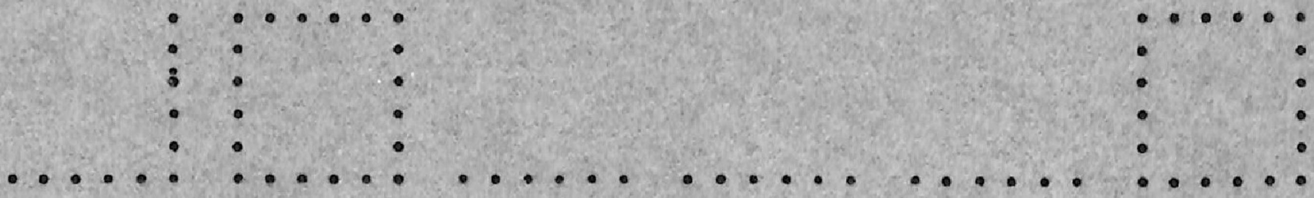
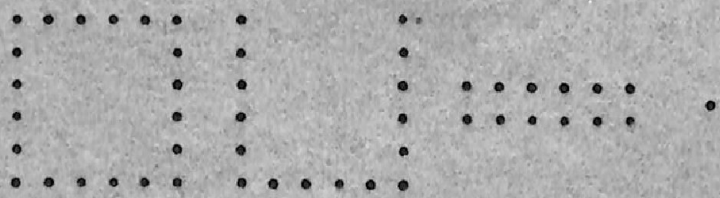
Dienes

## Adição Complementar

Apresenta-se na vida das crianças em numerosas situações onde desejam saber se uma coisa é maior que outra e, em definitivo, quanto. Agrupando os objetos em subconjuntos de ordem de mais em mais elevada, a dificuldade diminui. Por exemplo, tomemos o conjunto:



e o conjunto:



Em base 6, o primeiro conjunto tem a propriedade numérica 1000, enquanto que o segundo conjunto tem a propriedade numérica 221. Quantos elementos a mais que o segundo, o ppimeiro conjunto tem? A amior parte das crianças resolveria êsbe problema completando o segundo conjunto, isto é, juntando elementos até que o segundo se torne equivalente ao primeiro. Isto significa que para tornar o segundo conjunto equivalente ao pr primeiro, é necessário juntar 5 objetos isolados, 3 subconjuntos de primeira ordem, e 3 subconjuntos de segunda ordem. Isto quer dizer que se ajuntará, em base 6, 335 objetos do segundo conjunto para lhe dar a mesma propriedade numérica que o primeiro.

Sob uma forma simbólica pode-se por o problema como segue :

1000 = 221 + (     )

ou 1000 = 221 + ( N

fórmula na qual N representa o nº de elementbs que é necessário juntar ao segundo conjunto para torná-lo numèricamente qquivalente ao primeiro; portanto, o nº de elementos que o primeiro conjunto tem a mais em relação ao segundo. A solução do problema é N = 335.

As crianças são assaz prontas a pôr em jôgo suas pr-oprias técnicas de resolução dos casos os mais difíceis de " adições complementares". Pode-se, então, comparar estas técnicas entre elas e as discutir em classe com as crianças que as inventaram. Não é necessário se prender ao que desde êsse momento tenha sido utilizado de técnicas de adição complementar; é preferível deixar às crianças tempo para refletir sôbre o problema subjacente e promover a resolução progressiva das dificuldades. Quando êles experimentam as técnicas que se revelarem mais eficazes tomarão mais sentido para êles e, êles as aprenderão mais rápido porque as compreenderam melhor.

Observação : Aqui o autor apresenta a subtração, operação aritmética que segundo êle tem por fundamento a operação que, nas operações sôbre conjuntos, consiste em procurar um conjunto diferença entre um conjunto e um de seus subconjuntos,

SEGUNDA PARTE :

Lições e jogos que conduzem à compreensão dos conjuntos e dos números (71

Conjunto reunião (pag, 86)

Eis nosso primeiro conjunto representado por desenhos. Observe as chaves que o rodeiam e que indicam que se trat de um conjunto.

{ vermelho espêsso, vermelho fino, verm. espês., verm. fino }

Eis nosso segundo conjunto representado. Observe que se trata de conjuntos distintos que não têm elementos comuns :

{ verm. espêsso, verm. fino }

{ vermelho espêsso, vermelho fino, verm. espês., verm. fino } ∪ { verm. espêsso, verm. fino } =

{ vermelho espêsso, vermelho fino, verm. espêsso, verm. fino, verm. espês., verm. fino }

O conjunto dos quadrados vermelhos reunido ao conjunto dos triângulos grandes vermelhos é igual ao conjunto dos quadrados vermelhos e dos triângulos grandes vermelhos. Observe o sinal      do qual nos servimos para indicar a reunião. Em uma ulterior e a um nível diferente esta operação corresponde à adição de números. Pode-se também jogar " á ces jeux" com os blocos lógicos começando por um só atributo, depois, juntando dois, três, à medida que as crianças adquirem a prática.

## REUNIÃO DE CONJUNTOS

Existe uma operação importante, é a da reunião de conjuntos a fim de fazer outros conjuntos. Isto não oferece nenhuma dificuldade particular porque as crianças pensam simplesmente em um certo conjunto, depois, em um outro conjunto, depois, finalmente, reunem os elementos para formarem novo conjunto. Há entretanto uma pequena dificuldade que pode se apresentar se os dois conjuntos tem elementos comuns; mas as crianças admitem muito depressa que êsses elementos, como os outros, podem ir juntos. Por ex. se se tem de uma parte todos os lapis e, de outra parte, todos os instrumentos que servem para escrever e que são azuis ( o que compreende a uma vez os lápis azuis e as canetas azuis, mas que compreende também, os lápis não azuis) e se os colocamos todos juntos teremos uma pilha que compreenderá os lápis não azuis, as canetas azuis. As canetas não azuis não se encontrarão incluidas.

Há o caso particular das reuniões de conjuntos nas quais não há elementos comuns. Também é necessário que as crianças adquiram a experiência de situações nas quais se reunem conjuntos tendo elementos comuns e de situações nas quais se reunem conjuntos que não têm elementos comuns. São os últimos que conduzem à ideia de adição.

No exemplo dado acima, todo o membro do conjunto reunião é, ou bem um instrumento para escrever, azul, ou bem um lápis, Na intersecção o conjunto tinha a propriedade dos dois conjuntos ( a um tempo instrumento de escrita e azul). No conjunto reunião a propriedade do conjunto-reunião é que os elementos têm uma ou outra destas propriedades. As crianças acham isso difícil de ser compreendido no início, porque não veem bem como o que êles reuniram seria ou bem isso ou bem aquilo; nesse caso o que êlas vêm de fato, em suas mãos, é um só objeto. A melhor maneira de vencer esta dificuldade, seria, talvez, dizer-lhes que se vai tirar uma peça do conjunto reunião, mas sem saber exatamente qual, porque não se vai olhar no recipiente. Então, antes de tirá-la, o que é que se pode dizer de certo sôbre essa peça, qualquer que seja, sem se enganar ? Muito frequentemente neste caso as crianças responderão rápido : "Será certamente um lápis ou uma coisa ("un truc") azul para escrever.

Vejamos como se pode organizar um jôgo simples dêste gênero. Tomemos os blocos lógicos e decidamos que o primeiro conjunto se compõe de todas as peças azuis, enquanto que o segundo se compõe de todas as peças redondas. Reunem-se êsses dois conjuntos e se os coloca em um balde com uma tampa. Logo se pergunta às crianças: "Se tiro um bolco do balde sem olhar, qual será certamente? e, suponhamos que a resposta seja :"Um azul". Faz-se, então, uma criança tirar uma peça que poderá ser azul mas também, ela poderá tirar uma redonda que não será mais azul e, se verá, então, que a resposta: "Um azul" não é suficiente. Propondo novamente se obterá, provàvelmente, a resposta:"Ou bem azul ou bem redonda" resposta cuja experiência confirmará a exatidão.

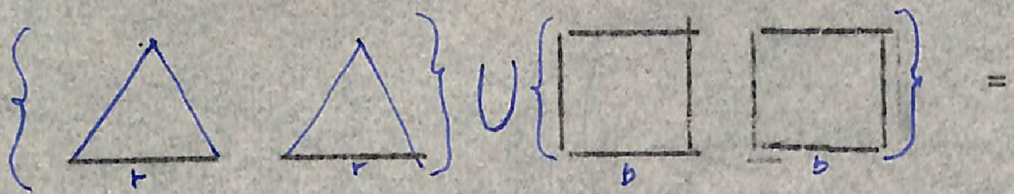
Para dar um exemplo de reunião sem atributo comum tomam-se as formas quadradas e as formas retangulares.

## JOGOS DE ADIÇÃO

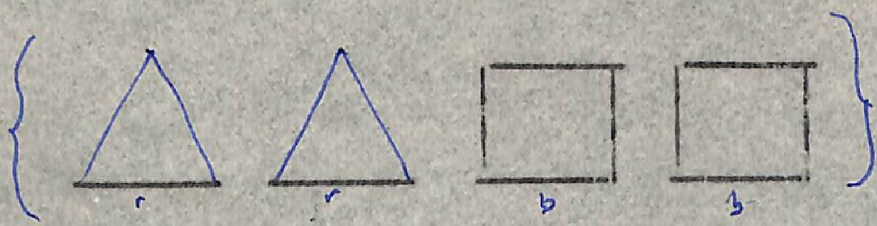
A cada reunião de conjuntos distintos corresponde a adição de suas propriedades numéricas. Pode-se, portanto, fazer jogos de adição paralelos aos jogos de reunião de conjuntos tomando os números correspondentes. Mas, é necessário explicar às crianças a diferença de terminologia. Quando se adicionam dois números, calcula-se a propriedade numérica da reunião dos dois conjuntos dos quais se conhece as propriedades numéricas. Por exemplo, em um conjunto há dois meninos e, em outro três; "dois" e "três" são as propriedades numéricas dêstes conjuntos. Depois de efetúa a reunião dêstes conjuntos, reunindo os dois meninos aos três meninos e, se calcula a propriedade numérica adicionando "dois e"três". Não se adiciona "dois meninos" e"três meninos", adiciona-se "dois" e "três". Reune-se um conjunto de meninos a um outro conjunto de meninos e adiciona-se o <u>número</u> de meninos de um dos conjuntos ao <u>número</u> de meninos de outro conjunto.

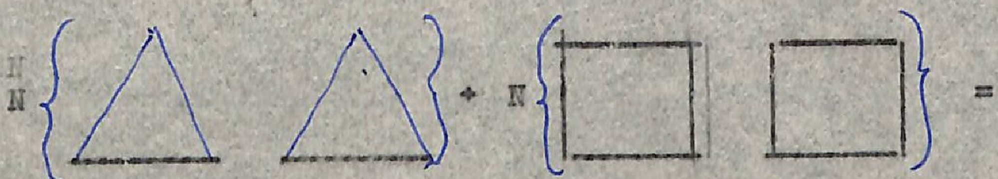
É necessário praticar com numerosos exemplos dêstes jogos de adição nos dois níveis - aquêle das reuniões de conjuntos e aquêle da adição das propriedades numéricas dos conjuntos. A força de prática as crianças compreenderão realmente do que se trata e o caminho estará livre para a aquisição ulterior dos "fatos numéricos" relacionados com adição, depois mais tarde, para abordar exemplos análogos mas, mais complexos.

<u>A adição corresponde, ao nível do número, à reunião de conjuntos disjuntos.</u>




A reunião do conjunto de pequenos triângulos vermelhos e o conjunto dos pequenos quadrados azuis nos dá :




| dois | mais | dois | é igual | quatro |
|---|---|---|---|---|
| 2 | + | 2 | = | 4 |

"O atributo número" do conjunto de pequenos triângulos vermelhos é "dois" (ou 2) é o atributo número do conjunto de pequenos quadrados azuis é "dois" (ou 2). Se nós adicionamos o "atributo número" 2 a outro "atributo número" 2 teremos o "atributo número" do conjunto reunião, isto é "4".

<u>JOGOS "ESTADO OPERADOR" COM A ADIÇÃO</u> 107

Todo o elemento da adição pode ser considerado como um operador que "opera" sôbre um número e produz um outro número. É um pouco como uma máquina que opera sôbre o que se introduziu "à entrada" e que dá outra coisa "à saida". Por exemplo, pode-se imaginar uma "máquina de juntar dois" e cada vez que nela se introduz qualquer coisa, ela produz na saida qualquer coisa que é "dois a mais" que à entrada.

Pode-se organizar muitos jogos dêste gênero na maternal. Para se começar as "maquinas" não serão representados simbòlicamente sôbre o papel ou o quadro, mas encarnadas pelas crianças. Tomam-se três crianças, uma encarregada da "entrada" outra encarregada da "saida" e, uma terceira entre as duas, com a função da máquina de adicionar dois. Pode-se mesmo imaginar que êste "operador" seja associado a um "tournisseur" encarregado de reaprovisioná-lo. A criança "entrada" decide, por exemplo, pôr cinco "jetons" (tentos do jôgo) e se conta um a um. O operador da máquina os toma e junta dois "jetons" vindos do fornecedor depois passa o tôdo à criança "saida" que conta e mostra que há sete "jetons".

JÔGO ESTADO OPERADOR - ESTADO COM ADIÇÃO

| entrada | máquina de adicionar dois | saida |
|---|---|---|

Cada objeto é colocado separadamenbe e contado. Faz-se o mesmo à saída e tôda a operação é anotada pelo grupo de alunos : $3 + 2 = 5$.

Da mesma maneira se realizam os jogos estado-operador - estado com a subtração.

Repetir-se-á, frequentemente, êste jôgo com várias espécies de "máquinas" e trocando as crianças encarregadas das diferentes funções, a fim de que possam todas ver os diversos aspectos da operação : reunião de conjuntos, adição de propriedades numéricas, função da máquina tanto quanto do operador, mudando cada vez o "estado entrada" em "estado saída". Pode-se, nêstes jogos, batizar estas máquinas de "Máquinas de Adicionar".

Obs. : segue uma série de jogos com o que o autor chama "máquinas", logo com as propriedades das operações ex.: jogos de comutatividade, jogos de associatividade.

ESTADOS E OPERADORES Pag. 35

Uma boa parte da matemáica se relaciona com o estudo dos estados e com o estudo dos operadores que ocasionam a transformação dêsses estados em outros estados. Por exemplo, adição constitui uma situação dêste gênero. Acontece o mesmo com a subtração e qualquer outra operação arítmética. Na adição temos a situação seguinte :

Seja um estado de origem, por exemplo a propriedade numérica de um certo conjunto: três livros postos sôbre a mesa. Êste conjunto de três livros é o conjunto de origem e sua propriedade numérica , três, constitue o estado de origem. Efetuemos, agora, uma transformação. Ela pode ser de reunir êste conjunto de três livros a um outro conjunto de quatro livros que se acaba de colocar sôbre a mesa. O operador é a propriedade numérica do conjunto que vem de ser colocado sôbre a mesa e que se trat de reunir ao conjunto de origem existente sôbre a mesa. A propriedade numérica do conjunto originel é três e a propriedade numérica do operador é quatro. Bem entendido, uma vez que os dois conjuntos são reunidos, o estado da mesa se encontra modificado. Ela tem em cima um novo conjunto e sua propriedade numérica é constituida pelo estado modificado. É sete. Assim, o que se passou foi que ao "estado três" foi aplicado um operador "juntar quatro" o que deu um estado "sete". Pode-se dizer o mesmo da multiplicação. Ao "estado três" que está sôbre a mesa, aplica-se o operador "multiplicar por quatro". Isso significa que sôbre uma outra mesa, por exemplo, queremos criar um estado no qual haverá quatro vezes tantos livros.

IV.III - 7 - A numeração

Trad. A.B.Krebs

A numeração serve para nomear, ordenar e calcular.

IV.III.7 - 1 - A denominação escrita e ordem

Mesmo se estamos inteiramente desligados da função calculadora, seremos capazes de escrever e ordenar os números.

Para isto dispomos de um alfabeto composto de dez sinais: (0,1, 2,3,4,5,6,7,8,9) se escrevemos em base dez e n sinais se escrevemos na base n (assim, na base três, nós dispomos dos sinais 0,1,2).

Existe entre esses dez sinais uma ordem alfabética que é a do alfabeto escrito mais alto (plus haut).

Êstes des sinais por reunião nos permitem escrever palavras tais como 1515, 1789, 1965,2000; as repetições de sinais são permitidas; há contudo uma regra de ortografia: não é permitido escrever um "0" no início.

Nós podemos ordenar essas palavras seguindo uma ordem lexicográfica cuja s regras são as seguintes:

1º) As palavras são classificadas segundo seu comprimento: uma palavra curta está antes de uma palavra longa;

2º) Se duas palavras tem o mesmo comprimento, compara-se segundo sua letra inicial: elas são enfileiradas como suas letras iniciais no alfa beto;

3º) Se duas palvras têm a mesma letra inicial, compara-se ~~segun~~ de acôrdo com a segunda letra, etc...

Estas três regras permitem ordenar todas as palavras possíveis sem ambiguidade: elas determinam no conjunto das palavras uma "relação de ordem estrita e total" - estrita porque não há ex-aequo, total porque todas a s palavras são enfileiradas.

Lembramos que esta ordem é diferente da ordem alfabética do dicionário na qual 1515 viria antes de 800, por exemplo.

Olhemos mais de perto como está construida nossa lista; nós vamos para isto escrever nossa sequência em base três; tudo se passaria da mesma forma em q ualquer outra base; nós temos então 3 sinais e uma regra de ortografia (sem "0" no começo):

1ª palavra 1
2ª palavra 2
3ª palavra 10
4ª palavra 11
5ª palavra 12
6ª palavra 20
7ª palavra 221
8ª palavra 22

nós constatamos formando nossa lista:

1º) que há um primeiro elemento,

2º) que cada elemento tem um sucessor,

assim, depois de 12012 vem 12020; se para a enézima palavra o último sinal é um 2, para (n + 1) palavras o último sinal será 0 e a penúltimo sinal será substituido pelo seguinte na ordem alfabética; se é um 2 será substituido por um 0 e a outra penúltima sinal será substituido pelo seguinte na ordem alfabética, etc...

Vemos que a ordem só intervém aqui, numa palavra os sinais de uma fila não são afetados de nenhum pêso.

IV.III.7 - 2 - Denominação oral, correspondência com a denominação escrita.

É preciso poder pronunciar as palavras que escrevemos:

- cada uma da s letras de nosso alfabeto pode-se pronunciar: zero, um, dois, três,...nove mas, observamos em seguida que em nenhuma palavra da lista nós jamais pronunciamos "zero".
- 51 324 se pronuncia cinquenta e um mil, trezentos e vinte e quatro; nós vemos chegar as palavras cinquenta, mil, cem, vint

não faziam parte de nosso alfabeto escrito.Nós deixamos aos nossos leitores o cuidado de procurar qual é o alfabeto son nero (de 25 sinais) que permite, em frances, pronunciar todos os números.

IV.III.7 - 3 - Experiência feita com as crianças

Nós fizemos as crianças fazerem um "dicionário de números" qu permitisse saber ler e escrever todos os números até 100; na página de gu guarda escrevemos os algarismos na ordem habitual. Na página 1 a mesma li ta mas as palavras escritas têm dois sinais, o primeiro é sempre 1, escre ve-se então, um 1 antes de cada sinal da lista, na página 2 a mesma coisa nas todas as palavras começam por 2, etc.. até a página 9.

Nós sabemos então, escrever todos os números; sabemos também ordená-los porque a página 3, por exemplo, está antes da página 7, e na p' gina 3 o 32 está escrito antes do 35.

É preciso agora, pronunciá-las: as palavras da página de gua da e da página 1 devem ser tôdas aprendidas assim como o nome das páginas: página 2 ou página dos vinte, página 4 ou página dos quarenta.

Pode-se continuar até mil; o livro que acabamos de fazer seri o fascículo 0,o fascículo 1 comporta unicamente palavras de três algarism mos, começando todos por 1, o fascículo 5 palavras de três algarismos, co meça ndo todos por 5, etc...

Nós nos limitamos ao fascículo 1, os resultados têm sido espe taculares: nas duas classes onde fizemos esta experiência, em duas sessõe de três quartos de hora, as crianças sabiam escrever e ler (excepto as pá ginas 7 e 9 - por dificuldades da língua francesa nos nomes dessas deze - nas) todos os números até 89 e sabiam dizer de dois números qual era an - tes do outro.

Nas outras classes esquecemos de assinalar que não era precis so falar de dezenas e de unidades, o que foi feito automáticamente por re ferência ao passado. A experiência perdeu todo o sentido.

É preciso dizer que para as crianças com as quais nós fizemos a experiência, se elas sabiam escrever, ler e ordenar os números, ao con‡ trário nã o tinham nenhuma idéia da significação do 2 e do 7 no 27, por e xemplo, Elas tinham apesar disso, a satisfação de saber ler 84, 38 nos ô- nibus e o número de sua cas, de escrever seu número de telefone; seus pais e suas professôras estavam satisfeitos de constatar que suas crianças ti- nha m sabido ler tão ràpidamente os números de dois algarismos.

Do ponto de vista da formação matemática, penso que teria si- do melhor ter feito isto após ter experimentado a numeração como utiliza ção da potência mas sendo que vivemos numa civilização onde se utiliza a base 10, talvez não tenha sido tão mau ter feito antes, salientando que e ra um exercício de vocabulário; de fato, não é porque as crianças sabem l ler e escrever 45 e 27 que elas são capazes de fazer adições com êsses nú meros. Deixo a questão em suspenso, os professores julgarão por si. De mi nha parte,apesa r de minhas idéias a priori sôbre o assunto, creio que êste ano farei ainda o "dicionário de números" antes da numeração de posi- çã o.

IV.III.7 - 4 - A numeração como instrumento de cálculo.

Quando dizemos que vamos recolher 1965 cédulas de voto, isto significa que vamos recolher

1,9,6,5 $\quad 1.10^3 + 9.10^2 + 6.10^1 + 5.10^0$

estão cada um afetados de um pêso segundo sua fila conta 0,1,2,3 da direita para a esquerda.

Assim, na base 3: $1221 = 1,3^3 + 2.3^2 + 2.3^1 + 1.3^0$

na base 10: $1221 = 1.10^3 + 2.10^2 + 2.10^1 + 1.10^0$

na base x : $abcd = a.x^3 + b.x^2 + c.x^1 + d.x^0$

~~na base x~~ na base x é necessário um alfabeto de x sianis diferentes.

Se desejamos aplicar o princípio da variabilidade da noção de numeração é necessário fazer variar x. Esta variação de x permite compree- der que um pêso está associado a fileira de um algarismo no número.

De masi, se utilizamos bases pequenas partindo de conjuntos con tendo um número fàcilmente manipulável de objetos, nós teremos ocasião de es escrever números comportando grande número de algarismos.

Assim, o número que se escreve 83 na base 10 se escreve 1002 na