INSTITUTO DE EDUCAÇÃO GENERAL FLORES DA CUNHA

LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA

Gattegno, C; Servais, W.; Nicolet, J. L. e outros

LE MATÉRIEL POUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

Capítulo Primeiro Trad. A.B.Krebs

Caleb Gattegno

A percepção e a ação como bases do pensamento matemático

1. Em todo estudo sôbre a percepção, chega-se, ràpidamente, a questões técnicas especiais e difícies que, sem dúvida, esclarecem os f fundamentos mas, arriscam de nos afastar das aplicações. Entretanto, é preciso reconhecer que desde que abordarmos, sèriamente, o problema do pensamento, sentimos necessidade de saber mais sôbre a percepção.

Diante as duas tendências opostas, escolhemos apresentar uma síntese provisória mas de acôrdo com os fatos, para que nossos leitores práticos encontrem a ajuda que êles esperam dos psicólogos.

2. A primeira observação importante a fazer é sôbre a diferença de conceito entre uma percepção estática que o filósofo crê encontrar no fundo do pensamento e a atividade perceptiva na qual se enfileiram, cada vez mais, os psicólogos.

A visão é a mais estudada das percepções. Numerosos volumes foram escritos sôbre êsse assunto e não pretendemos aprèsentar, aqui, as conclusões variadas às quais se chega segundo a técnica ou a problemática. Dizemos, igualmente, que partindo do ôlho, câmara fotográfica tendo funções óticas, lentamente, admitimos ~~que~~ primeiro que existe uma interação entre o sistema nervoso e o ato de ver e, a seguir, que a formação das imagens é um fenômeno complexo que apela ao conjunto dos musculos oculares, à afetividade, às lições aprendidas nas experiências de vida, aos outros exercícios mentais e às outras atividades sensoriais. O estudo da aprendisagem da visão ocular nos operados de catarata chamou a atenção dos psicólogos e fisiopsicológos sôbre aspectos que êles pareciam querer ignorar. A evolução da visão (ou de qualquer outra função sensorial) está estreitamente associada à evolução mental do indivíduo e conduz diferentes pessoas a estados variados no conjunto das possibilidades visuais. Nós não queremos para prova mais que os exemplos da visão perspectiva descoberta tão tarde na história humana, e da visão no espaço que muito poucos adultos conseguem adquirir mesmo em nossos dias.

Refletindo sôbre o que a experiência sensorial nos traz (livre), somos, necessàriamente, conduzidos a nos perguntar se jamis houve uma experiência pura sôbre o plano sensorial. (cf. "Uma nova teoria da imagem", Apendice III em nossa Psicologia da afetividade, etc., Delachaux et Niestlé, Neuchâtel et Paris 1952). A resposta é evidente: não há mais, logo após o nascimento. Entretanto, existem experiências que permanecem ainda muito próximas da percepção pura se bem que a grande maioria evolue para um complexo onde é muito difícil reconhecer os componentes sensoriais. As ilusões de ótica, tácteis, térmicas, etc., apresentam cons tantes que não são alteradas nem pelo conhecimento intelectual de que elas são ilusões, nem pela idade, isto é, pela experiência geral.

No total, na vida corrente, inseparáveis de cada tomada de consciência, uma série de experiências transformam, em cada indivíduo e segundo suas capacidades atuais, a mensagem que deveria ser percebida. Lá, evidentemente, nos ocupamos de uma atividade perceptiva complexa da qual podemos encontrar exemplos em todos os níveis de desenvolvimento e em todos os momentos da vida e o que faz que uma imagem mental seja muito afastada do que chamamos imagem ótica nos instrumentos. É esta interferência na imagem de toda atividade mental que dá lugar a uma transformação de elemento percebido em uma imagem multidimensional.

Desde que o órgão dos sentidos está estruturado para uma certa visão, êle não a perde mais. Quando ela foi percebida, a perspectiva se torna um atributo da visão. Uma vez ~~eempsêse~~ incluida a visão no espaço das figuras planas está sempre à disposição. Uma vez compreendida a estrutura dos anaglifos pode ser reconhecida e a percepção do relevo requer apenas alguns instantes de readaptação para ser posta em ação.

Nós chamamos "estrutura funcional" dos ógãos dos sentidos, sua capacidade de perceber o que só é acessível após experiência, mas que acompanha de hoje em diante seu uso. A estrutura anatomica pode não evoluir, a estrutura funcional é essencialmente dependente do tempo e pode se transformar pela aplicação e exercício.

Do fato de que a experiência fez adquirir a cada imagem qualidades novas que se manifestam por uma capacidade de perceber o que não era percebido, nos propomos a considerar cada imagem como uma quantidade de energia que se estruturou nos órgãos dos sentidos e os músculos e por sua vez agiu sôbre os órgãos para lhes dar esta estrutura funcional em relação com sua própria estrutura. Energia estruturada mas retida no conjunto do espírito por laços funcionais numerosos, a imagem possue um dinamismo que a torna móvel na vida mental e evocável a um simples apêlo. Ela adquiriu uma adequação total do fato que é a atividade ~~psíco~~ fisio - psicológica que a estruturou e, então, ela <u>é</u> substituta do "real".

É sôbre as imagens que nós agimos antes de agir sôbre o real, por uma ação interior, virtual mas adequada, pois que ela pode se traduzir em ação efetiva.

3. A tomada de consciência do dinamismo perceptivo nos mostra que a vida é, tanto o resultado das ações óticas quanto musculares e a síntese exige que a coisa ~~seja~~ vista seja varrida, envelopada e que o trabalho dos músculos óticos e dos do corpo se integre nesta unidade que é a percepção visual. Mas, inversamente, também, toda mobilização de energia nos músculos com objetivo de ação é avaliado por qualquer órgão dos sentidos. Os diversos movimentos de energia mental têm lugar "no interior do espírito", a ação e as percepções estão intimamente ligadas e conduzidas para a vida espontânea a um alto grau de perfeição. Não há mais ações sem percepção nem percepção sem ação qualquer que seja possível de reconhecer interiormente que a estruturação da energia comporta mais passagens num tal ou tal orgão dos sentidos, prolongamento especializado do eu.

tipo de atividade só atinge a completa maturidade após os treze anos; mas podemos observá-la muito antes sob formas mais rudimentares. E'uma atividade analítica, em oposição à atividade construtiva que a precedeu. E'preciso que a construção preceda à análise, senão não haverá nada a analisar. Do mesmo modo, é preciso que haja alguns materiais a partir dos quais se possa efetuar a primeira construção, senão, não haverá nada a construir. Êsses materiais são primeiro os elementos fundamentais a partir dos quais se constroem as classes, e, em seguida, as próprias classes a partir das q uais se forma m as classes de ordem superior.

Vimo s que êsse processo se produz muitas vezes, senão sempre, em seguida a uma atividade aparentemente desordenada, que nós designamos por("tripota ge" ou "bricolage") "misturada" ou "trapalhadas", ou melhor ainda, por "atividade lúdica". E'essencialmente, por êsse mesmo processo que a criança q ue brinca com cubos se familiariza com as sensações que acompanham seus gestos e se habitua aos efeitos combinados do campo de pêso e das forças de atrito entre as superfícies. As limitações inerentes aos materiais limitam automàticamente as combinações realizáveis. Por exemplo, é impossível por em equilíbrio um cubo sôbre uma de suas arestas sem apoiá-lo contra outra q ualquer coisa. A criança que brinca não toma consciência, explicitamente, das possibilidades e impossibilidades, mas quando ela tem atraz de si a experiência de um grande número de atividade lúdicas conduzidas ao acaso ela adquire um conhecimento implicito do que é possível. A classe das"estruturas possíveis que podem ser construidas com os cubos" toma forma progressivamente, incluindo subconjuntos tais como os "tour possíveis", "murs possibles", "tunnels possibles", etc.. E'extraordiná rio ver com que eficácia uma criança pode manejar essas classes pra gmàticamente, sem ter a menor consciência das relações entre as classes com as q uais ela trabalha. Será como construir um certo tipo de edifício sem a nalisar sua s ações. Ela sabe o que ela quer fazer e chega a fazê-lo. Esta é uma atividade essencialmente construtora e e as construções são essencialmente o resultado de um jôgo de manipulações com os materia is de que dispõe. Isto é verdade, também, quando os materiais consistem em objetos que p odem ser manipulados ou em classes de objetos que são já a bstrações. Uma criança de 2 ou 3 anos pode manejar o conceito matemático de "dois" em situações prá ticas. Mas êsse conceito está agora no segundo nível da formação das classes! O número "dois" não é uma propriedade dos objetos; ~~mas~~ é uma propriedade da coleções, de classes de objetos. Entre todas as coleções de objetos, os pares de objetos possuem a propriedade q ue têm dois objetos na coleção. Portanto, uma criança pequena é capaz de manipular uma tal construção em duas etapas (à deux étages) com a maior facilidade e sem nenhumá ensinamento formal. Ela construiu seu "dois", seu "três", etc. a partir de sua própria manipulação do mundo que a rodeia.

Aprender, consiste de certo modo em mergulhar a cabeça numa massa de fenômenos aparentemente incoerentes, a reagir sôbre êsses fenômenos a descobrir pela experiência como é preciso fazer para provocar a aparição de certos fenômenos desejados, a exprimir as propriedades dos diferentes dados do mundo exterior formulando certas regras. As regras traduzem as propriedades q ue nós devemos dar a nossas ações se quisermos constituir uma certa classe de fenômenos; por exemplo, se nós quisermos construir uma tôrre, é preciso não fazê-la muito inclinada, senão ela desmorona; nós não obteremos o fenômeno "construção de uma tôrre" se não respeitarmos as pro priedades necessárias dos cubos. As regras representam uma limitação do q ue é possível; mas quando compreendemos essas regras, nós adquirimos uma nova liberdade de ação, porque nos permite predizer com eficácia o que seremos ca pazes de fazer. Um engenheiro pode projetar a abertura de um túnel sob o Monte Branco ou sob a Mancha, porque êle sabe manipular as "estruturas reguladoras" q ue lhe permitem predizer o resultado de suas açõ es. Êle sabe jogar com as regras. E'um gênero de "jôgo" inteiramente diferente do jôgo de manipulações que nos conduziu anteriormente a descobrir ou a formular as regras. Nós dispomos agora um utensílio poderoso e aperfeiçoado cujo manejo nos obterá muitas satisfações.

Veja mos agora se qualquer coisa comparável se faz nas escolas. Onde encontraremos criança s ocupadas em classificar suas experiências, em separar as estruturas reguladoras e a utilizar em seguida, essas estruturas?

Por certo, há centros experimentais isolados, onde se ensaia aprender desta maneira "natural", mas são pouco numerosos e muito dispersos. Certas tentativas passadas, tais como as de Maria Montessori, não estão divulga dos porq ue repousavam ùnicamente sôbre instituições de um educador excepcional sem que seus fundamentos racionais jamais tenham sido objeto de estudos aprofundados. Como se pode perceber, todos os esforços visando transfo rmar radicalmente os métodos pedagógicos têm sido contrariados ao mesmo tempo por administradores e por docentes. Antes de poder convencer a s autoridades escolares da necessidade de uma troca, é preciso se realizar com sucesso um certo número de experiências-piloto. E' essencial elaborar (mettre au point) modêlos que convenham às escolas mais comuns e não sòme nte a uma escola excepcional.

Precisamos agora dar um passo a mais na análise do processo de aprendizagem. Suponhamos que por manipulações feitas ao acaso, tenhamos chegado à construção de uma ou várias classes. Naturalmente, a manipulação não se faz uniformemente, ao acaso durante tôda a duração do processo de aprendizagem. A parte do acaso torna-se cada vez mais fraca - isto é, a parte da escolha voluntária aumenta - a medida que vemos aparecer classificações eventualmente interessantes. Essas classificações são postas a prova consciente ou instintivamente, e elas se acham assim, confirmadas ou rejeitadas, até que uma estrutura utilisável acabe por emergir. Por exemplo, ~~os pares e~~ as crianças, a princípio, quase sempre confundem os números ímpares e os ~~números primos~~, do mesmo modo que confundem os quadrados e os números pares. O número 39 é invàriàvelmente considerado como primo, talvez porque êle não está nas tábuas habituais de multiplicaçã o, ou simplesmente, porque sendo ímpar, é considerado como tendo muitas chances de ser primo. Os quadrados têm quatro cantos, então como 9 poderá ser um quadrado, se êle é ímpar?

Eis o gênero de idéias que andam na cabeça de uma criança antes de que ela tenha separado as classes matemáticas e suas relações. Há uma passa gem difícil e não é qualificando tais idéias de "absurdas" que se ajuda rá a criança a ver claro. Pode-se lhes sugerir exemplos e contra-exe mplos para provê-las de dados suplementares no meio dos quais ela poderá che gar às suas próprias conclusões. Uma vez essas conclusões atingidas, a estrutura reguladora está pronta para "jogar com" em lugar de "jo gar na direção de". No caso dos números primos e dos quadrados pode-se utilizar com sucesso a relação seguinte: se dividimos por 4 um número primo que é a soma de dois quadrados, o resto é um; inversamente, se quando se divide um número primo por 4, se encontra 1 como resto, é porque êle é a soma de dois quadrados. Em outros têrmos, há uma relação de identidade entre os dois conjuntos: "números primos que são a soma de dois quadrados" e números primos que quando divididos por 4 deixam 1 como resto". As crianças experimentarão um sentimento de poder excitante quando tiverem separado todos os conjuntos postos em jôgo. Há (a) os números pares; (b) os números ímpares; (c) os números primos; (d) os números que são a soma de dois quadrados; (e) os números que quando divididos por 4, têm 1 como resto. Sôbre esta base nossa relação de identidade torna-se:

A intersecção de (c) e de (e) = a intersecção de (c) e de (d)

As negações das propriedades dos conjuntos conduzem aos conjuntes complementares. Se nós empregamos o símbolo N para a negação de uma prop riedade, podemos designar "todos os números que não são pares" por N(a). Nós temos duas identidades de conjuntos evidentes:

N(a) = (b) e N(b) = (a)

ou ainda:

A intersecção de (a) e de (c) = ao conjunto composto do número 2, que se escreverá (2).

Ou ainda, nós podemos considerar as inclusões dos conjuntos tais que :

(c) está incluso na reunião dos conjuntos (b) e (2).

Não questão, nêsta etapa, de "provar" as identidades de conjuntos ou de inclusões. A necessidade de tais "provas" se apresentará naturalmente quando se jogar com as regras. Mas isto anuncia já a passagem à etapa seguinte:

Parece que há ao menos três caminhos possíveis para passar da a do jôgo à pesquisa das regras. O mais simples é o de nos familiariza, cada vez mais com os dados de nosso jôgo, até que não tenhamos mais necessidade de pensar nelas; a estrutura, de certo modo, nos impregna, penetra em nós e se torna como um novo método de classificação dos fatos circundantes. Nós poderíamos chamar êste caminho de <u>prática</u>. E'assim que nós finalmente chegamos a reconhecer se uma situação real corresponde (ou não corresponde) às regras que aprendemos. Suponhamos que fizemos alguns exercícios que nos conduzem a por em evidência a estrutura dos números positivos e negativos. Quando nos encontramos em presença de situações comportando altos e baixos de temperatura, de velocidades crescentes ou decrescentes, de deslocamentos em duas direções opostas, tec., nós as reconhecemos como situações nas quais se pode utilizar números positivos ou negativos. Infelizmente, se os exercícios não produzem todo seu efeito nós "reconhecemos" as situações como correspondentes, mesmo quando elas não são. Se perguntamos a qualquer um que tenha estudado os números negativos, quantos livros ficarão sôbre a mesa se dos dois livros que lá estão retirarmos três, poderá muito bem nos responder com a maior seriedade que restará "menos um livro" sôbre a mesa. Pode ser que reflêta um pouco melhor se pedirmos para executar a operação e que nos mostre o "menos um livro" que restou sôbre a mesa! E mesmo então, pode acontecer que não compreenda que a situação dos livros sôbre a mesa verdadeiramente não tem nenhuma relação com os números indicados. E'espantoso ver quanta gente perde todo bom senso, uma vez que começam a estudar o que elas crêm ser a matemática. Em seu caso, a fôrça de aplicar a estrutura dos números orientados às situações que lhes correspondem e de rejeitá-las quando as situações não correspondem, elas terminam por dispor uma estrutura operatória mas, sem nenhuma compreensão profunda de seus detalhes ou das relações internas que a caracterizam.

Um outro caminho que nós poderíamos tomar consiste em examinar como as regras funcionam, como elas são ligadas umas às outras; trata-se de voltar atraz sôbre o que se fez, numa atitude crítica e analítica. Nós poderíamos chamar êsse processo de <u>análise retroativa</u>. Para retomar nosso exemplo, nós constatamos logo que na estrutura conhecida sob o nome de "algebra dos números orientados", a cada número corresponde um número "oposto" (por exemplo 3 é o oposto de -3, -6 é o oposto de 6, etc.); mas o que nós arriscamos de nem sempre ver claramente, é que "juntar um número" equivale exatamente a "subtrair seu oposto" e que "subtrair um número" equivale exatamente a "adicionar o número oposto", então sabemos executar as operações sem jamais nos enganarmos. (Ver, por exemplo, os jogos de David Page com dinheiro "negativo").

Voltando atras e examinando o que fizemos, nós tomamos consciência de uma certa regularidade: é nisto que consiste a análise retroativa. Quando nós nos limitamos a praticar as regras deixando-nos impregnar por suas estruturas, nós, cada vez menos, tomamos consciência; enquanto que, quando voltamos atrás e examinamos o que foi feito, nós procuramos voluntàriamente tomar mais consciência das relações que caracterizam a estrutura reguladora. A prática é uma atividade menos consciênte, a análise uma atividade mais consciênte.

Mas existe ainda um outro caminho, mais aventuroso, para chegar ao domínio de uma estrutura reguladora. Nós jogamos com nossa estrutura, nós a examinamos em detalhe; pode acontecer descobrirmos nela algumas insuficiências. Nós podemos, então, seja ou modificar as regras, seja ampliá-las. Isto constitue a <u>análise progressiva</u>, e tôda extensão da estrutura reguladora será qualificada de <u>generalização</u>. Por exemplo, podemos descobrir que os números orientados só permitem a variação de uma variável segundo uma ou outra de duas direções opostas, então, que a maior parte das situações da vida corrente exigem mais de uma variável para sua descrição. Se queremos dar a posição de um navio no mar, nós temos necessidade de precisar sua longitude assim como sua latitude. As duas variáveis são independentes, no sentido de que, em pleno mar, podemos fazer variar uma sem fazer variar a outra (isto é, por exemplo, nós podemos navegar inteiramente para o leste ou sòmente para o sul); ou ainda podemos fazer variar os dois inteiramente independentes umа da outra (isto é, podemos navegar, a partir de um ponto dado do oceano em qualquer direção, à nossa vontade). Se queremos, igualmente, precisar a temperatura do ar, a temperatura da água, a pressão do ar, a humidade rel a e a hora na qual todos êsses levantamentos foram efetuados, nós temos um processo com sete variáveis. Considerações desta natureza nos distanciam do espaço unidimensional dos números orientados e nos conduzem a uma generalização introduzindo um espaço de sete dimensões constituido por esta dos ou vetores.Uma tal generalização é essencialmente a extensão de uma classe de estrutura conhecida, de modo a formar uma outra classe mais vasta, da qual a estrutura precedente é apenas um caso particular.E´ preciso nã o confundir a generalização com a abstração: esta última é a formação de uma cla sse a partir dos elementos que a constituem.Os números orientados, êles próprios são os elementos do conjunto dos números orientados; os estados ou vetores são os elementos do conjunto dos vetores multidimensionais. Ma s a classe dos números orientados não é um elemento da classe dos vetores multidimensionais. Precisamos prestar muita atençaõ para nã o confundir a inclusão ou a extensão de classes com a noção "ser um ele mento de" ou "pertencer a" uma classe. A formação de uma classe a partir de elementos é essencialmente um processo de abstração, enquanto que a extensão de uma classe já existente para uma classe mais vasta é um processo de genera lização. (Z.P.Dienes, Abstraction and generalization, dans Harvard Educationa l Review,été 1961)

Em lugar de se limitar a estender e estrutura reguladora, é possível decidir uma modificação da estrutura reguladora. Afinal, as regras existem para nos servir e não para nos amarrar. Desde que encontramos outras regras que nos servem melhor, o que há a fazer é modificar as regras. E´o q ue ocorre quando se propõe uma nova teoria. Esta maneira revolucionária de pensar pode-se encontrar mais seguidamente entre os adultos, se as crianças fore m(exercitadas) levadas a se mostrar mais audaciosas.Nossas p ráticas atuais em matéria de educação comportam um alto grau de conformismo e ,muitas vezes são os indivíduos ligeiramente desequilibrados que têm a audácia de perturbar as estruturas estabelecidas.Levar as crianças a pensar de uma ma neira revolucionária poderá, a bem dizer, conduzir a resultados revolucionários - o que não seria mau no estado de mundo de hoje!

Voltemos ao processo que estamos em vias de examinar. Aplicamos, analisa mos ou generalizamos as estruturas reguladoras que tinhamos anteriormente configurado a partir do caos de nossas impressões sensoriais no decorrer de um dia de manipulações. Agora nós estamos suficientemente familiarizados com essas estruturas:Eis que voltamos ao nosso ponto de partida mas, com um material mais rico para nossos jogos.Êsses novos jogos sã a s <u>relações entre</u> nossos novos brinquedos mas sòmente com a estrutura interna de ca da brinquedo. Para aprender pela experiência o modo de empregar cada brinquedo, é preciso recomeçar todo o processo das ma nipulações. Nós percorremos um círculo completo, ou antes, uma volta de uma espiral,pelo fato de que estamos em um nível mais elevado do que antes. Recomeçamos um novo <u>ciclo</u>, ensaiando aqui e ali, vendo como os novos brinquedos vão se encaixar, como não se encaixam e, progredindo, de um modo geral, para a estrutura reguladora desconhecida que deve caracterizar os novos brinquedos. Finalmente êsse ciclo, êle também,chegará a uma conclusão e, é assim que novas estruturas na scem entre as mãos dos matemáticos.

E´êste encaminhamento de um ciclo a outro que chamei em minha obra anterior de <u>aplicação</u> do princípio dinâmico. Em minha primeira formulação do princípio, mostrei como a construção precede à análise e a ela conduz, ma s tinha definido a análise em um princípio separado. Reuno agora o dois princípi os em um novo enunciado mais completo, do princípio dinâmico.

E´tempo agora de examinar com um pouco mais de detalhes como funciona m os ciclos e qua is são as circunstâncias que os fazem funcionar mais (ou menos) eficazmente. O que é que favorece uma abstração mais rápida mais eficaz? Em outros têrmos, como precisamos organizar uma situação para ter chances de ver as classes se formarem ràpida e eficazmente? Em primeiro lugar, precisa mos decidir a ou as classes que desejamos ver formadas por nossos alunos. Precisamos, em seguida, salientar os problemas susceptíveis de da r os resultados seguintes:

a) o aluno será capaz de reconhecer as situações novas como significativas da abstração procurada ou sem relação com ela;

b) nas situações julgadas corretamente como significativas, os exemplos de classes serão reconhecidos como pertencentes às classes em questão, contra-exemplos como não pertencentes.

Para satisfazer a primeira condição, é preciso construir ~~é pre ciso construir~~ uma espécie de crivo mental no qual se colocam as situações as que não correspondem atravessam o crivo enquanto que as que correspondem serão retidas. Êste não é um pequeno processo. Como Newton teve idéia de que, de um lado os objetos caem para a terra, de outro lado, a lua que circula ao redor da Terra, faziam parte de uma única classe de acontecimentos? Êle considerou que todos os corpos ~~estavam~~ eram atraidos uns para os outros; no primeiro caso, trata-se de um objeto em vias de cair e da terra, no segundo caso, da lua e da Terra. Esta "atração" é apenas uma maneira de falar permitindo organizar dois acontecimentos numa mesma categoria; tais categorias tornam possíveis melhores e mais exatas. Todas as classificações são abstrações, não realidades. Elas ajudam a triar as realidades, mas elas não são realidades em si mesmas. Newton conseguiu separar uma idéia válida procurando o que essas duas situações possuiam em comum. Êsse resultado êle obteve olhando essas situações de vários pontos de vista diferentes, alguns muito deshabituais para seu tempo. Nós vemos assim, que se pode efetuar uma abstração, ou dito de outro modo, fazer aparecer uma regularidade, examinando certos acontecimentos de numerosos pontos de vista. Como podemos aplicar êsse método no decorrer das lições de matemática? Dado que os "acontecimentos" matemáticos não se produzem quase nunca de um modo natural na experiência da criança, é preciso provocar sua aparição. As estruturas matemáticas que nós queremos fazer as crianças armazenarem devem ser-lhes apresentadas sob diversas formas concretas; isto é, que as crianças devem encontrar a mesma estrutura matemática vestida de um certo número de maneiras diferentes.

Uma criança que aprendeu a reconhecer as situações comportando funções do 2º grau pode ser conduzida a reconhecer as duas situações que seguem como significativas:

"Nós partimos para o combate com tantos carros quantos homens há em cada equipagem. Um dos carros recebe um glope no fim e todos seus ocupantes são mortos. O efetivo do conjunto perde outros seis soldados. No fim da batalha, encontramos alguns carros inimigos abandonados. Percebemos que podemos ~~fazer~~ voltar para nossas linhas os carros que nos restam, assim como os carros inimigos, todos com equipagens iguais, se bem que reduzidas. De quantos homens foi reduzida cada equipagem, e quantos carros inimigos nós capturamos?"

"Sôbre uma pranchêta cheia de furos, faça um quadrado com um grande número de cravelhas. Depois, tire uma fileira do quadrado e seis outras cravelhas quais quer da prancheta. Faça um retângulo com as cravelhas restantes. Quantas fileiras a mais ou a menos terá o retângulo ~~com as cravelhas restantes~~ em relação ao quadrado e quantas cravelhas a mais ou a menos haverá em cada uma dessas fileiras em relação a uma fileira do quadrado primitivo?".

De fato, êsses exemplos não correspondem sòmente às funções do 2º grau, êles formam também, do ponto de vista matemático, um só e mesmo problema. Compreender essa identidade supõe a capacidade de rejeitar o não significativo, isto é, o que nada tem a ver com o assunto e, reter o essencial. O que têm de matemàticamente significativo reside nas relações numéricas enunciadas nêsse problema e não em sua "roupagem". O "tantos carros quantos homens de equipagem em cada carro" corresponde ao "quadrado de cravelhas" por intermédio de tantas fileiras de cravelhas quantas cravelhas em cada fileira". As fileiras correspondem aos carros e as cravelhas aos soldados. O golpe final dado em um ~~dos~~ carro ~~s~~ corresponde a retirada de uma fileira, os seis outros soldados que morrem correspondem às seis outras cravelhas que são retiradas. A nova repartição do efetivo réstante em grupes iguais corres pende ao arranjo das cravelhas restantes, em um número maior de fileiras que anteriormente, com cada fileira mais curta do que antes. O número de cravelhas a menos em cada fileira corresponde ao número de homens a menos em cada equipagem e, assim por diante. Uma tal correspondência ajudará as crianças a compreenderem o que é o aspecto matemático de um problema em oposição a seu aspecto de "situação real". O aspecto matemático é o abstraimos de um certo número de situações diferentes.

Não é suficiente reconhecer o que é aplicável e o que não é aplicável ao problema, é preciso ainda reconhecer os exemplos e os contra-exem

. Os dois problas acima são exemplos da decomposição em fatôres das ções de 2º grau para chegar à solução de uma classe de problemas. Mas, reis, agora, como reconhecer as funções de 2º grau como diferentes de outras funções, sejam as de 3º grau? (Nós falamos ainda de situações e não da forma simbolizada dessas situações, bem entendido). Podemos distinguir umas das outras? Por exemplo:

"Há tantos vagões em um trem, quantos compartimentos num vagão e quantos assentos em um compartimento. Quando o trem parte, cada assento é ocupado e não fica ninguém em pé. Na primeira parada, um grande número de pessoas querem entrar de modo que é preciso juntar mais seis vagões iguais aos outros. Todos os assentos são ocupados nêste novo comboio. Na estação seguinte juntam mais um vagão e ainda todos os bancoa são ocupados mas êste tem onze compartimentos, se bem que as dimensões dos compartimentos seja a mesma. Há mais seis pessoas que querem entrar, de modo que não vale a pena juntar um outro vagão. Em consequência, elas ficam de pé no corredor. Quando o trem chega à fronteira, todos devem descer porque no país seguinte as vias férreas tem outra bitola. No novo país, os vagões são maiores, isto é, êles têm mais compartimentos e mais assentos por compartimento. Êles podem receber exatamente todos os passageiros que estavam no trem, de modo que todos os bancos e ninguém fica em pé.

a) Qua ntos vagões há nêste segundo trêm, a mais do que no primeiro antes de juntarem os outros vagões?

b) Quantos compartimentos a mais há nos novos vagões em relação aos antigos?

c) Quantas pessoas a mais podem sentar num compartimento do novo vagão em relação a um compartimento de um antigo vagão?"

Êste é um problema de 3º grau, que ilustra a fatoração da função do 3º grau:

$$x^3 + 6x^2 + 11x + 6 = (x + 1)\ (x + 2)\ (x + 3)$$

e vemos que "1 a mais", "2 a mais" e "3 a mais" são as respostas às perguntas, mas, bem entendido, não importa em que ordem.

Se quizermos ilustrar pelos trens, um problema de 2º grau, podemos dizer o seguinte:

"Há tantos vagões em um trem, quantos compartimentos em um vagão. Todos estão cheios no momento em que o trem parte e, ninguém precisa ficar em pé. Juntam-se seis vagões a mais, na próxima ~~estação~~ parada e, por seu turno, êles ficam completamente cheios. Na estação seguinte junta se um vagão suplementar com nove compartimentos e nêste também todos os lugares são ocupados. Na fronteira todos os viajantes descem porque a bitola da estrada muda. No novo país, os vagões são maiores; há mais compartimentos em cada um mas, o mesmo número de assentos em cada compartimento. A companhia procura que todos sentem, todos os lugares sejam ocupados e ninguém fique em pé.

a) Quantos vagões suplementares há no segundo trem em relação ao primeiro, na partida, antes de juntar os vagões?

b) Qua ntos compartimentos a mais há num vagão do segundo país em relação a um vagão do primeiro?"

Esta é uma representação concreta da fatoração da função de 2º grau:

$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)\ (x + 3) = (x + 3)^2$$

de modo que as respostas ao problema são: 3 compartimentos a mais por vagão e 3 vagões a mais no trem.

A diferença entre uma funçaõ de segundo e uma função do 3º grau é sòmente que na função ou equação do segundo grau, a <u>variável</u> ou <u>incógnita</u> é elevada à potência 2, enquanto que ela é elevada à potência 3 na do 3º grau. O número de assentos por compartimento, o número de compartimentos por vagão, o número de vagões no trem, todos êsses números iguais constituem a variável do problema do 3º grau, sendo dado que seu valor pode de ser escolhido arbitràriamente sem afetar a solução do problema. No problema de segundo grau, é o número de compartimentos por vagão, igual ao número de vagões no trem, que representa a variável correspondente. Os passageiros são ~~transferidos~~ substituídos por blocos, cada bloco enchendo um compartimento, e, assim, êsses blocos são na realidade as unidades matemát

eas por no meio das quais se avaliam os outros grupos. Facilita-se a discri
minação entre os dois tipos de problemas operando com pessoas, comparti -
mentos e vagões em lugar de operar com compartimentos, vagões e trens; o s
simbolismo utilizado para representar os diversos tipos de conjuntos tor
nou e ntão ma is claro. Isto reduziu o trem a um carro Diesel único, com
seis compartimentos mais do que lugares por compartimento e 9 pessoas de
pé, estando todos os outros assentos ocupados.

É claro, pode-se objetar que o segundo problema, em razão da ma
neira pelo qual foi formula do, é um problema do 3º grau, sendo que o núme
ro de viajantes por compartimento é na realidade, uma variável. Mas é uma
variável inútil que não entra em linha de conta no problema. Se chamarmos
y êste número e as unidades sendo os passageiros e não os compartimentos,
a tradução simbólica do problema será de fato:

$$x^2y + 6xy + 9y = (x + 3)^2y$$

O problema ainda consiste em transformar a expressão em x, sen
do que y se apresenta como fator em cada têrmo; êste problema ainda é do
segundo grau.

Saber distinguir uma situação da outra é uma tarefa bastante
difícil. Se uma criança é capaz de reconhecer os problemas de 2º grau nu-
ma lista compreendendo problemas de 2º, de 3º e de outros graus, é que ela
certamente é capaz de identificar os exemplos de situações de funções do
2º grau. Se ela for incapaz, poderemos realmente dizer que ela sabe o que
são funções do 2º grau? Podemos dizer de uma pessoa que pensa que uma me
sa é uma cadeira que ela sabe o que são as mesas e as cadeiras?

Para resumir: com referência a uma estrutura matemática, as si
tuações se reunem em três categorias:

a) situações sem relação com a estrutura (nao significativas);
b) situações com relação com a estrutura (significativas) que
formam os exemplos de situações descritas pela estrutura;
c) situações em relação com a estrutura, que formam contra-exem
plos do conjunto de situações descritas pela estrutura.

A distinção entre "contra-exemplo" e "não significativa" é de ce
certo modo arbitrária e depende da classe de situações que escolhemos con-
siderar como significativas. Por exemplo, podemos falar de comprar móveis
para uma nova casa, e neste caso as situações em relação seriam aquelas
que dizem respeito à mobiliário (por exemplo, sua escolha, sua compra, sua
fabricação, etc.). Nós podemos sair a procura, na esperança de encontrar u-
ma mesa. Entramos numa casa de móveis e vemos uma mesa do século XVII. Ela
é um exemplo na classe das mesas. Podemos também ver expostas algumas magn
ficas cadeiras de espaldar recurvado que combinam muito bem com a mesa. Es-
tas cadeiras tem, certamente, relação com o mobiliário mas elas são contra-
exemplos da categoria de objetos que nós fomos comprar nêsse dia. Nós pode
ríamos ir, ao acaso, em outro setor da loja onde veríamos um vestido que
gostaríamos de comprar para nossa filhinha. Isto é completamente sem relaç
ção com a compra de móveis para nossa nova casa. Os lógicos chamam de con-
junto das situações significativas o universo do discurso. É o universo da
coisas sôbre a s quais estamos discorrendo no momento considerado. Tudo o
q ue pertence a êsse universo é então, significativo; as outras coisas, no
exte rior, são não-significativas. Então, nós escolhemos uma classe de obj
tos no interior dêste universo do discurso. Os membros desta classe serão
exemplos da classe escolhida; os outros membros do universo do discurso se
rão contra-exemplos. Uma grande parte das dificuldades com as quais nos e
chocamos em matemática, se refere aos contra-exemplos, porque frequentemen
te, elas não formam uma classe bem definida de coisas, de acontecimentos
ou de situações. Pa ra permitir à classe dos contra-exemplos, ser bem defi
nida, é pre ciso que o universo do discurso seja bem definido.

Se quisermos que as crianças aprendam ràpida e eficazmente as r
lações referentes a uma estrutura matemática qualquer que queremos fazê-la
aprender, é preciso ap resentar-lhes várias concretizações dessa estrutura
no interior de um certo universo do discurso, seguidas por concretizações
de outras estruturas no mesmo universo do discurso, para ajudá-las a reco-
nhecer a diferença entre os exemplos e os contra-exemplos. Isto implica o
apêlo a dois princípios que poderíamos formular como:

a) o princípio da <u>concretização múltipla</u> e (Na obra Constru-
n des ma thématiques, Esse princípio foi chamado da ~~variabilidade per~~
~~ceptual~~ "princípio da variabilidade perceptual").

b) o princípio do <u>contraste</u>.

Apresentando numerosas concretizações se chegará finalmente a
que só <u>a</u> estrutura essencialmente matemática seja retida entre todas as
situações concretizadas, de tal modo que os exemplos que não encontramos
anteriormente sejam, entretanto, reconhecidos como tendo a estrutura mate-
mática em questão. Por exemplos contrários , nos asseguramos que as situa
ções não possuindo <u>a</u> estrutura são reconhecidas como não a possuindo.

É um truísmo dizer que os conceitos matemáticos são construidos
a partir de variáveis matemáticas. A priori, para ensinar de uma maneira e
ficaz um conceito matemático, devemos fazer variar na experiência do alun
no, todas as variáveis matemáticas inherentes. Será inútil ensinar
$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ restringindo o valor de y a um ou a poucos valores.
Como se pode aprender a relação se o único caso encontrado for $(x + 1)^2 =$
$x^2 + 2x + 1$? Isto, bem entendido, é muito evidente. Nos outros domínios d
da matemá tica isto não parece de tal forma se r considerado como decorrên
cia (allant de soi). Por exemplo, o conceito da notação de posição é ba-
seado sôbre (a) um número de base; (b) potências do número da base; (c)
multiplicador de cada uma das potências do número de base pelo fator conve
niente. Êste conceito é singularmente restrito quando se dá ao número de b
ba se um valor constante, a saber dez. É ainda mais pela variação limitada
do expoente ao qual o número da base é elevado para obter as diversas potê
cias. A única variável que se faz variar muito é a que figura na rubrica (
(c), êsto é, os alga rismos dos números que são utilizados pelas interminá
veis "adições" das crianças.Não é de admirar que mesmo após sucessões sem
fim de tais "adições", elas não tenham mais do que uma idéia muito vaga do
conceito de valor posicional.

Anteriormente fizemos alusão ao princípio que consiste em fazer
varia r todos os conceitos matemáticos significativos falando do <u>princípio</u>
<u>de variabilidade matemática</u>. É fazendo variar, o mais largamente possível,
as variáveis que fazemos aparecer claramente, o que é essencialmente inva-
riante dura nte a variação.Quando uma coisa permanece sempre idêntica a si
mesma, nós temos a tendência de não vê-la; nota-se melhor um objeto em mov
vimento do que um outro em repouso. Do mesmo modo uma estrutura matemática
"em movimento" se destacará do resto e chamará a atenção.

Ao lado da verificação dos princípios da concretização múltipla
do contraste e da variação matemática, há numerosas outras tentativas que
podemos tomar para tornar o processo de aquisição das estruturas matemáti-
cas mais eficaz e mais agradável para as crianças. Um sistema de punições
e recompensas as impede de apreciar o interêsse intrínseco de seu trabalho
e as leva aos fins mais egoístas: ganhar o favor do professor e evitar seu
desfavor. Prestaremos um grande serviço ao desenvolvimento moral tanto co
mo ao desenvolvimento intelectual da criança suprimindo os castigos e as r
recompensas, e colocando em seu lugar como motivação intrínseca o interês
se pela ta refa em si. É completamente surpreendente ver a que ponto as
crianças podem se prender a desenredar a meada das estruturas abstratas e
suas propriedades, sem que seja necessário dar-lhes qualquer impulso exter
rior.

Não acrescentaremos nada aqui sôbre a questão do trabalho indivi-
dual e da motivação intrínseca, dado que êsses assuntos já foram abordados
em certo número de publicações recentes. (Construction des mathématiques, ca
pítulo 1º; G.L.W. Sealey, The Creative Use of Mathématics in the Junior
School). Pesquisas estão em curso em diversas partes do mundo sôbre as con-
dições necessárias melhorar a eficácia do ensino matemático, bem como sôbre
os problemas mais fundamentais referentes ao processo em si do ensino matemá
tico. A obra de Piaget é bem conhecida (La conception du nombre chez l'enfan
P.U.F., Paris, 1960; Piaget, Greco, Grize, Sur la construction du nombre, P.U
F., Pa ris, 1961) e as pesquisas em Genève prosseguem regularmente.Durante o
ano de 1960-1961, a "Harvard University Center for Cognitive Studies" pos e
curso um plano de pesquisas sôbre o ensino da matemática, estudado e posto e
prática (mis au point) por Jérôme Bruner e eu próprio,cujo relatório está, a
gora, p ublicado. Outras pesquisas foram empreendidas por Skemp em Manchester,

por Sealey e Oldridge em Leicestershire, pela "National Foundation for Edvotional Research for England and Wales" em Surrey e alhures, por Robert Davis em Syracuse N.Y. e por Suppes na California. Outros planos de pesquisa foram lançados em Florença, em Budapeste, em Adelaide, nas ilhas Hawai wai, em Minnesota e ainda outros.