INSTITUTO DE EDUCAÇÃO "GENERAL FLORES DA CUNHA"

LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA

GRUPO DE ESTUDOS DE MATEMÁTICA

Assunto: ESTRUTURA ALGÉBRICA DE GRUPO

Solução de exercícios:

1. Não é possível existir dois elementos neutros no mesmo grupo.

Demonstração:

Sejam a_0 e a'_0 dois elementos neutros de $G \ast$.

Consdiderando, em 1º lugar, a_0 como elemento neutro podemos escrever:

$$a'_0 \ast a_0 = a''_0 \quad (1)$$

Mas, como a'_0 é, também, neutro

$$a'o \ast a_0 = a'_0 \quad (2)$$

Das igualdades (1) e (2) resulta que

$$a_0 = a'_0$$

Donde fica provada a unicidade do elemento em qualquer grupo.

2. Suponhamos que o elemento a de G, tenha dois elementos a' e a" como seus inversos e que seja o elemento neutro de G,.

Portanto:

$$a.a' = e = a''.a \quad (3)$$

Tomemos $a.a' = e$, e façamos operar em ambos os têrmos da igualdade a"

$a''.(a.a') = a''.e$ (como "e" é neutro)

$a''.(a.a') = a''$ (Pela associatividade)

$(a''.a).a' = a''$ (Pela 2ª equação de (3))

$e.a' = a''$ (Sendo "e" neutro)

$a' = a''$

Donde, os dois elementos inversos são iguais, isto é, só existe um inverso para cada elemento de um grupo.

2. a) V. Suponhamos G,. $a \in G$ e, $-a$ o inverso de a.

Qual é o inverso de $-a$?

Nós sabemos que êle é único e conhecemos as igualdades

$a.-a = e$

$-a.a = e$

pois êle é único tanto à esquerda como à direita, donde o inverso de $-a$ é a, istoé: $-(-a) = a$

b) V Suponhamos $G, +$, $a \in G$, $a \neq e$, $a + a = a$

O elemento neutro é único e só êle operando à direita ou à esquerda de qualquer outro elemento do grupo dá como resultado êsse outro elemento.

$a + a = a$ implica $a = e$, donde a hipótese é absurda e só o elemento neutro é idempotente num grupo.

c) V Seja $G, +$ um grupo e $a_0 \in G$ $a_1 \in G$, a_0 elemento neutro de G.

Se $a_0 + a_0 = a_0$ $a_0 + a_1 = a_1$ (4)

Se $a_1 + a_1 = a_1$ então, $a_1 = a_0$ conforme (4) e não estaríamos em face de um grupo de ordem 2, donde

$$a_1 + a_1 = a_0$$

e, portanto, todos os grupos de ordem 2 só admitem a tábua

$+$	a_0	a_1
a_0	a_0	a_1
a_1	a_1	a_0

(5)

No nosso segundo encontro tivemos oportunidade de constatar que o conjunto constituido pela classe dos números pares e a classe dos números ímpares em N, munida da operação $*$, associada à multiplicação em N não constituia um grupo porque sua tábua não coincidia com (5)

$*$	par	ímpar
par	p	p
ímpar	p	i

o que ilustra o que mostramos acima.

4. Sejam a_0, a_1, a_2 os elementos de um grupo; seja a_0 seu elemento neutro.

Temos:

$a_0 + a_0 = a_0$;

$a_0 + a_1 = a_1$; (6)

$a_0 + a_2 = a_2$ (7)

Não se poderia ter

$a_1 + a_1 = a_1$ (8)

porque nos acarretaria

$$a_1 = a_o \quad (\text{comparar com } (6)\ ),$$

logo

$$a_1 + a_1 = a_2 \qquad (8)$$

De maneira análoga vê-se que

$$a_1 + a_2 \neq a_2 \qquad (\text{comparando com } (7)\ )$$

e

$$a_1 + a_2 \neq a_1 \qquad (\text{comparando com } (8)\ )$$

Disso resulta que

$$a_1 + a_2 = a_o$$

O mesmo se provaria de

$$a_2 + a_1 \neq a_2 \qquad (\text{comparando com } (9)\ )$$

$$a_2 + a_1 \neq a_1 \qquad (\text{comparando com } (8)\ )$$

Finalmente

$$a_2 + a_2 \neq a_2 \qquad (\text{comparando com}$$

pois esta relação acarretaria a

$$a_2 = a_o$$

e

$$a_2 + a_2 \neq a_o \qquad (\text{porque } a_1 - a_2 = a_o\ )$$

Donde

$$a_2 + a_2 = a_1$$

Por conseguinte, há sòmente uma tábua para os grupos de ordem 3

	a_o	a_1	a_2
a_o	a_o	a_1	a_2
a_1	a_1	a_2	a_o
a_2	a_2	a_o	a_1

....

Pôrto Alegre, 17 de abril de 1970