Fonte: Edward Lee Thorndike "A nova metodologia da Aritmética" Trad: prof. Amadyr Coelho. Págs: 245 a 254.

Capítulo XI

ALGUMAS CONTROVERSIAS INSTRUTIVAS

Há três questões capazes de provocar entre professores de aritmética, disputas mais acesas e argumentação mais abundante do que uma dúzia de outros casos juntos. São elas: Deverá a substração ser ensinada pelo método "subtrativo" ou pelo método "aditivo"?

Na divisão por decimal, deve-se ensinar a mover a vírgula no dividendo e no divisor, tornando êste inteiro ou a separar à direita do dividendo tantas casas, quantas forem as casas de dizima do divisor? Deve-se permitir o uso de chaves para conferição do resultado?

As opiniões acham-se muito divididas em tôrno de cada uma destas questões e tão extremadas, como entre Republicanos e Democratas. Os partidários de cada facção chegam a apaixonar-se de tal modo, pela sua doutrina, que a adoção de um dos métodos, em uma escola, é, muitas vezes causa de regular campanha. Esta, não raro, se acompanha de grande excitação e empolga de tal maneira os ânimos, que, infortunadamente, ficam, muitas vezes, relegados para plano inferior assuntos bem mais importantes.

Em qualquer dos três casos, uma discussão tendente a demonstrar a superioridade de um dos métodos não merece grande importância. O bom senso sugere que, quando a metade, aproximadamente, das pessoas que devem entender da questão, estão de um lado e pouco mais da metade, de outro, não deve haver grande superioridade de um ponto de vista sôbre o outro. Veremos que esta afirmação exprime a verdade, examinando os três casos em debate. Cada lado conta, mais ou menos, o mesmo número de pontos a seu favor. A demonstração da superioridade de um e de outro não se compara em importância com a necessidade de eliminar os problemas irreais, reduzir o esfôrço visual decorrente da cópia de números, estimular a verificação de cada novo processo, pelos processos aprendidos, buscar motivos para "drills" ou organizar os tópicos sob o ponto de vista das necessidades do aprendiz. Nesses casos, é de supor que cada um dos processos contratados apresenta certas vantagens. E aí está. Ao invés de nos pormos a questionar estérilmente, esforçando-nos por demonstrar a superioridade de um, devemos procurar descobrir um terceiro que reúna algumas ou todas as vantagens de ambos. Êste caso, aliás, se assemelha muito àquele da expedição que, chegada à margem de um rio, dividiu-se em dois partidos, porque argumentavam uns ser preferivel marchar até a ponte localisada a dez milhas a molhar-se vadeando a corrente, e outra ser melhor molhar-se um pouco a cansar-se e perder tempo em ir tão longe - quando era possivel que se encontrasse um barco nas imediações! Será portanto, conveniente analizarmos estes três casos típicos da divergência de difícil solução, já pela esperança de acharmos melhor trilha, já como exercício de confrontação de vantagens.

DOIS MÉTODOS PARA O ENSINO DA SUBTRAÇÃO

Os dois processos usados para efetuar a subtração, consistem, em essência, no seguinte:

Método subtrativo

```
370520
160875
------
209645
```

Muda-se o 0 para 10. O 2 fica valendo 1. 10 menos 5 = 5
Muda-se o 1 para 11. O 5 fica valendo 4. 11 menos 7 = 4
Muda-se o 4 para 14, e o 0 para 10. O 10 fica valendo 9 e o 7 fica valendo 6. 14 menos 8 = 6
7 fica valendo 6 14 menos 8 = 6
9 menos 0 = 9
6 menos 6 = 0
3 menos 1 = 2

Método aditivo

```
370520
160875
------
```

O 0 passa para 10. 10 menos 5 = 5. O 7 passa para 8.
O 2 passa para 12. 12 menos 8 = 4. O 8 passa para 9.
O 5 passa para 15. 15 menos 9 = 6. O 0 passa para 1.
O 0 passa para 10. 10 menos 1 = 9. O 6 passa para 7.

O processo de "pedir emprestado" ou subtrativo, basea-se no axioma de que somando e subtraindo o mesmo número ao minuendo, êste não se altera. O processo "adito" funda-se no axioma de que, somando o mesmo número ao minuendo e ao subtraendo, a diferença não se altera.

Observa-se que em ambos os métodos dizemos 10 menos 5 =......, 11 menos 7=.... 12 menos 8=....... etc. e não 5 e ....= 10, 7 e .....=11, 8 e..... = 12. Poderiamos usar do mesmo modo, com acerto, a forma 5 e ... ..= 10, 7 e .....=11, 8 e.......=12. Isto é, a escolha entre diminuir o minuendo e aumentar o subtraendo é inteiramente independente do ato de pensar nos fatos elementares da subtração (por ex. em 2-1) seja como "2 - 1, 1, porque de 2 tirando 1 fica 1", seja como "2-1,1,porque tendo 1 para ter 2 é preciso mais 1. Observe-se ainda, que, embora pensemos na subtração 10, 5, 5 diretamente, sem qualquer pensamento de que 5 somando a 5 faz 10, podemos ter APRENDIDO ORIGINARIAMENTE, 10, 5, 5, pensando "5 e... ..= 10", e aplicar o conhecimento que temos da adição, para achar o resultado.

As discussões relativas ao método subtrativo e aditivo incluem, em realidade três questões diferentes:

(1) Devemos aprender as combinações da subtração com o auxílio das combinações da adição, usando a forma a + ...= b?

(2) Assim sendo, devemos reter esta forma até que tenhamos aprendido a pensar no fato diretamente? Até chegarmos a pensar, quando subtraimos, só "10,5,5,", 14,6,8", etc. devemos pensar "5 e...= 10,"6 e... = 14" ou alterar, em nossa linguagem interior, esta forma verbal para "10 menos 5" ou "5 de 10" ou ainda usar "5 e....= 10" ou 5 para 10? ou 10 menos 5 = ... ou 5 de 10 =......., " segundo o problema?

(3) Devemos diminuir no minuendo ou acrescentar no subtraendo? Procedamos por ordem.

Há vantagens em aproveitar os conhecimentos da adição para facilitar a derivação das combinações da subtração, porque poupa tempo e, o que é mais importante, estimula mais a pensar ativamente do que a decorar ou contar. Há desvantagens, porque o aluno pode confundir os processos, somando, quando deve subtrair e vice-versa. "2 e quanto = 5?" é mais facilmente confundivel com "2 e 5 = quanto?" do que "5 menos 2= quanto."

Parece que a grande maioria dos técnicos estariam a favor do aprendizado inicial dos fatores elementares da subtração pela derivação dos fatos da adição (auxiliado por subtrações objetivas) si se pudessem assegurar de que o aluno distinguiria, nitidamente, a subtração da adição, sendo capaz de dar-lhes nomes apropriados, compreendendo tão bem que tal operação serve para fornecer respostas a questões como "Perdeu, ficou" "Cozinhou", comeu, ficou" Ganhou, gastou, tem", etc. quanto a "Quanto...é maior, mais velho, mais longo do que...?" Tem deseja, deve obter" etc e em seguida aprender a pensar nos resultados da subtração diretamente, quando necessário. Com ensino adequado, o emprega da forma "e... ou para" não constituiria nenhum embaraço a obtenção de qualquer destes resultados. Um uso fanatico da forma aditiva que limitasse a ideia de subtração aos casos de achar o que falta para restabelecer o equilibrio, ou fracassaria na introdução do sinal menos ou deixaria o aluno desajudado, quando arguido: "Que fica quando se tiram 7 de 13?" e casos semelhantes.

Em suma, parece haver saldo a favor do APRENDIZADO das combinações de subtração pela forma aditiva, desde que disso nenhum prejuizo resulte para certos aspectos importantes do aprendizado da subtração em geral.

Chegamos, agora, à segunda questão: "Convem reter a forma" e .... ou para" ou substitui-la por "menos ou de" ou permitir o uso de mais de uma forma verbal, até que tenhamos aprendido a pensar no resultado diretamente, pela própria situação, sem interferencia de qualquer forma verbal.

Antes de entrarmos em discussão, é melhor confessar lealmente, que não lograremos resposta, segura. Há forças demais em conflito.

A subtração tem dois empregos principais. Em um conjunto de aplicações, é claramente um resto; em outro, uma diferença. O primeiro é o que dá mais na vista, o que mais impressiona, é o mais dramático; o segundo, o mais frequente. Todos os restos podem ser considerados como diferença, embora algumas vezes, com certo esforço de pensamento; as diferenças, porem, não podem ser concebidos como restos, senão, com muito maior esfôrço. O têrmo resto, a maior parte das vezes, evoca problemas irreais. Assim, os casos: "Tive, perdi, ficou" "Fiz, comi deixei", seriam, respondidos na realidade, não contando os tidos e os feitos, nem contando o perdido e o comido e subtraindo, mas simplesmente contando as moedas e os bolos que ficaram.

Na vida real, estes problemas se transformariam em problemas de diferenças: "Tive...., Tenho agora.... Deve ter perdido...." O perdido não é naturalmente pensado como resto, mas como a diferença.

Similarmente, como "fiz....Há agora....Comemos......." De fato, com exceção dos casos em que o minuendo e o subtraendo são ambos conhecidos sem calculo, ou o minuendo é conhecido e o subtraendo menor que o resto, a determinação de restos reais pela subtração constitue uma imbecilidade.

Os problemas de diferença como; "Quanto....é mais alto, maior, mais pesado, mais velho" Quanto custaria mais?" Quanto devo economizar?" Qual o meu lucro ou prejuizo?" e semelhantes, são muito mais numerosos e importantes na vida da criança e do adulto do que os problemas de resto.

Destas considerações isoladas, poder-se-ia concluir que, a ter de adotar uma só forma verbal, seria preferivel a forma "e...ou para, que se adapta muito melhor à ideia preferivel a forma "e...ou para, que se adapta muito melhor à ideia de obter uma diferença do que as formas menos ou de que se coadunam muito melhor à ideia de obter um resto. Entretanto, estas mesmas considerações podem ser aduzidas em defesa do uso de ambas. As duas ideias - achar a diferença em geral e achar a diferença, quando esta representa o que ficou de se haver tirado alguma coisa - são tão distintas que, pode-se, dizer, deveriam corresponder a diferentes formas verbais. Não será bem empregado o tempo exigido para conhecer 15 menos 7 = 8 como equivalente em resultado a 7 e ....= 15, visto que o seu sentido" tirando 7, fica? se adaptará muito melhor aos problemas de resto e, com toda a certeza, será a forma por êles sugerida? Èste argumento põe em foco a questão geral de aprender a fazer uma só coisa por vários modos. Muitos professores atacariam vigorisamente o ensino de uma dupla forma de pensar no fato. 10,5,5. Exigiriam, logo razões profundas que justificassem tal modo de proceder. Deveriam todos aceitar, diriam, o principio de que não se devem formar dois ou mais hábitos, quando um só basta. Mas nós poderíamos replicar que não se trata, aqui, de uma coisa, que, 10, 5, qual é o resto? e 10, 5 qual é a diferença? não podem ser tão bem manejados por um como por dois hábitos. Decida-se o que se decidir sôbre este argumento, o certo é que o bom ensino da subtração requer adaptação a ambas as especies de problemas, aos de resto e aos de diferença, especialmente aos últimos.

Qual, pois, a forma a escolher, se uma fora adotada, e qual a predominante, se forem ambas adotadas? Quanto a nós perguntamos. "Qual é a mais facil para uso de crianças?" Aqui topamos com um erro muito generalizado. Um adulto, quasi invariavelmente, pensa que a forma pela qual aprendeu a pensar em determinado fato, é mais facil e mais natural. Si aprendeu a pensar nos fatos da subtração sob a forma "menos ou de" insistirá em que os outros quando, tenham de subtrair por ex. 5 de 10, pensem" 10 mais 5 quando somam. "O contraste facilita" dirá e talvez acrescente ingênuamente. Seria simplesmente absurdo pensar nisto sob forma 5", mais quanto para fazer 10? Se aprendeu na forma "e.....ou para", insistirá em pensar na subtração sob a forma "10 menos 5 ou 10, tirando 5", quando já se sabe que 5 mais 5 fazem 10, é acrescentar carga antinatural ao aprendizado. E poderá ajuntar, tão ingênuamente, quanto o seu antagonista;

"É tolice perder tempo e esfôrço, a procurar uma resposta quando já se conhece. Ora, não há dúvida de que o modo por que temos praticado milhares de vezes, é sempre o mais fácil e o mais natural.... para nós.

Na realidade segundo testemunho de maioria dos professores, a forma "e...ou para" é quasi oude todo tão fácil e natural para as crianças que aprendem por ela, quanto a forma MENOS ou DE para aquelas que por esta aprenderam.

Concluindo, parece haver saldo a favor da adoção da forma "e... ou para" como forma normal, digo verbal predominante e "regular", contanto que se acompanhe de prática abundante de problemas reais de resto, com verificação objetiva, e de exercícios como 10-5 =...9 - 3 =......16-7 =.... em que se dê ao sinal a expressão verbal MENOS ou DE.

Estamos, agora, de volta ao ponto de partida, a escolha entre os dois processos: diminuir o minuendo ou aumentar o subtraendo. Como se expôs, tal escolha é inteiramente independente do fato de pensar o aluno, dentro de sua experiência dos fatos de subtração, sob forma verbal... e ... ou para", de ou menos. Subtrair o minuendo tem a vantagem de oferecer maiores probabilidades à compreensão da natureza de nosso sistema de notação decimal e do valor relativo dos números. Aumentar no subtraendo traz a vantagem de facilitar um tanto a operação.

Para uma criança um tanto inteligente, aprender a "pedir emprestado "uma dezena e trocá-la em unidades etc., pedir emprestado uma centena e trocá-la em dezenas, etc....... equivale em receber uma lição valiosa sôbre o valor relativo dos números. Aprender a pedir "as dez unidades emprestadas ao minuendo" e "restitui-las" somando uma dezena ao subtraendo, constituirá uma lição que, embora possivel, terá todas as probabilidades de não ser percebida. Não é, o caso de serem, as diminuições no minuendo como se proclama algumas vezes uma consequencia lógica de nosso sistema de numeração, e os acrescimos no subtraendo mero processo mecânico, que, por acaso, dá, invariavelmente, resultado exato. Não é que seja mais ou menos lógico do que o outro. O caso é que a lógica de guardar-se do êrro subtraindo de um número tanto quanto se lhe adicionou, é mais aparente do que a lógica de somar ao subtraendo o mesmo que se somou ao minuendo. X

Provavelmente, para maior números de crianças é mais compreensivel a primeira. A maior ou menor facilidade oferecida pelo emprêgo de um ou outro dos dois processos é oriunda do fato de, em casos de zeros sucessivos no minuendo, exigir o primeiro a troca laboriosa de uma centena em 9 dezenas e 10 unidades ou de um milhar em 9 centenas, 9 dezenas e 10 unidades, e a conservação em mente de todas as trocas feitas, antes de começar a escrever, na resposta, um só algarismo correspondente, e exigir mesmo 30 300 3000 o aprendizado de processos diferentes para 16, 15, 2116 e o - - segundo, o hábito único de somar um ao subtraendo, após cada adição de 10 ao minuendo. Como são muito comuns as subtrações com minuendo representados por números inteiros de dólares e por $10.00 $20.00, etc, o caso lembrado acima parece merecer consideração. De outro lado temos de contar com os casos em que a adição de 1 se faz a 9, dando 10, o que exige do aluno o acrescimo de um zero não escrito ao 1, causando certa confusão. Porém, convem notar que os casos de 9 na casa mais alta do subtraendo são muito mais raros do que os zeros sucessivos no minuendo.

Seria precipitado, proclamar que o processo de aumentar os algarismos do subtraendo seja essencialmente 5 por cento melhor ou 5 por cento pior do que o de diminuí-los no minuendo. Os modernos autores de compêndio dão preferencia ao primeiro, porque parece levar uma leve vantagem essencial sôbre o segundo, e também, porque os professores que ensinam por êste método não somente dão atenção maior e mais acurada à operação do que às longas explicações sôbre as razões de pedir emprestado, como se mostram menos dispostos a permitir o uso de muletas escritas. A esta altura, alguns de nossos leitores estarão admirados de que nenhuma referência tenhamos feito até aqui à questão de "trocos". Teremos omitido o mais forte argumentodos partidários do método aditivo - que é o método que tem de ser usado no mais comum de todos os usos da subtração? É verdade indiscutivel que o trôco deveria ser feito, nas casas de negócio, pela soma de centavos, níqueis dimes, etc. ao preço da compra, até ser atingida a quantia dada em pagamento.

É também verdade que o aluno que aprendeu na forma "e...ou para", estará parece um tanto mais à vontade para achar o método correto de fazer troco. É ainda verdade que fazer troco facilita mais, de certo modo, o aprendizado da subtração e é de certo modo mais facilitado por ela, se aprendemos a diminuir pensando sob essa forma "e...ou para". Isto porem, se restringe aos casos dos minuendos, 5, 10 e 15, porque, em geral fazer troco com moedas não é subtrair números, e o fato de fazendo troco com moedas, digamos tendo de retirar 17 cents de $1.00, acharmos conveniente somar $3¢, 5¢, 25¢ e50 ,certamente, não implica em que devamos achar a diferença entre 17 cents e $1.00, pensando: "17 e 3, 20; e 5,25; e 25,50; e 50, $1.00.

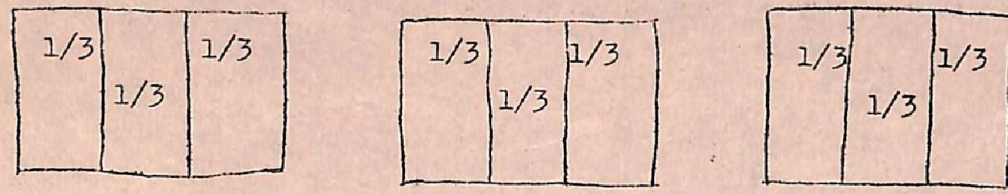
Seria muito maior loucura do que fazer trôco, pensando: tirando 17 centavos de $1.00, ficam 83 cents" ou 1.00 menos 17 cents = 83 cents" e tomando, então, 50 cents mais 25 cents mais 5 cents. + 3 cents, para perfazer os 83 centavos. Se tivessemos apenas de dizer ao freguês o valor do trôco, ao invés de dar-lhe, e se êle nos entregasse não apenas moedas ou notas, mas cheques de $2.89, $4.15, etc. parece que seria bem inutil contar em ordem ascendente, aos centavos, em moedas de 1,5, 10 etc, centavos, até perfazer o total. O que faríamos seria subtrair pelo método regular, a não ser em casos de diferenças pequenas.

Uma coisa é fazer trôco com moedas. Neste caso, temos de dar moedas dos valores de 1,5,10,25,50,100 etc., cuja soma perfaz a diferença; não precisamos saber a quanto monta essa diferença. Coisa mui diversa é fazer uma subtração. Nesta devemos conhecer a diferença expressa em números, isto é, uma sequencia de algarismos que representam unidades, dezenas, centenas, etc. Para fazer trôco, necessitamos conhecer apenas algumas combinações e na forma regular de soma a + b = ...

Para subtrair, necessitamos conhecer todas as combinações e conhecê-las na forma a + ...= c ou c- a =-------- ....

Fazer trôco não é subtrair; é ir somando até alcançar certos pontos bem definidos. Fazer exercícios de trôco para atingir os pontos 5, 10,15, facilita um tanto o aprendizado de soma e da subtração e, mais a esta, se ensinada, na forma "e...ou para". Porém, avançar no início do aprendizado até os pontos 25, 50 e 100, para ser muito prejudicial ao aprendizado da subtração, confundindo o aluno a interferindo no domínio do processo geral.

É fraco êste último argumento, como defesa do aprendizado das combinações da subtração pela derivação das combinações de soma e na forma "e....ou para", e nada tem absolutamente a ver com o mérito de um ou outro processo aumentar no subtraendo ou diminuir no minuendo.

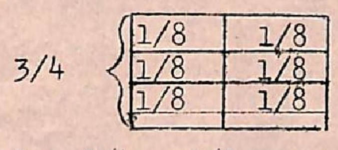


= 4 e 1/2

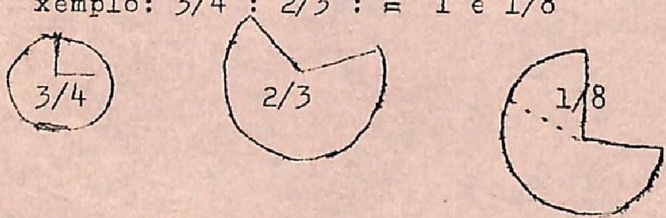
Na divisão de frações, temos de levar a criança a verificar quantas vêzes o "divisor" cabe dentro do "dividendo" , Assim, para dividir 3 inteiros por 1/4, temos de verificar quantas vêzes 1/4 cabe dentro de 3 inteiros (12 vêzes) o que seria o mesmo que multiplicar 3 inteiros por 4 e, do mesmo modo, dividir 3/4 por 3/8 é verificar quantas vêzes 3/8 cabem em 3/4 (2 vêzes), o que é o mesmo que multiplicar por 8/3. Daí à indução da regra será muito fácil.

Como demonstrar gràficamente à divisão de uma fração por outra.

Por exemplo: 3/4 : 3/8 = 2, isto é, 3/8 cabem em 3/4 2 vêzes.



Por xemplo: 3/4 : 2/3 : = 1 e 1/8



= 1 e 1/8

Colocando os 2/3 do círculo sôbre os 3/4, veremos que 2/3 cabem em 3/4, 1 vez e 1/8.

Fontes consultadas:

Metodologia de la arithmética y la geometria de Margarida Comas

Revistas do Ensino - artigos do prof.L.Tochtrop

Notas de aula - Prof. Odila Barros Xavier