....

2 milhares   3 centenas   2 dezenas   1 unidades

Note que "centena" é justamente outro nome para um conjunto que contém 10 conjuntos de 10 e que "milhar" é o nome para um conjunto que contém 10 conjuntos de 100, isto é, 10 conjuntos de 10 conjuntos de 10. Quando consideramos o numeral 2321_{10} na base quatro, pensamos no valor posicional como segue

2 4x4x4   3 4 quatros   2 quatros   1 unidades

Naturalmente, um conjunto de quatro "quatros" é um conjunto de 16, e um conjunto consistindo de quatro conjuntos ~~de~~ quatro "quatro" é um conjunto de 64. Assim poderiamos ler o símbolo numérico 2321_4 como "dois sessenta e quatro, três dezesseis, dois quatros, e um". Observe que:

$2.321_{10} = (2 \times 10^3) + (3 \times 10^2) + (2 \times 10) + 1,$

$2\,321_4 = (2 \times 4^3) + (3 \times 4^2) + (2 \times 4) + 1,$

$2\,321_6 = (2 \times 6^3) + (3 \times 6^2) + (2 \times 6) + 1.$

Isto é, cada um dos símbolos numéricos acima representa

 2 x (o cubo da base)

\+ 3 x (o quadrado da base)

\+ 2 x (a base)

\+ 1.

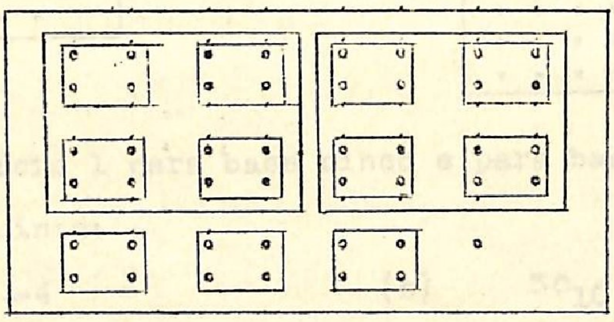
Quando contamos objetos na base 10 primeiramente agrupamos por dezenas. Logo que tivermos dez dezenas, nós as agrupamos num conjunto com mais elementos. Logo que tivermos dez centenas, agrupamos estas em um conjunto com mais elementos ainda, e assim por diante. Usamos o mesmo princípio, quando contamos na base quatro. Um exemplo tornaria isto claro. Consideremos o conjunto de pontos formados por quatros na caixa abaixo. Obser-

....

ve que temos

2 conjuntos de quatro quatro, 3 conjuntos de quatro e mais 1.

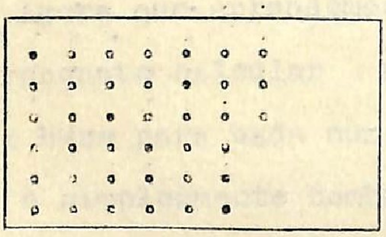
Simplesmente escrevemos 231_4

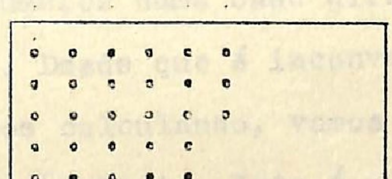


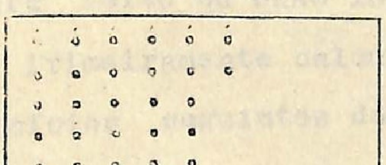
Observe também que na base quatro os símbolos 0,1,2 e 3 são suficientes para representar qualquer número inteiro, desde que, alguma vez tenhamos mais do que três, nós podemos reagrupar. Por exemplo, se tivermos nove conjuntos de quatro quatros e um conjunto de quatro.

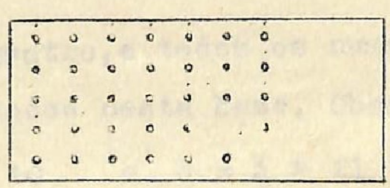
Exercícios

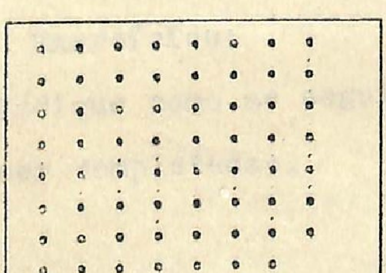
1. Agrupar os seguintes conjuntos de pontos por quatro e escrever um numeral na base quatro que represente o número de pontos em cada caixa.

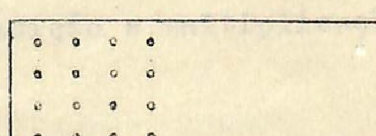
(a) 

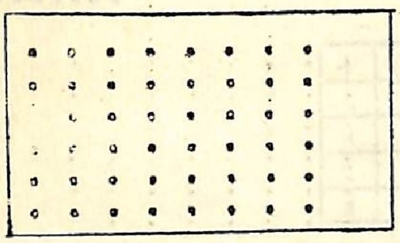
(b) 

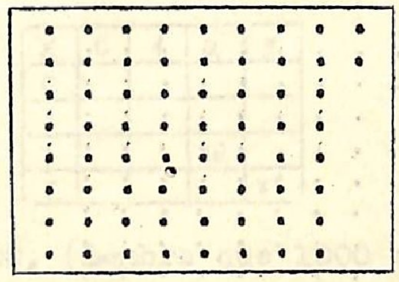
(c) 

(d) 

(e) 

(f) 

(g) 

(h) 

2. Repita o exercício 1 para base cinco e para base seis.

3. Complete o seguinte:

(a)	$12_{10} = \underline{\quad}_4$	(b)	$30_{10} = \underline{\quad}_4$
(c)	$4_{10} = \underline{\quad}_4$	(d)	$50_{10} = \underline{\quad}_4$
(e)	$48_{10} = \underline{\quad}_4$	(f)	$100_{10} = \underline{\quad}_4$
(g)	$87_{10} = \underline{\quad}_4$	(h)	$123_{10} = \underline{\quad}_4$
(i)	$222_4 = \underline{\quad}_{10}$	(j)	$100_4 = \underline{\quad}_{10}$
(k)	$10_4 = \underline{\quad}_{10}$	(l)	$1_4 = \underline{\quad}_{10}$
(m)	$300_4 = \underline{\quad}_{10}$	(n)	$1\,010_4 = \underline{\quad}_{10}$
(o)	$2\,302_4 = \underline{\quad}_{10}$	(p)	$3\,003_4 = \underline{\quad}_{10}$

Agora que aprendemos a representar números numa base diferente, será interessante calcular nesta nova base. Desde que é inconveniente indicar a base para cada numeral quando estamos calculando, vamos omitir o índice e simplesmente combinar a base antecipadamente. Isto é o que temos sempre feito na base 10.

Primeiramente calcularemos na base quatro, e todos os numerais nos exercícios seguintes devem ser interpretados nesta base. Observe que na base quatro, temos $3 + 3 = 12$ e $2 \times 2 = 10$ e $3 \times 3 = 21$

Exercícios:

1. Indique como as seguintes tábuas de adição e multiplicação deveriam ser completadas.

......

+	0	1	2	3
0				
1				
2				
3				12

X	0	1	2	3
0				
1				
2			10	
3				21

2. Escreva todos os números de 0 a 1000. (Lembre que 1000 significa / 64_{10}).

3. Encontre as seguintes somas. Ilustre (a) e (b) marcando conjuntos de pontos e agrupando-os.

(a) $\begin{array}{r}21\\ \underline{31}\end{array}$ (b) $\begin{array}{r}32\\ \underline{11}\end{array}$ (c) $\begin{array}{r}12\\ \underline{12}\end{array}$ (d) $\begin{array}{r}123\\ \underline{101}\end{array}$

(e) $\begin{array}{r}113\\ \underline{211}\end{array}$ (f) $\begin{array}{r}123\\ \underline{321}\end{array}$ (g) $\begin{array}{r}322\\ \underline{233}\end{array}$ (h) $\begin{array}{r}323\\ \underline{303}\end{array}$

(i) $\begin{array}{r}320\\ \underline{232}\end{array}$ (j) $\begin{array}{r}201\\ 121\\ \underline{322}\end{array}$ (k) $\begin{array}{r}2.032\\ 3.021\\ 1.311\\ \underline{2\ 202}\end{array}$ (l) $\begin{array}{r}2\ 320\\ 3\ 202\\ 2\ 032\\ 1.332\\ \underline{3.201}\end{array}$

4. Encontre os seguintes produtos. Ilustre (a), (c), (d) e (e) formando conjuntos de pontos e agrupando-os.

(a) $\begin{array}{r}21\\ \underline{2}\end{array}$ (b) $\begin{array}{r}32\\ \underline{0}\end{array}$ (c) $\begin{array}{r}23\\ \underline{3}\end{array}$ (d) $\begin{array}{r}10\\ \underline{10}\end{array}$

(e) $\begin{array}{r}21\\ \underline{10}\end{array}$ (f) $\begin{array}{r}212\\ \underline{2}\end{array}$ (g) $\begin{array}{r}100\\ \underline{10}\end{array}$ (h) $\begin{array}{r}20\\ \underline{20}\end{array}$

(i) $\begin{array}{r}231\\ \underline{10}\end{array}$ (j) $\begin{array}{r}100\\ \underline{100}\end{array}$ (k) $\begin{array}{r}323\\ \underline{3}\end{array}$ (l) $\begin{array}{r}213\\ \underline{21}\end{array}$

(m) $\begin{array}{r}23\\ \underline{32}\end{array}$ (n) $\begin{array}{r}312\\ \underline{231}\end{array}$

5. Trabalhe os seguintes problemas de subtração. Ilustre (b), (e) e (h) agrupando pontos. representados.

(a)	$\begin{array}{r}31\\ \underline{2}\end{array}$	(b)	$\begin{array}{r}22\\ \underline{3}\end{array}$	(c)	$\begin{array}{r}20\\ \underline{1}\end{array}$	(d)	$\begin{array}{r}10\\ \underline{1}\end{array}$
(e)	$\begin{array}{r}100\\ \underline{1}\end{array}$	(f)	$\begin{array}{r}32\\ \underline{3}\end{array}$	(g)	$\begin{array}{r}32\\ \underline{23}\end{array}$	(h)	$\begin{array}{r}101\\ \underline{33}\end{array}$
(i)	$\begin{array}{r}203\\ \underline{21}\end{array}$	(j)	$\begin{array}{r}132\\ \underline{123}\end{array}$	(k)	$\begin{array}{r}1\ 000\\ \underline{232}\end{array}$	(l)	$\begin{array}{r}23\ 012\\ \underline{12\ 123}\end{array}$

6. Trabalhe as partes (d), (g) e (j) do Exercício 4 na base cinco, base sete, base dois, base 12, base 73.

7. Encontre os seguintes quocientes. As partes (a), (e), (g) e (i), ilustre com conjuntos de pontos.

(a)	$2\overline{)10}$	(b)	$1\overline{)21}$	(c)	$21\overline{)0}$	(d)	$2\overline{)32}$
(e)	$3\overline{)21}$	(f)	$2\overline{)212}$	(g)	$10\overline{)100}$	(h)	$10\overline{)1\ 000}$
(i)	$10\overline{)230}$	(j)	$3\overline{)2\ 022}$	(k)	$100\overline{)2\ 000}$	(l)	$102\overline{)3\ 120}$

8. Quais são algumas das vantagens e desvantagens de usar base 4?

3. BASE DOIS

Algumas máquinas computadoras eletrônicas modernas usam um sistema numérico de base dois. Naturalmente, sòmente dois símbolos são necessários neste sistema. Desde que um interruptor elétrico tem sòmente duas posições possíveis, "on" (aberto) ou "off" (fechado), u'a máquina pode representar números por uma série de ligações e interrupções de corrente. Suponha que u'a máquina seja construída de tal forma que as lâmpadas indiquem a posição do interruptor. Uma lâmpada acesa pode representar o numeral 1 e uma lâmpada apagada pode representar o numeral 0. Indicaremos uma lâmpada acesa por ☼ e uma lâmpada apagada por ○ . Suponha que numa bateria de cinco lâmpadas tenhamos o seguinte:

☼ ○ ○ ☼ ○

....

Isto indicaria o numeral 10010. Agora precisamos pensar sôbre o va-
lor posicional na base dois.

1 ($2\times2\times2\times2$) 0 ($2\times2\times2$) 0 (2×2) 1 (2) 0 (unidades)

Assim nosso arranjo de 5 lâmpadas acesas e apagadas representaria o número 18 na base dez.

Vamos fazer alguns cálculos na base dois. Todos os numerais nos exer-cícios seguintes devem ser interpretados nesta base.

Exercícios

1. Indique como as seguintes tábuas de adição e multiplicação seriam com-pletadas.

+	0	1
0		
1		

X	0	1
1		
1		

2. Escreva todos os numerais de 0 a 1000.

3. Procure as seguintes somas. Ilustre (b), (c) e (e), formando conjuntos de pontos.

(a) $\begin{array}{r} 11 \\ \underline{1} \end{array}$ (b) $\begin{array}{r} 10 \\ \underline{10} \end{array}$ (c) $\begin{array}{r} 11 \\ \underline{11} \end{array}$ (d) $\begin{array}{r} 101 \\ \underline{11} \end{array}$

(e) $\begin{array}{r} 101 \\ 110 \\ \underline{111} \end{array}$ (f) $\begin{array}{r} 100 \\ 111 \\ 110 \\ \underline{101} \end{array}$ (g) $\begin{array}{r} 111 \\ 11 \\ \underline{1} \end{array}$ (h) $\begin{array}{r} 1111 \\ \underline{1} \end{array}$

4. Determine os seguintes produtos. Ilustre (c), (d) e (g) agrupando ob-jetos.

(a) $\begin{array}{r} 11 \\ \underline{1} \end{array}$ (b) $\begin{array}{r} 10 \\ \underline{0} \end{array}$ (c) $\begin{array}{r} 10 \\ \underline{10} \end{array}$ (d) $\begin{array}{r} 100 \\ \underline{10} \end{array}$

(e) $\begin{array}{r} 100 \\ \underline{100} \end{array}$ (f) $\begin{array}{r} 11 \\ \underline{11} \end{array}$ (g) $\begin{array}{r} 101 \\ \underline{11} \end{array}$ (h) $\begin{array}{r} 111 \\ \underline{111} \end{array}$

. . .

....

(i) 100
110

(j) 111
11

(k) 11
111

(l) 101
110

5. Determine as seguintes diferenças.

(a) 11
1

(b) 10
1

(c) 111
10

(d) 100
11

(e) 1101
1011

(f) 110110
11011

(g) 1000
1

(h) 10000
11

6. Determine os seguintes quocientes. Ilustre (b) e (d) através de conjuntos.

(a) 1)101 (b) 10)110 (c) 11)110 (d) 11)1 111

(e) 10)10.110 (f) 101)110 111

7. Que número é indicado em cada uma das seguintes baterias de lâmpadas? (Dê sua resposta na base 10).

(a)

(b)

(c)

(d)

(e)

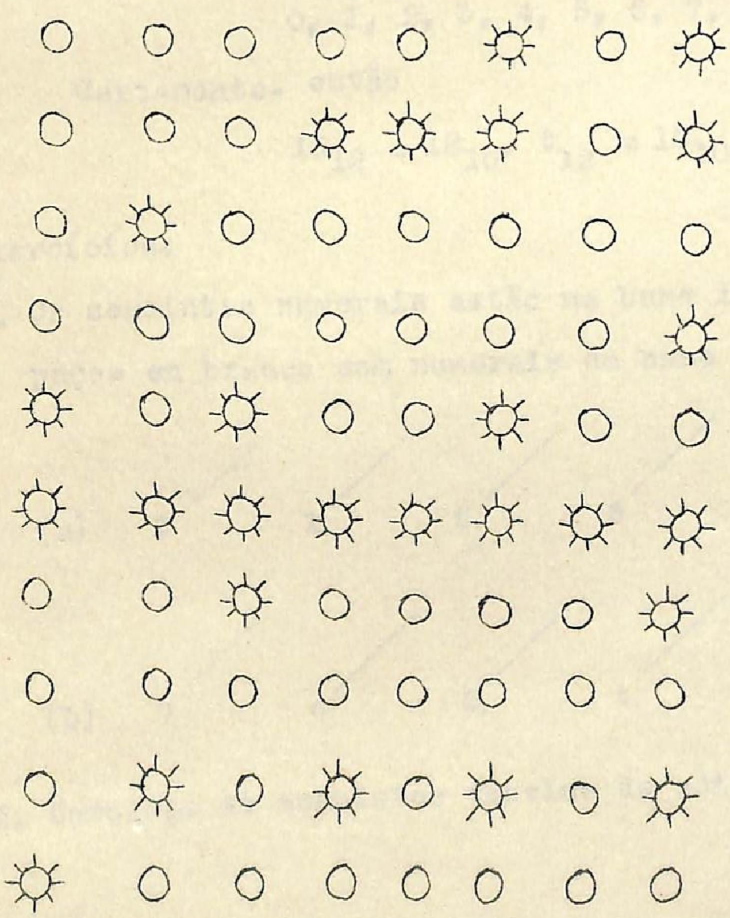
(f)

(g)

(h)

(i)

(j)



......

8. Na base dois um "1" seguido por 10 zeros representaria tanto quanto um milhão? Como pode você escrever um número maior do que um milhão na base dois? Quais são as vantagens e desvantagens da base dois?

4. BASE DOZE

Nossa civilização ainda mostra traços de um uso primitivo da base 12. Isto é, pode encontrar-se vários exemplos de formar conjuntos com "dose". Por exemplo, compramos ovos por dúzia; Há doze polegadas num pé; temos um ano de 12 meses. Quais são outros exemplos como êste

Um interessante problema surge quando trabalhamos na base 12. Devemos inventar dois novos símbolos, um para 10 e um para 11. Suponha que concordemos em usar os seguintes símbolos:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, t, e.

Certamente, então

$$10_{12} = 12_{10}, \quad t_{12} = 10_{10}, \quad e_{12} = 11_{10}$$

Exercícios:

1. Os seguintes numerais estão na base 12. Como seriam preenchidos os espaços em branco com numerais da base 10?

(a) 2 1 8 6

(b) 7 e 2 t 6

2. Complete as seguintes tabelas de adição e multiplicação.