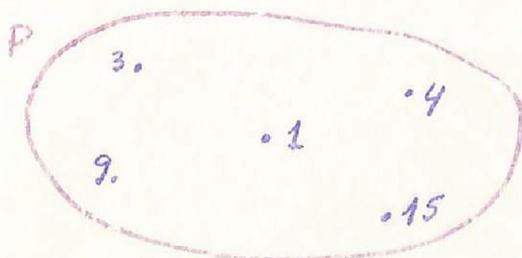
Relação A



Relação B



Relação C



Relação D

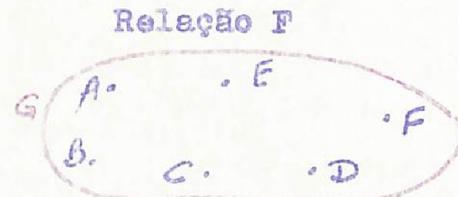
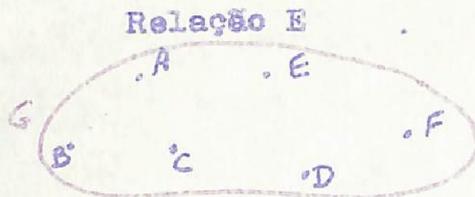


Seja $G = \{A, B, C, D, E, F\}$ onde $A = \{a, b, c\}$, $B = \{a, b\}$, $C = \{a\}$, $D = \{b, c, f\}$, $E = \{g, h, i\}$ e $F = \{g, h, i, f\}$ e as relações de G em G definidas por :

E: "X tem mesmo número de elementos que Y"

F: "X está contido em Y".

Represente as relações E e F.



Complete o quadro abaixo, assinalando com x os quadrinhos convenientes para indicar as propriedades das relações A, B, C, D, E e F.

PROPRIEDADES \ RELAÇÃO	A	B	C	D	E	F
REFLEXIVA						
SIMÉTRICA						
ANTI-SIMÉTRICA						
TRANSITIVA						

Quais das relações acima são, ao mesmo tempo, reflexivas, simétricas e transitivas?

Quais são, ao mesmo tempo, reflexivas, anti-simétricas e transitivas?

De um modo geral:

- Uma relação R de A em A é uma relação de equivalência se e somente se for reflexiva, simétrica e transitiva.

- Uma relação R de A em A é uma relação de ordem (ampla) se e somente se R for reflexiva, anti-simétrica e transitiva.