Operações com conjuntos

Operações numéricas

Curso de Matemática Moderna
- 1966 -

Rachel G. Wajner

Operações com conjuntos

Após o professor ter trabalhado muito em classe com conjuntos de várias espécies, ter desenvolvido certas noções básicas, como pertinência, inclusão, igualdade, e proporcionado às crianças o estabelecimento de relações entre conjuntos e entre elementos de conjuntos, introduzirá as operações com conjuntos.

1. Reunião — A Reunião entre dois conjuntos A e B é um novo conjunto formado pelos elementos que pertencem a A ou a B.

A Reunião é também denominada União e o símbolo da operação é ∪.

Inicialmente, com os alunos, devemos trabalhar sòmente com conjuntos disjuntos, aproveitando os exemplos reais da sala de aula. Ex:

Podemos considerar o conj. dos alunos

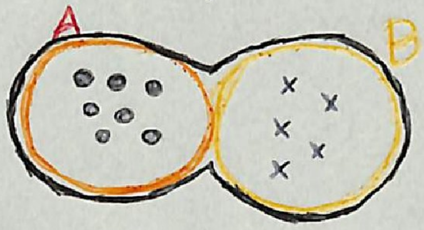
Na nossa classe temos o conjunto de A formado pelas no geral meninas e o conjunto O constituído por meninos. A Reunião entre os conjuntos A e O será o conjunto C, isto é, o conjunto de tôdas as crianças da classe.

Aproveitando os brinquedos trazidos pelas crianças, o professor poderá pedir que formem vários subconjuntos, segundo determinados atributos, e operar com os subconjuntos, constituindo o conjunto reunião dos mesmos. Ex:

B - conjunto de bonecas
V - conjunto de veículos
C - conjunto dos brinquedos que não são nem bonecas nem veículos.

Reunindo tôdos êstes conjuntos na mesma caixa encontramos o conj. R.

O professor deverá repetir êstes exemplos utilizando vários materiais, tanto ~~reais~~ concretos como simbólicos. Poderá também usar a representação através do diagrama:



$A \cup B = R$
— R

Quando o professor perceber que a noção de Reunião foi compreendida, passará à operação seguinte, que será a

2. Complementação — O conjunto complementar de um conjunto dado é formado por todos os elementos do universo do qual se fala, e que não pertencem a êste conjunto.

Trazemos aqui o exemplo dos brinquedos: O professor formou o conjunto Reunião dentro de uma caixa. Agora, considerando o conjunto de todos os brinquedos da aula, que são os que estão dentro da caixa, o professor pedirá que retirem o conjunto de bonecas.

Os brinquedos que ficaram na caixa constituem o conjunto Complementar do conjunto de bonecas.

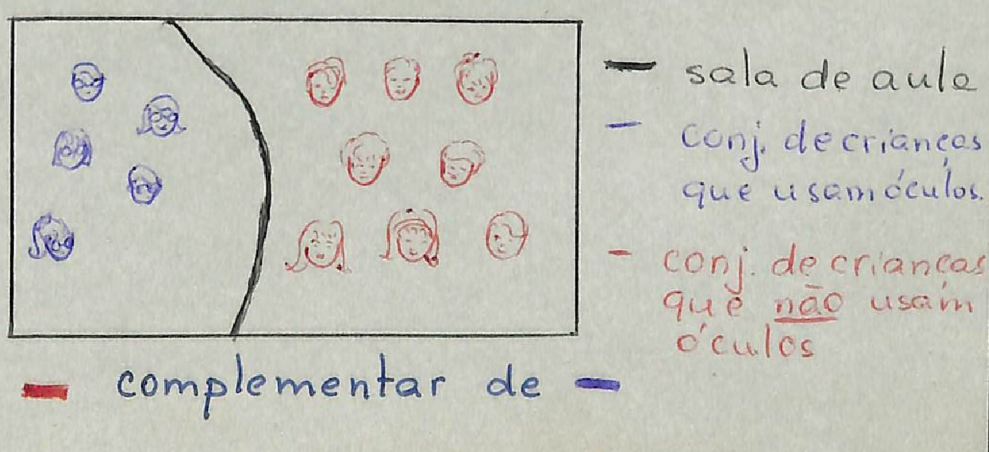
Êste exemplo poderá ser repetido com conjuntos de crianças, com objetos escolares, enfim, com materiais diversos.

Achamos interessante levar as crianças a perceberem que assim como podem operar reunindo conjuntos, podem desmanchar a operação, voltando aos conjuntos iniciais.

Outra descoberta interessante é notar que cada vez que as crianças constituem um conjunto X, segundo determinações específicas, automàticamente determinam um outro conjunto formado pelos elementos que não pertencem ao conjunto X. Por exemplo: Se dentro da sala de aula formamos um conjunto das crianças que usam óculos, ao mesmo tempo determinamos um outro conjunto, constituido pelas crianças que não usam óculos.

Dentro da sala de aula, o conjunto das crianças que não usam óculos é Complementar do conjunto das crianças que usam óculos.

Representação pelo diagrama:



3. Interseção – A intersecção de dois conjuntos A e B é constituída por todos os elementos que pertencem a A e a B simultaneamente.

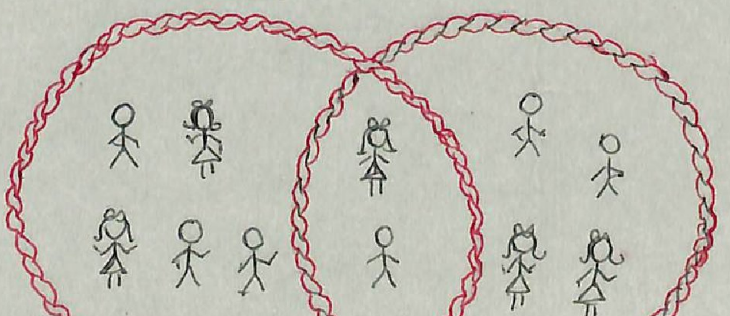
Até agora temos operado com conjuntos disjuntos.

Sendo o objetivo do professor introduzir a intersecção, êle deverá aproveitar uma situação de classe ou os exemplos de conjuntos surgidos em aula que tenham elementos em comum. Exemplo:

Preparando uma festinha na aula:
- conjunto dos alunos que participam do côro.
- conjunto dos alunos que fazem parte das danças.

Ao formar os conjuntos com os alunos em classe, (o professor usará cordas coloridas para delimitá-los) as crianças constatarão que dois alunos participam do côro e das danças também. Êles mesmos deverão procurar a melhor forma para delimitar os conjuntos com as cordas.

Mais tarde poderão procurar representar o que fizeram, a solução encontrada, através do diagrama.



Conj. do côro Conj. das danças

As crianças poderão ver que os conjuntos são diferentes embora possuam elementos em comum, e que podemos formar um novo conjunto com êstes elementos em comum, ao qual chamamos de Intersecção.

O símbolo da Intersecção é $\cap$.

Vários exercícios deverão ser efetuados em classe para que a noção de intersecção se torne bem clara aos alunos.

O professor inclusive poderá utilisar conjuntos disjuntos e pedir que encontrem o conjunto intersecção. Como as crianças já conhecem o conjunto vazio, talvez descubram por si mesmas a resposta.

Parece-nos que nesta fase do trabalho a professôra poderá trabalhar com a Reunião de conjuntos que tenham elementos em comum, utilisando tôdas as oportunidades surgidas, correlacionando com outras matérias e representando através de diagramas coloridos.

Propriedades das operações com conjuntos

Comutatividade: Durante as oportunidades que as crianças têm de operar com conjuntos, a professôra irá conduzindo a classe, através de perguntas bem formuladas, a constatar que tanto na Reunião como na Intersecção a ordem dos conjuntos não altera o resultado da operação.

Quer coloquemos o conjunto de bonecas primeiro na caixa ou o coloquemos por último, o conjunto de brinquedos continua o mesmo.

O mesmo quanto à Intersecção: quer tomemos inicialmente o conjunto dos alunos do côro ou o conjunto dos alunos das danças, o conjunto intersecção continua sendo constituído pelos dois mesmos elementos. Dizemos então que a Reunião e a Intersecção são comutativas.

O mesmo não sucede com a complementação. Exemplo: Conjunto de flôres da professôra.

Se do conjunto de flôres da professôra tomamos o conjunto de margaridas, o conjunto complementar será o de amores-perfeitos. Mas se tomamos o conjunto de amores-perfeitos, o conjunto complementar será o de margaridas.

Associatividade: A Reunião e a Intersecção gozam da associatividade, e poderemos demonstrar quando as crianças já estiverem operando com mais de dois conjuntos.

Elemento neutro: Trabalhando com o conjunto vazio as crianças observarão que na reunião de qualquer conjunto com o vazio, o conjunto não se altera. Por isso o conjunto vazio é chamado elemento neutro para a

Operações reunião

Operações no conjunto dos Naturais

Depois das crianças terem compreendido a distinção entre números e conjuntos, a igualdade dos números, os conjuntos vazios e o número zero, podemos iniciar o estudo das operações com números, tendo como imagem as operações com conjuntos.

1. Adição — A adição está ligada à reunião de conjuntos, mas sòmente quando os conjuntos são disjuntos o resultado da adição será o mesmo que o cardinal do conjunto reunião.

O professor iniciará tomando dois conjuntos de objetos quaisquer, por exemplo, bolitas e tampinhas.

"Temos aqui um conjunto de tampinhas (dentro de um saquinho) cujo cardinal é 2, e êste outro conjunto de bolitas (também num saquinho), cujo cardinal é 3.

Reunindo êstes dois conjuntos numa caixa, formamos um novo conjunto maior. Qual será o cardinal do conjunto resultante da reunião?"

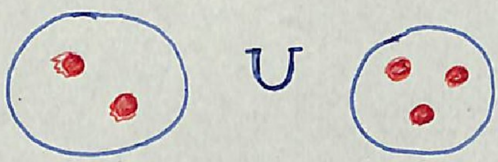
Podemos responder a esta pergunta descobrindo o conjunto-padrão (conjunto dos Naturais) que pode pôr-se em correspondência um-a-um com o conjunto reunião.

Êste mesmo exemplo pode ser realizado sem referir-se ao conteúdo dos saquinhos, tomando-se apenas o cardinal dos conjuntos.

Despejando os dois saquinhos na

caixa teremos o conjunto maior, cujo cardinal é 5, mas não sabemos ~~se~~ a natureza dos elementos ~~são semelhantes ou diferentes~~. O número 5 foi encontrado através da dupla (2, 3) independente da natureza dos elementos.

As crianças poderão operar com conjuntos procurando sempre a propriedade numérica dos mesmos. Exemplo:



2 + 3

Ao trabalharmos na adição sòmente nos interessa a propriedade numérica do conjunto, sejam quais forem os elementos. Por isso a adição é uma operação abstrata.

Num estágio mais avançado as crianças não necessitam manipular conjuntos de objetos quando desejam achar a soma de dois números. Operando com símbolos, através do sinal +, encontram a soma. Assim se escreve:

$$2 + 3 = 5$$

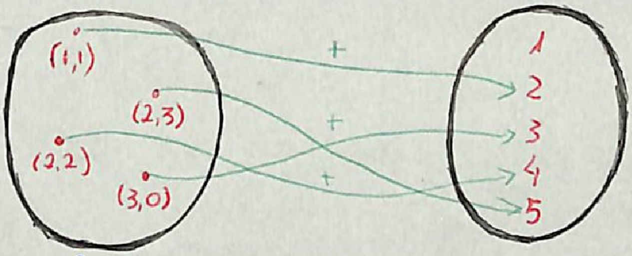
parcela + parcela = soma

A operação pode ser realizada sem dar atenção ao que os símbolos representavam inicialmente.

Para melhor estudo, as crianças podem organizar a tábua da operação.

Observando a tábua da adição notamos que a cada par de números corresponde um terceiro número como soma. Escolhemos os números numa determinada ordem, portanto podemos classificá-los como par ordenado (2, 3).

Assim podemos definir a adição como uma função que aplica todo par de números sôbre sua soma.



O sinal + escrito por cima das setas recorda-nos que a aplicação indicada é uma aplicação particular denominada Adição.

Propriedades da Adição

O professor levando as crianças a observarem a tábua da adição, poderão evidenciar algumas propriedades da operação.

As crianças perceberão que tanto ao par (2,3) como ao par (3, 2) corresponde o cardinal 5.

Assim, com outros exemplos evidenciarão a comutatividade.

Na tábua evidencia-se também o elemento neutro, no caso o zero.

Achamos interessante fazer as crianças notarem que a adição é fechada no conjunto dos naturais. Sejam quais forem os números tomados, sempre é possível fazer corresponder um número à sua soma.

A adição pode ser estendida a mais de dois números. Tomemos como exemplo uma adição com três parcelas: 2, 3 e 5.

As crianças poderão realizar a operação tomando inicialmente os dois primeiros números (2, 3) e ao resultado adicionar 5: $(2+3)+5=10$; ou então realizando primeiro a adição dos dois últimos números e ao resultado acrescentar 2: $2+(3+5)=10$.

Efetuando as adições verificarão que os resultados são os mesmos.

Através de vários exemplos as crianças serão levadas a concluir que a adição é uma operação associativa.

2. Subtração — Tomemos a caixinha na qual reunimos o conjunto de bolitas e o conjunto de tampinhas. Vamos agora retirar o conjunto de bolitas. O que restou? O conjunto de tampinhas.

Se considerarmos apenas o cardinal de cada conjunto, repetiremos assim a operação:

Temos um conjunto com 5 elementos, retiramos um conjunto de 3 elementos e restou um conjunto com 2 elementos.

Esta operação é denominada subtração e é assim representada:

$$5 - 3 = 2$$

minuendo - subtraendo = resto ou diferença

Reunindo o conjunto que restou com o conjunto que retiramos da caixa voltamos ao conjunto inicial. É nisto que repousa a relação inversa entre a adição e a subtração.

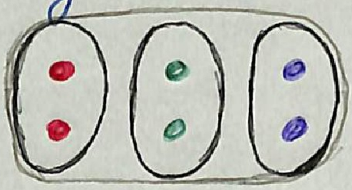
No nosso caso 5 − 3, fazemos na

realidade a seguinte pergunta: Qual é o número que adicionado a 3 dá 5?

Ao conduzirmos a subtração desta maneira, podemos ligá-la à complementação de conjuntos.

O professor deverá ainda levar as crianças a perceberem que a subtração nem sempre é possível dentro do conjunto dos Naturais.

3. <u>Multiplicação</u> — Certos autores apresentam a multiplicação como uma adição de parcelas iguais. Sendo assim, a professôra poderá pedir que as crianças formem 3 conjuntos com 2 elementos cada.



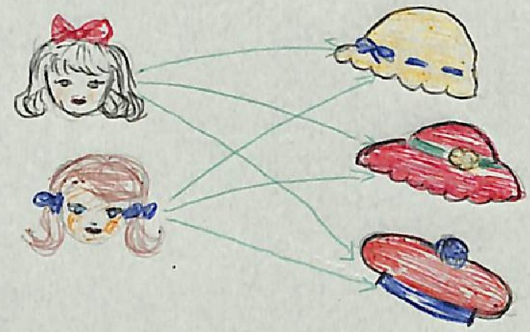
Reunindo os conjuntos encontrarão um novo conjunto de 6 elementos. Assim, em vez de representar com os cardinais 2 + 2 + 2, indica-se 3 × 2. O sinal <u>vezes</u> quer dizer que o número 2 foi tomado três vêzes.

Dienes não aceita esta conceituação e afirma que na operação 3 × 2, o número 3 é propriedade do conjunto de conjuntos, ao passo que o número ~~dois~~ 2 é propriedade do conjunto. Portanto, cada têrmo da operação refere-se a universos diferentes.

As crianças, antes de aprenderem assim a multiplicação, deverão trabalhar muito com conjuntos e com conjunto de conjuntos.

A multiplicação também pode ser apresentada através do produto cartesiano. Ex:

Tomemos um conjunto de duas meninas e um conjunto de três chapéus. Queremos saber quantas combinações diferentes podemos obter com êstes elementos:



Contando as setas, encontramos seis combinações diferentes, isto é, seis pares (criança, chapéu). Neste caso, é indiferente tomarmos 2 x 3 ou 3 x 2.

<u>Propriedades da multiplicação</u>

As crianças organizando a tábua operatória da multiplicação poderão descobrir algumas propriedades. Verificarão que as propriedades da multiplicação são as mesmas da adição, com pequenas diferenças.

Comutatividade: Tomando um par de números em qualquer ordem, o produto não se altera.

Se as crianças trabalharam com produto cartesiano, a comutatividade já foi evidenciada.

Elemento neutro - na tábua operatória aparece o número <u>1</u> como elemento neutro.

O <u>zero</u> aparece como o elemento terrível da operação, pois anula qualquer resultado.

Fechamento: As crianças poderão ver que a multiplicação é sempre possível no conjunto dos Naturais.

Associatividade: Assim como na adição podemos multiplicar mais de dois números:

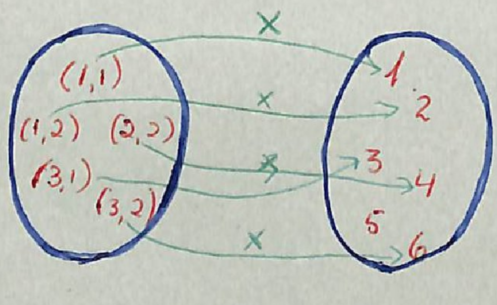
$2 \times 3 \times 5 =$

$(2 \times 3) \times 5 = 30$

$2 \times (3 \times 5) = 30$

Observando-se ainda a tábua da multiplicação, notamos que a cada par de números corresponde um terceiro número, que é o produto. Assim Papy define a multiplicação:

"A multiplicação é a função que aplica todo par de naturais sôbre seu produto".



4. <u>Divisão</u> — A divisão pode ser introduzida como a operação inversa da multiplicação.

Tomando três conjuntos de dois elementos, efetuamos a multiplicação $3 \times 2 = 6$. Se considerarmos um conjunto de 6 elementos, e quisermos saber em quantos subconjuntos de 2 elementos podemos reparti-lo, a divisão é a operação que permite encontrar o resultado.

Podemos também formular a pergunta de maneira diferente: Temos um conjunto de 6 elementos e queremos dividi-lo em três subconjuntos, quantos elementos terá cada subconjunto?

A divisão pode também ser introduzida através da partição. O professor encontra em classe várias oportunidades para trabalhar em partição. Ex:

A nossa classe é de 25 alunos.

Queremos trabalhar em 5 subgrupos, e realizamos uma partição no conjunto nossa classe.

Realizando a mesma operação dentro do conjunto dos Naturais, temos a divisão $25 : 5 = 5$

dividendo : divisor = quociente.

Através de exemplos diversos as crianças perceberão que há casos em que a divisão não é exata, isto é, em que o quociente é aproximado, sobrando um resto; há casos em que a divisão não é possível dentro do conjunto dos Naturais.

Mais tarde o professor conduzirá a aprendizagem de maneira a levar as crianças a compreenderem que o zero como divisor é impossível na divisão.