INSTITUTO DE EDUCAÇÃO "GENERAL FLORES DA CUNHA"

LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA

DIENES, Z.P. Trad. A.B.Krebs

RELATIONS

Comentários das fichas de trabalho

Capítulo I

1. Introdução geral

Os fundamentos da matemática se encontram no próprio mundo; no mundo dos objetos e na maneira pela qual percebemos êsse mundo. Quando nos colocamos em contacto com o mundo, nos apercebemos de que há trocas que se efetuam; essas mudanças são os acontecimentos. Os acontecimentos são trocas de posição ou da qualidade dos objetos, ai compreendidas, incluidas as pessoas que observamos ao nosso redor. É por causa destas trocas que formamos idéia de tempo; não haveria tempo se não houvesse trocas; não haveria espaço se não houvesse objetos. Para nos orientarmos nêste mundo, classificamos os objetos dêsse mundo e classificamos, igualmente, os acontecimentos. Classificando os objetos e os acontecimentos, consideramos já êsses objetos e êsses acontecimentos em relação entre êles. Quando dizemos que tal ou tal objeto é semelhante a um outro, falamos de uma relação entre este objeto e um outro; esta relação é uma relação de semelhança. Podemos, igualmente, falar de uma relação de diferença: tal ou tal objeto não é parecido com outro. As classificações dos objetos que fazemos nos ajudam nas previsões que devemos fazer para nos orientar no mundo. Para sobreviver, devemos saber, com uma muito grande probabilidade, o que acontecerá. Para nos orientarmos, numa cidade complexa, é preciso conhecer as leis de transito e ter muitos outros conhecimentos essenciais.

Nossa capacidade para classificação de acontecimentos e de objetos durante nossa evolução foi, certamente, um fator muito importante. Os sêres que não puderam ensinar classificações apropriadas a seus circundantes não puderam sobreviver, e por consequencia jamais tiveram descendentes. Por seleção natural, a capacidade de aprender a fazer classificações apropriadas, certamente, aumentou, culminando, hoje, nos conhecimentos de matemática.

A criança aprende a relacionar objetos a outros objetos, acontecimentos a outros acontecimentos classificando-os. Quando ela chega à escola, o dever do professor é ajudá-la em seus processos de classificação para prepará-la para as idéias matemáticas que ela deverá aprender mais tarde. Um caso especial de classificação é a classificação em classes disjuntas, isto é, de classes que não têm elemento comum. Quando consideramos uma relação de semelhança que produz uma partição de todos os objetos que consideramos em classes disjuntas, isto é, em classes sem elementos comuns, dizemos que utiliza mos uma relação de equivalência, e dizemos que os elementos que estão numa mesma classe são equivalentes uns aos outros. Igualmente, dois elementos, estando um numa classe e o outro em outra classe não tendo elemento comum com o primeiro, denominam-se diferentes, Segundo esta definição, se tomamos uma relação de equivalência, isto é, uma relação que realiza uma partição no conjunto de todos os objetos considerados em classes disjuntas e se tomamos um objeto qualquer, êle será de uma dessas classes. Se tomamos qualquer outro objeto, ou êste outro objeto pertence à mesma classe de nosso primeiro objeto, ou a uma outra, mas, jamais, às duas classes ao mesmo tempo. No primeiro caso diremos que nossos dois objetos são equivalentes, no outro, que nossos dois objetos são diferentes. As relações que resultam de classificações semelhantes (por semelhança) são relações de equivalência. Os objetos que pertencem à mesma classe são equivalentes. A relação complementar de uma relação de equivalência é a relação de / diferença. Por exemplo, tomemos o conjunto dos blocos lógicos e a relação "ter a mesma côr". Se escolhemos dois blocos, os dois blocos ou bem são da mesma côr, ou de côres diferentes. No primeiro caso, os / blocos são equivalentes, no outro caso eles são diferentes. Evidentemente, poderíamos tomar uma outra relação de equivalência, por exemplo, "ter a mesma forma". Dois blocos ou são da mesma forma ou não / são da mesma forma. Todos os blocos da mesma forma serão da mesma / classe de equivalência que resulta da aplicação da relação "ter a / mesma forma". Então, sendo dados dois blocos quaisquer, eles ou são da mesma forma ou eles não são da mesma forma. No primeiro caso, eles são equivalentes; no segundo caso, eles são diferentes. Vimos que a equivalência de dois blocos depende da relação de equivalência que se considere. Dois blocos bem podem ter a mesma côr sem ter a mesma forma, ou ter a mesma forma sem ter a mesma côr. No primeiro caso êles serão equivalentes para a relação de equivalência "ter a mesma côr", mas não para a relação de equivalência "ter a mesma forma". No segundo caso, eles serão equivalentes para a relação de equivalência "ter a mesma forma", mas não para a relação de equivalência "ter a mesma côr".

É importante notar que nem todo atributo se adapta à formação de uma relação de equivalência. Há atributos que não conveem, não satisfazem para a formação de conjuntos. Por exemplo, se tomamos o / conjunto das crianças da classe e se procuramos formar o conjunto de todos os grandes, não sabemos, exatamente, quais as crianças que são grandes e quais as crianças que são pequenas. Reconheceremos os maiores e quais são os menores, mas não saberemos, exatamente, em que ponto é preciso separá-los em grandes e pequenos, então, o atributo "ser grande" não se adapta à formação de um conjunto. Por esta razão, "ter a mesma altura" não será um atributo apropriado para a formação de uma ~~xxxxxxxx~~ relação de equivalência. Mesmo se experimentamos utilizar a mesma altura" não será um atributo apropriado a formar uma relação de equivalência. Mesmo se experimentamos utilizar as côres do vestuário das crianças, igualmente, teremos dificuldades. Mesmo se o atributo "vestir ou não vestir vermelho", por exemplo, está bem determinado, em geral, será até mesmo impossível formar classes de equivalência a partir dessas propriedades. Esta dificuldade resulta do fato que, por exemplo, as crianças vestidas de vermelho não formam uma classe disjunta das crianças vestidas de azul, porque pode acontecer que tenha crianças vestidas de vermelho com azul. No caso dos blocos lógicos, "ter a mesma côr" nos dá classes disjuntas porque cada bloco é só de uma côr; não há bloco que seja, ao mesmo tempo colorido de várias côres, mas, em geral, as crianças usam roupas de côres diversas. Então, para resumir, é preciso levar em consideração os seguintes pontos importantes:

1. Antes de falar de relações é preciso determinar os seres, os objetos que vamos relacionar (ligar) por meio das relações. Isto quer dizer que é preciso um determinado (particular) conjunto que nós chamaremos um Conjunto universal (universo) cujos elementos serão, então, relacionados pelas relações consideradas.

2. Sendo dado o conjunto universo que escolhemos para o momento, para construir os subconjuntos, é preciso considerar os atributos que estão determinados. Isto quer dizer que, sendo dado um atributo, êle está determinado se um elemento qualquer de nosso conjunto universo possui ou não possui êste atributo. Se êste não é o caso, o atributo em questão não está suficientemente determinado para o conjunto considerado para formar subconjuntos.

3. Para formar uma relação de equivalência, é preciso que na definição desta equivalência utilizemos atributos de modo que as classes formadas por êsses atributos sejam disjuntas. Uma relação de equivalência será, em geral, da forma "ter a mesma....." ou "ser da mesma....".

Naturalmente, as relações de equivalência e de diferença não são as únicas. É preciso considerar, por exemplo, as relações de ordem. Isto quer dizer que consideramos os elementos de nosso conjunto universo ordenados de um certo modo. Podemos considerar as ordens estritas e ordens não estritas. Numa ordem estrita, sendo dados dois elementos quaisquer, deve ser determinado se um dêles precede o outro. Numa ordem não-estrita, não é possível fazer uma tal disposição. Por exemplo, podemos enfileirar as crianças da classe antes de deixá-los sair da escola, então, haverá uma primeira criança que sai da classe, haverá um segundo, um terceiro, e assim por diante. Sendo dados duas crianças quaisquer, será determinado qual saiu antes da outra. Podemos considerar as lições que se desenrolam durante o dia na escola, na mesma classe. Entre duas lições quaisquer, há sempre uma relação de ordem determinada pelo tempo. A ordem, entretanto, pode ser determinada pelo tempo, por uma distribuição espacial ou por qualquer outro critério que quisermos utilizar; por exemplo, os nomes das crianças podem ser colocados em uma lista alfabética; isto quer dizer que a ordem alfabética determina a ordem das crianças da classe. Se há duas crianças cujo nome tem a mesma inicial, então se decide que será a segunda letra que determina a ordem e assim por diante. É dêste modo q ue se define a odem alfabética. É preciso sublinhar que entre a ordem simples, por exemplo, determinada pelo tempo ou por uma certa distribuição no espaço e a ordem alfabética, há uma diferença essencial, isto é, nas primeiras há, apenas um critério q ue é preciso aplicar para saber qual elemento vem antes de outro elemento. Na ordem alfabética há vários critérios a considerar. É preciso de início observar a primeira letra. Se a primeira letra de uma das palavras é diferente da inicial da outra, então, o critério funciona; podemos decidir. Se, ao contrário, as duas iniciais são idênticas, então, é preciso olhar a segunda letra. Se a segunda letra de um dos nomes é idêntica à segunda do outro, então, é preciso passar à terceira letra e, assim por diante Os critérios da primeira, da segunda e da terceira letras são <u>superpostos</u>. O mesmo acontece para a decisão se um ou outro de dois números expressos em símbolos é maior ou menor. O primeiro critério é o número de símbolos; se um dos dois números está expresso por meio de mais símbolos (chiffres) que o outro, então o número expresso por mais símbolos é o maior. Se êste é o caso, não é necessàrio olhar o valor dos símbolos. Se os dois números são expressos pelo mesmo número de algarismos (chiffres), então, é preciso olhar os valores do primeiro algarismo. Entretanto, esta não é a mesma situação encontrada na ordem alfabética. As crianças tem muita dificuldade em se utilizar de dicionários, / porque, para a maioria não fez exercícios suficientes na utilização de <u>critérios superpostos</u>. Nas fichas sôbre relações de ordem, há vários exercícios de critérios superpostos que servem para ordenar conjuntos. Evidentemente, os professôres poderão inventar, outras situações. As fichas preparadas nestas séries servem sòmente, de modêlo. Haverá crianças que terão necessidade de muito mais prática antes de poder manipular com facilidade as idéias de equivalência, de diferença e de ordem.

É preciso salientar que as fichas sôbre os objetos e sôbre conjuntos não são entregues imediatamente às crianças. A criança em seu primeiro ano de escolaridade, não será capaz de ler as fichas. A matéria de matemática está estruturada nestas séries de fichas para que o pedagogo possa obter uma visão de conjunto da fútura aprendizagem. Os ensinamentos deverão ser transmitidos verbalmente às crianças pelo pedagogo ou por outras crianças que já realizaram os jogos em questão. As séries de fichas podem ser utilizadas mais tarde, por exemplo, no terceiro ano, como um método de revisão è de contrôle. Assim, o professor pode se assegurar de que não resta lacuna no conhecimento da criança que a impedirá de compreender o que segue (a sequência), por exemplo, a delicada pas sagem das relações aos números.

CAPÍTULO II

2. FICHAS DE TRABALHO - OBJETOS

Nesta primeira série, há três gêneros de fichas de trabalho:

as equivalências de objetos (entre)

as diferenças de objetos (entre)

as ordens entre os objetos.

2.1 Equivalência - Objeto.

(Fichas 1 e 2) Nestas duas fichas, a criança aprende a distinção entre um atributo determinado e um atributo não-determinado. Um atributo aplicado a um conjunto define (determina) um subconjunto dêste conjunto, e, ao mesmo tempo, seu complemento. O atributo está determinado quando é sempre possível enunciá-lo, se um elemento qualquer do conjunto possui ou nao possui êste atributo. Os grandes e os pequenos não são atributos determinados. Os mais velhos e os mais moços, os mais pesados e os menos pesados não são atributos determinados. No problema 2 da ficha 2, a sugestão feita é de separar as crianças conforme sua idade determinada por seu último aniversário. Então, por exemplo, as crianças de seis anos e as crianças de sete anos serão separadas umas das outras. Na questão 5, a criança é encorajada a resolver o problema separando as crianças por seu pêso, mas não apenas dizendo "mais pesado, ou "menos pesado". Para resolver é preciso ter meios para "medir" o pêso das crianças na classe.

Fichas 3, 4 e 5) Na ficha 3, introduzimos a idéia de um "club". O club é utilizado como palavra infantil para <u>classe de equivalência</u>. Há uma menina de oito anos e um menino de oito anos no club. Isto quer dizer que as crianças de oito anos podem pertencer a êste club. As meninas e os meninos podem, igualmente, pertencer ao club porque já há uma menina e um menino no club, então, haverá um club para as crianças de oito anos, haverá um outro club para as crianças de sete anos, um para as de seis e assim por diante.

Na ficha 4, vemos que, no club só há meninas de oito anos, então, outras meninas de oito anos podem pertencer ao club, mas os meninos de oito anos formarão um outro club. Aqui a relação de equivalência considerada é "ter a mesma idade". Haverá clubs para as meninas de oito anos, para as meninas de sete anos, para os meninos de oito e para os meninos de sete anos. Haverá mais, se houver crianças de de seis anos ou de nove anos. A expressão "pertencer ao conjunto" é utilizada em lugar do têrmo tecnico "relação de equivalência". Na ficha 5, o club é definido por dois meninos de sete anos, então, outros meninos de sete anos pertencem ao club, mas as meninas de sete anos não podem pertencer ao club. Utilise nêsta ficha a mesma relação de equivalência q ue se utilizou na ficha 4, isto é, "ter a mesma idade e o mesmo sexo".

(Fichas 6, 7, 8 e 9) Nestas fichas, utilizam-se os blocos lógicos. Estes são exercícios específicos (détaillés) para habituar as crianças à passagem de uma relação de equivalência às classes de eq uivalências correspondentes partindo de uma relação de equivalência q ue elas,mesmas podem determinar a partir de uma semelhança entre dois ou três blocos. Por exemplo, se tomamos os blocos q q ue são ao mesmo tempo grandes e ~~pequenos~~ vermelhos, então, pode-se colocar outros blocos q ue são ao mesmo tempo grandes e vermelhos, e êste será o primeiro club. É preciso, agora, passar a uma constatação de um modo mais abstrato porq ue é preciso que as crianças ~~//~~ percebam que os elementos de seu club são todos do mesmo tamanho e da mesma côr.É sòmente, a partir desta realização q ue elas poderão construir os outros clubs, isto é, as outras classes de equivalência que resultam da aplicação da relação de,eq uivalência da qual o primeiro club era a primeira classe de equivalência.

A passagem dos grandes vermelhos, por exemplo, aos pequenos amarelos ou aos grandes azuis, etc..., se faz a través da idéia mais abstrata de " ser do mesmo tamanho e da mesma côr ao mesmo tempo". Os blocos, no mesmo arco, pertencem ao mesmo club porque êles são do mesmo tamanho e da mesma c"or.

Na ficha 7, começamos com os triângulos grandes; aqui é preciso descobrir q ue se colocamos todos os triângulos grandes juntos, todos os blocos dêste club são da mesmo tamanho e da mesma forma. A seguir, é preciso construir os outros clubs cujos elementos são, também, do mesmo tamanho e da mesma forma. Nas fichas 6 e 7, vamos utilizar dois atributos, ao mesmo tempo, para definir nossas relações de equivalência; na ficha 8, utilizamos três atributos ao mesmo tempo. O primeiro club está constituido de todos os pequenos triângulos espêssos, então, a relação de equivalência considerada é "ter o mesmo tamanho, a mesma forma e a mesma espessura, ao mesmo tempo".A criança deve construir todos os dezesseis clubs q ue são possíveis.

Na ficha 9, a questão é tratada de um modo um pouco mais sistemático, Pode-se fazer a partição do conjunto dos blocos lógicos em clubs partindo de qualquer combinação de atributos para definir uma equivalência. Por exemplo, " mesma forma, mesma côr", "mesma fôrma, mesmo tamanho", simplesmente "mesma espessura" ,"mesma forma" ,"mesma côr","mesmo tamanho", e assim por diante. Cada vez se obtém um determinado conjunto de clubs.

(Ficha 10) Aqui, é introduzido um outro conjunto universo, o das casas construidas de diferentes maneiras. Por exemplo, variamos o número de chaminés, u número de janelas e a côr das casas.Cada quarteirão da cidade deve ser construido de modo que as casas do mesmo quarteirão sejam sempre semelhantes, isto é, pertençam à mesma classe de equivalência. Isto quer dizer que os atributos, isto é o número de chaminés, o número de janelas e a côr da casa devem ser idênticos no mesmo quarteirão. Podemos construir dezoito quarteirões; pode-se colocar um número arbitrário de casas em cada quarteirão; por exemplo, no quarteirão A, há dois (na ficha), no quarteirão B, há três, mas pode-se ainda fazer muito mais se quisermos. Podemos, igualmente, construir outras classes de equivalência na mesma cidade. Por exemplo, todas as casas da mesma côr, ou todas as casas que têm o mesmo número de janelas, ou todas as casas que têm o mesmo número de chaminés e que são igualmente da mesma côr, e assim por diante. Podemos jogar os mesmos jogos de equivalência com o conjunto de casas, tanto como com o conjunto de blocos. Seria uma boa idéia recortar as casas em cartão vermelho, azul e amarelo. As crianças poderiam desenhar as janelas ou, melhor, recortá-las para que pudessem jogar de modo mais concreto como elas j jogaram com os blocos lógicos.

(Ficha 11) Aqui, se introduz a terminologia matemática. Se acreditamos que as crianças não estão ~~(prontas)~~ preparadas para aceitar uma tal terminologia, podemos omitir esta ficha.

(Ficha 12) Esta ficha, evidentemente, se faz com os blocos lógicos, e pode-se construir um jôgo de cartas como está sugerido na ficha, de modo que a cada carta corresponda uma partição, do conjunto dos blocos lógicos, em classe de equivalência. Há mesmo, uma tabela a fazer, onde para cada relação de equivalência, corresponderá um número de clubs que podemos formar e o número de membros em cada club. Na questão 3, pedimos às crianças para generalizarem o problema num conjunto universo cujos elementos são as próprias crianças da classe. Por exemplo, pode-se tomar menino e menina para substituir espêsso e fino e, talvez, ter seis anos, sete anos e oito anos, para substituir as cores, ou ainda morar num quarteirão ou numa outra cidade para substituir as formas, etc... Acontece que há conjuntos vazios, isto é, que não haverá, talvez, nenhuma menina de sete anos que more em um determinado quarteirão da cidade, enquanto que o conjunto universo dos blocos lógicos está construido de modo que todas as combinações possíveis dos atributos pertinentes sejam realizáveis nesse conjunto universo. Na vida, evidentemente, não é assim e é preciso que as crianças encontrem situações menos sistemáticas. Mas, depois de ter trabalhado com os blocos lógicos, elas se dão conta dos "buracos" que há nos universos não sistemáticos e, por consequência, as razões, pelas quais tais universos são menos sistemáticos queo o dos blocos lógicos.

2.2 DIFERENÇA-OBJETO

(Ficha 1) Aqui, encorajamos a criança na descoberta das diferenças particulares entre dois blocos quaisquer. Na questão 1, o par de blocos A está constituido por dois blocos que só têm uma diferença, no B temos um exemplo de três diferenças, no C temos duas diferenças e no D quatro diferenças. Na série de pares, na questão 2A, há sempre uma diferença. Fazer outros pares sôbre o mesmo modêlo quer dizer encontrar outros pares com uma diferença entre os elementos do par. No 2B, temos uma série de pares onde há sempre duas diferenças entre os elementos de cada par. O problema é de continuar a série, isto é, de dar outros pares onde os elementos do par têm duas diferenças entre êles. A questão 2C coloca o problema de generalizar as séries, isto é, de dar séries de pares de três diferenças e, depois de séires de pares de quatro diferenças.

(Fichas 2) Aqui, para simplificar o problema, tomam-se só vinte e quatro blocos. Veremos que há vinte e quatro espaços, um espaço para cada bloco. As letras descritas nos caminhos que ligam os espaços indicam as relações de diferença que é preciso realizar entre os blocos que ocuparão êsses espaços. Não é necessário começar pelo meio; pode-se colocar um bloco, não importa onde mas, ao lado é preciso colocar um outro bloco que seja diferente do bloco já colocado, conforme a letra que está escrita no "caminho". De início, seria talvez, prudente limitarmos a uma interpretação das letras como "ao menos uma tal diferença". Isto quer dizer que se há um F entre um e outro bloco, é preciso que êstes dois blocos sejam de forma diferente, mas êles podem ser também de uma côr diferente ou de espessura diferente se quisermos. Então, as letras simbolisam uma diferença minina que é preciso fazer. Evidentemente, se agimos desta maneira, muitas vezes será difícil de preencher todos os espaços no jôgo; mas, podemos dizer às crianças que isto não tem importância ou podemos dizer-lhes que se / pode retirar os blocos dos espaços já ocupados, e os substituir por outros blocos. Eventualmente, as crianças poderão interpretar as letras como indicando determinadas diferenças, isto é, a letra F indicará uma diferença de forma, e sòmente de forma; a letra C indicará uma diferença de côr, mas sòmente de côr. Com esta interpretação será fácil preencher todos os espaços.

(Ficha 3) Êste jôgo utiliza sòmente oito blocos. É preciso escolher duas côres quaisquer e duas formas quaisquer, e depois duas espessuras. Utilizam-se só os blocos pequenos; por exemplo, se tomamos os quadrados e os círculos, os vermelhos e os azuis, os espessos e os finos, teremos oito blocos. O primeiro bloco é colocado no espaço indicado e, esta será a primeira fileira. Na segunda fileira, é preciso colocar um bloco em cada espaço. Cada um dêsses blocos deve ter uma só diferença do bloco que foi colocado na primeira fileira. Na terceira fileira é preciso colocar os blocos de modo que e cada "caminho marcado com o algarismo 1 estabeleça uma relação de diferença de um só atributo entre os blocos que são ligados por estes caminhos. Isto quer dizer que na terceira fileira colocaremos blocos que terão duas diferenças do primeiro bloco que colocamos na primeira fileira. O último bloco será colocado na quarta fileira. Assinalaremos que entre

entre os blocos da segunda fileira, como também entre os blocos da terceira fileira há sempre duas diferenças, isto é, ou côr e espessura ou forma e espessura.

(Ficha 4) O trabalho nesta ficha é uma generalização do trabalho da ficha precedente mas, a apresentação é ligeiramente diferente. Antes de começar o jôgo, é preciso escolher duas côres e duas formas. Com as duas espessuras e os dois tamanhos possíveis, teremos escolhido um conjunto de dezeseis blocos. Na primeira fileira colocamos um bloco qualquer. Na fileira A, que é a segunda fileira, colocaremos os blocos que têm uma diferença do primeiro bloco e, depois, na fileira B colocaremos os blocos que têm duas diferenças do primeiro bloco; isto quer dizer que haverá relações de uma diferença entre os blocos da fileira B e os da fileira A. Podemos pedir para as crianças desenharem "caminhos" entre os blocos que têm uma diferença entre êles. Igualmente, na fileira C, colocaremos todos os blocos que têm três diferenças do bloco que foi colocado em primeiro lugar. Examine-se ainda uma vez a questão das diferenças entre os blocos que são colocados na mesma fileira. Veremos que na ~~xxgião~~ fileira A e na fileira C, só haverá relações de duas diferenças, enquanto que na fileira B haverá relações de duas diferenças assim como relações de quatro diferenças; jamais haverá relações de uma diferença ou de três diferenças entre os blocos da mesma filaira.

(Ficha 5) Aqui, se introduz o jôgo de "dominó". É um jôgo de duas diferenças que se joga por fileira e por coluna. Tomam-se doze blocos, ou os grandes espessos ou os pequenos delgados, ou os grandes delgados, ou os pequenos espêssos; os blocos devem ser enfileirados de modo que jamais tenha dois blocos vizinhos da mesma forma nem da mesma côr. Pode-se variar as regras exigindo duas diferenças por fileira e uma diferença por coluna. Podemos aumentar as diferenças e exigir três diferenças se tomamos outros blocos. Com os doze blocos escolhidos, só podemos fazer duas diferenças porque variamos dois atributos sòmente, isto é, a forma e a côr.

(Ficha 6) Esta ficha é muito difícil. Se as crianças não são capazes de fazê-la, é preciso passar às fichas seguintes. É preciso fazer três diferenças por fileira e, também, por coluna, isto é, dois blocos quaisquer que são vizinhos devem sempre ter três diferenças e, dois blocos colocados em diagonal e ligados pelas flechas indicadas no diagrama devem ter sòmente uma diferença de forma; por consequência, êles devem ser da mesma côr e da mesma espessura. Sòmente é possível resolver êste problema colocando só duas formas diferentes por filaira.

2.3 ORDEM - OBJETO

(Fichas 1 e 2) Nestas duas fichas, a criança aprende a ordenar os elementos de um ~~se~~ conjunto segundo um critério. Pode resultar que o critério não funcione muito bem; por exemplo, na ficha 2, a questão de conhecer qualquer um melhor ou menos bem nem sempre é fácil de por em regra. Pode-se conhecer ~~alguém~~ uma tão bem quanto outra pessoa. Neste momento, estas duas pessoas permanecem na mesma fila, no mesmo nível, na escala de conhecidos ou de amigos. Na maior parte de nosso trabalho, no que concerne ao estudo das ordens, nós vamos considerar ordens estritas, isto é, ordens onde sendo dados dois elementos quaisquer do conjunto ordenado, pode-se decidir qual dos dois elementos vem antes do outro. Por exemplo, na questão 2 da ficha 2, ordenamos doze blocos lógicos, isto é, os doze blocos grandes espêssos. Aqui, introduzimos a criança na idéia de dois critérios superpostos dos quais já falamos na introdução. O critério / mais importante aqui é a côr. Se dois blocos são de côres diferentes já sabemos qual bloco vem antes do outro. Se dois blocos são da mesma ma côr, é a forma que decide qual dos dois blocos vem antes.

A resposta para a questão 2A é evidentemente afirmativa, porque todos os azuis vêm antes de todos os amarelos, e não há azuis que venham antes dos vermelhos porque todos os azuis vêm depois de todos os vermelhos. Esta é a questão 2B. Na questão 2C, evidentemente, há quadrados que vêm antes de triângulos porque o quadrado vermelho, evidentemente, vem antes do triângulo azul e também antes do triângulo amarelo. Como funcionou o critério mais importante, o da / côr, o critério menos importante, o da forma não funciona. Então, há quadrados antes de triângulos e, igualmente, triângulos antes / de quadrados. Não é verdade que todos os triângulos vêm antes de todos os quadrados, nem que todos os quadrados vêm antes de todos os triângulos. Haverá outras respostas a estas mesmas questões se ordenarmos o conjunto de blocos de modo diferente. Na organização da questão 3, tomamos o critério das formas como mais importante que o das côres. Tomamos todos os círculos antes e, depois, tomamos todos os / retângulos, depois todos os triângulos, e finalmente todos os quadrados. Então, para saber, neste método de ordenar o conjunto, qual bloco vem antes do outro, é preciso, primeiro, olhar sua forma. Se os de dois blocos são de forma diferente então, podemos decidir logo a questão. Se os dois blocos são da mesma forma, então, é preciso olhar a côr para escolher qual bloco vem antes do outro. Esta espécie de trabalho prepara a criança para a consideração de critérios superpostos que ela vai encontrar durante seu estudo de número e de palavras.

(Ficha 3) Aqui, retoma-se a questão de ordens onde vários elementos podem ficar na mesma classe. Por exemplo, sugere-se que uma casa com duas chaminés é sempre melhor do que uma casa com uma só chaminé, não há outra razão para preferir uma casa a outra. Neste momento, teremos todas as casas de duas chaminés na mesma classe, e todas as casas de uma chaminé em outra classe. Então, haverá somente duas classes nesta ordem e esta ordem não será uma ordem estrita. Podemos superpor aos critérios das chaminés um outro critério, por exemplo, o das janelas. Poderemos dizer que três janelas, é melhor do que duas, e que duas janelas é melhor do que uma. Então, há assim mesmo (quand même) três casas na mesma classe porque há três casas com o mesmo número de chaminês e com o mesmo número de janelas. Isto quer dizer que para tornar a ordem estrita é preciso um terceiro critério, o das côres. Na questão 2, é sugerida uma certa ordem. Está claro que tomamos o número de janelas como primeiro critério porque todas as casas com três janelas vêm antes de todas as casas com duas janelas, e estas vêm antes de todas as casas com uma só janela. Se quisermos escolher qual de duas casas de três janelas vem antes de uma outra, então olhamos as chaminés porque na ordem dada todas as casas de duas chaminés, com o mesmo número de janelas vêm antes de todas as casas de uma chaminé com o mesmo número de janelas e, depois, finalmente o terceiro critério, o da côr. Sendo dado o número de chaminés e o número de janelas é a côr que decide qual vem antes da outra. Evidentemente, poderemos agrupar as casas em muitas outras ordens. Pode-se variar a ordem dos critérios e, igualmente, no interior dos critérios, podemos variar o ordem dos objetos; por e exemplo, com a mesma ordem de critérios, isto é, o primeiro critério "janelas", o segundo critério "chaminés" e o terceiro critério "côr", pode-se assim mesmo variar a ordem. Por exemplo, podemos decidir que uma casa de uma chaminé é melhor do qu que uma casa de duas chaminés ou ainda que os azuis são melhores do que os vermelhos, e assim por diante sempre guardando a ordem dos critérios.

(Ficha 4) Aqui, toma-se um subconjunto de dezoito blocos cuja estrutura é idêntica à estrutura do conjunto de casas que estudamos na ficha 3; as duas estruturas são idênticas porque há três côres, três formas e duas espessuras. A distinção entre casa de uma chaminé e casa de duas chaminés é agora substituida pela diferenciação entre os blocos espêssos e os blocos delgados. As três côres dos blocos poderiam corresponder às três côres das casas, as três formas correspondendo aos três tipod de casas, isto é, uma forma corresponde às casas de três janelas, uma outra às casas de duas janelas, e a terceira forma às casas de uma janela. Na questão 3 desta ficha a criança pode descobrir que o que ela fez é muito semelhante ao que ela fez na ficha precedente. Ela poderá fazer uma correspondência entre o conjunto das casas e o conjunto dos blocos escolhidos para êste jôgo; é o que é pedido na / questão 4.

(Ficha 5) Se apresentamos às crianças três árvores cuja estrutura é ligeiramente diferente umas das outras, vemos que em primeiro lugar tomam-se três valores para o p primeiro critério, por exemplo, vermelho, azul, amarelo; três valores para o segundo critério, por exemplo, círculo, triângulo, quadrado; e dois valores para o terceiro critério, por exemplo, espêsso e fino. Em segundo lugar, tomam-se três valores para o primeiro critério, dois valores para o segundo critério e três valores para o terçeiro critério. Em terceiro lugar começamos com um critério de dois valores, continuando, um segundo critério terá três valores, e o terceiro critério terá três valores também. A determinação é de colocar os dezoito blocos nas extremidades dos ramos de duas maneiras apropriadas de cada vez; isto é sempre possível p porque os três valores de cada variável podem ser representados pelas três formas, ou pelas três côres. Por exemplo, a primeira árvore poderia ser interpretada como segue:

primeiro critério - côr
segundo critério - forma
terceiro critério - espessura

ou então,

primeiro critério - forma
segundo critério - côr
terceiro critério - espessura.

A segunda árvore pode ser igualmente interpretada de modo semelhante; O primeiro critério será ou o da forma, ou o da côr; o segundo será o da espessura; o terceiro, evidentemente, será o da côr se o primeiro era o da forma, e será o da forma se o primeiro era o da côr. Em terceiro lugar o primeiro critério será sempre a espessura, isto quer dizer que haverá finos à esquerda e espêssos à direita, ou inversamente. Montando, organizando, toma-se como segundo critério ou o da forma, ou o da côr; para terceiro critério toma-se a côr se tomamos a forma antes, e tomamos a forma se tomamos a côr antes.

(Ficha 6) Nesta ficha, o problema apresentado é ordenar seis crianças seguindo dois critérios superpostos. A árvore é indicada de dois modos; a árvore superior que está ao contrário indica a ordem cujo primeiro critério é o da idade, e o segundo o do sexo; a árvore inferior pede (demande) um método de ordenar o conjunto colocando o critério do sexo primeiro e o critério da idade em segundo; isto quer dizer que se ordenamos as crianças seguindo a primeira organização da árvore, esta disposição não será adaptada ao segundo arranjo (arrangement), isto é depois de ter resolvido o problema sôbre a árvore superior, é preciso transformar a ordem para resolver o problema referente à árvore inferior. Para a árvore superior teremos menino-menina, menino-menina, menino-menina e, por exemplo, oito anos-oito anos, sete-anos-sete anos, seis anos-seis anos, enquanto para a árvore inferior poderemos ter, por exemplo, menina-menina-menina, menino-menino-menino; depois as idades serão repartidas como, por exemplo, oito-sete-seis, oito-sete-seis. O segundo problema é o mesmo que o primeiro mas, com seis elementos dos blocos lógicos. Se quisermos poderemos pedir para as crianças fazerem a correspondencia exata entre o conjunto de crianças e o conjunto de blocos. Vermelho e azul corresponderão à menino e menina, ou menina e menino e as três formas corresponderão às três idades.

(Ficha 7) Aqui, o problema da ficha presedente é generalizado. Temos um conjunto universal cuja estrutura é idêntica à dos blocos lógicos das fichas 4 e 5. A distinção entre menino e menina nos permitirá seguir a árvore dada colocando-os como menino-menina, menino-menina, menino-menina e, assim por diante. Há também três idades e três tamanhos. Há crianças grandes, crianças médias e crianças pequenas; mas, as pequenas podem ter oito anos e entre as grandes, certamente, não tem de seis anos. O primeiro critério que corresponde aos três ramos que partem do tronco da árvore poderá ser o da idade, isto é, os três primeiros ramos poderão corresponder às idades de seis anos, sete anos e oito anos ou aos pequenos, médios e grandes como se decidir. O segundo critério será o da idade se tomarmos o do tamanho em primeiro lugar e, será o do tamanho se tomarmos o da idade primeiro. Forçosamente, o terceiro critério deverá ser o do sexo porque há dois ramos nas extremidades da árvore e há dois sexos. Para identificar a estrutura comum dos dois conjuntos, isto é o conjunto das crianças e o conjunto das extremidades da árvore, é preciso que seus elementos se correspondam dêste modo. Como a estrutura dêste conjunto é idêntica à do conjunto de casas da ficha 3, podemos decidir que cada criança mora numa das casas da ficha 3. Por exemplo, as côres poderiam corresponder às idades ou aos tamanhos das crianças; o número de janelas poderia, também, corresponder às idades, ou aos tamanhos das crianças, enquanto o número de chaminés deveria determinar se é uma menina ou um menino que mora na casa.

(Fichas 8 e 9) Aqui, estendemos o universo aos vinte e quatro blocos pequenos. Há seis árvores possíveis segundo a ordem dos critérios que se impos para estabelecer a ordem dos blocos. A forma tem quatro valôres, a côr tem três, e a espessura só tem dois. Podemos começar com a forma para primeiro critério, e tomar para segundo critério a côr, sendo o terceiro a espessura. Faz-se uma superposição de critérios na ordem: quatro, três, dois. Veremos que na segunda árvore tomamos três, quatro e dois e, na terceira: quatro, dois e três. As árvores da ficha 9 são desenhadas para dar a ordem de critério: dois, quatro, três, para o primeiro; dois, três, quatro para o segundo; e três, dois, quatro para o terceiro. Evidentemente, para cada uma destas árvores, haverá várias maneiras de colocar os blocos, porque não é necessário guardar a mesma ordem de preferência para as formas, nem para as côres, nem para as espessuras.

(Ficha 10) O primeiro exemplo desta ficha dá um conjunto universo de vinte e sete palavras. Escrevem-se todas as permutações possíveis de três letras com repetição, sendo o problema ordenar êste conjunto de palavras. Poderiamos fazê-lo / de muitos modos diferentes. Para imitar os critérios superpostos que são utilizados num dicionário, poderemos tomar para primeiro critério a primeira letra e, por exemplo, tomar essas primeiras letras na ordem alfabética, isto é, A vem antes de B, e B vem antes de E; isto quer dizer que uma palavra cuja primeira letra é A virá sempre antes de toda palavra cuja primeira letra é B, ou cuja primeira letra é E. Mas, se duas palavras têm a mesma inicial, então, é preciso um outro critério para resolver qual vem antes. O segundo critério é fornecido pela segunda letra; por exemplo, entre A E A e A A E, está claro que A A E vem antes de A E A porque a segunda letra impos a escolha. No caso de par de palavras A E A e A E B não se pode decidir a partir da primeira letra nem a partir da segunda; é preciso, então, olhar a terceira letra o que nos dá nosso terceiro critério. Evidentemente A E A vem antes de A E B porque A vem antes de B. Então, será possível construir a ordem e colocar uma dessas palavras sôbre cada extremidade da árvore indicada na ficha 10. O problema 2 é essencialmente parecido ao problema 1; entretanto, há uma diferença. Algumas das séries de algarismos têm três elementos, (membros), algumas tem dois e algumas, apenas um só. Nosso primei meiro critério poderá ser o número de algarismos; se, sendo dados dois elementos, num dêsses elementos o número de algarismos é mais elevado do que no outro, êste elemento virá depois. O que acontece quando os dois elementos têm o mesmo número de algarismos? Neste momento olhamos o primeiro algarismo e se estabelece que o 2 virá depois do 1. O primeiro algarismo é sempre 2 ou 1. Se a decisão não pode ser tomada a partir do primeiro algarismo, passamos ao segundo. Tomamos por exemplo, 202 e 221. O primeiro algarismo é 2 nos dois casos; em consequência, é preciso olhar o segundo. Como 2 vem depois do 0, vemos que 221 virá depois de 202. Se o segundo algarismo não nos permite decidir, olhamos o terceiro algarismo. Neste caso, também, se dirá que 0 vem antes de 1, e que 1 vem antes do 2. Desta maneira, podemos decidir sempre, e teremos a ordem:

0 1 2 10 11 12 20 21 22 100 101 102 110 111
112 120 121 122 200 201 202 210 211 212 220 221 222.

Teremos, assim, encontrado os <u>ordinais</u> expressos na <u>base três</u>. As questões 3 e 4 permitem às crianças generalizar o que elas aprenderam nas questões 1 e 2. A questão 3 será uma generalização do problema 1, e a questão 4, uma generalização do problema 2. Na questão 3, há mais de três letras e o comprimento das palavras pode ser de mais de três letras; na questão(quatro) 4, toma-se a base dez em lugar da base três.

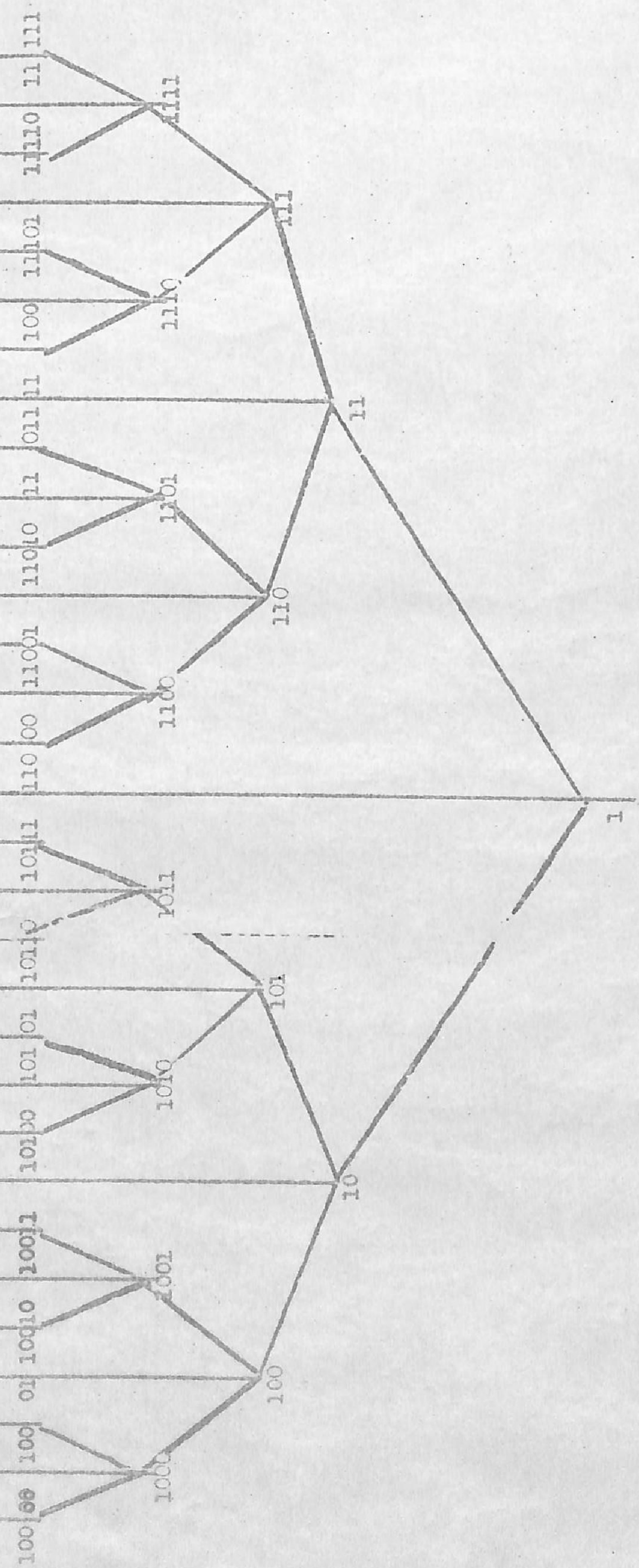
(Ficha 11) Esta ficha está denominada "casse-tête" para desencorajar as crianças que não estão prontas e, para encorajar os que são curiosos. Trata-se de separar a noção "antes-depois" da noção "seguinte"(suivant) Na ordem dos números naturais, há sempre um sucessivo (suivant) e um precedente, salvo para o número 0. Sendo dados dois números naturais quaisquer, há um processo para decidir qual dos dois números é maior ou menor. Há casos onde um conjunto pode ser ordenado sem que tenha um sucessivo (suivant) ou um precedente; por exemplo, não há momento que siga exatamente um outro momento. Qual é o momento que é exatamente após o meio dia? Se dizemos que é meio dia e um minuto, diremos a seguir que isto não é exato porque meio dia e trinta segundos é mais próximo de meio dia e, também, meio dia e um segundo é ainda mais próximo; meio dia e meio segundo é ainda mais próximo. Evidentemente, não há momento que venha imediatamente após o meio dia; isto quer dizer que a despeito de que sempre podemos dizer que sendo dados dois ~~xxxxxxx~~ momentos, sempre podemos dizer qual dêsses momentos vem antes do outro, não existe o "sucessivo"("suivant"), nem de "precedente" de um momento qualquer. Encontramos a mesma situação no espaço. Onde está o ponto mais próximo~~xxxxxxx~~ de outro em uma linha? Não há. Ou se está já sobre o ponto ou se está afastado. Se se está afastado, pode-se estar mais próximo. Os pontos sôbre uma linha podem ser considerados como ordenados por suas repartições sobre esta linha. Vemos que há casos onde se pode falar de uma ordem mas, não se pode falar de "sucessivo" ("suivant") ou de "precedente".

Na ficha 11, experimentamos "misturar" ("mélanger") os números naturais sôbre uma linha, de modo que não há mais precedente nem sucessivo;mamma-se 1, não importa onde, sôbre a linha, e coloca-se 2 antes e 3 depois, na repartição espacial: temos ainda o espaço antes do 2, temos outro entre 2 e 1,outro entre 1 e 3, e outro depois do 3. Nos espaços colocamos os números 4, 5, 6 e 7. Pode-se continuar da mesma maneira porque, agora, ainda há oito espaços a preencher: antes do 4, entre 4 e 2, entre 2 e 5, entre 5 e 1, entre 1 e 6, entre 6 e 3, entre 3 e 7, e depois do 7. Neles colocamos 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 e, pode-se continuar desta maneira indefinidamente. Cada número natural terá seu lugar (tour); a nova ordem será a ordem espawial na qual foram colocados. Por exemplo, 6 vem antes do 12 numa ordem crescente, mas 12 vem antes do 6 na ordem espacial que acabamos de estabelecer. Na ordem crescente dos números naturais, há sempre um sucessivo (suivant);depois do 12 vem o 13, depois do 27 vem 28. Só é preciso juntar 1 para se ter o sucessivo. Mas, aqui, qual é o número que"segue" 12? Não se pode dizer que é o 6 porque ainda haverá números naturais que ocuparão o espaço entre 12 e 6 na próxima vez que se fizer o preencimento dos espaços (qu'on fera le tour des espaces); que, ~~xxxxxxxxxx~~ qualquer número natural já tenha sido colocado e que poderíamos considerar como o número que segue o 12, na verdade não poderia seguí-lo, porque se há um espaço em um dado momento, vamos colocar um número natural nesse espaço, um pouco mais tarde. Finalmente, depois de ter esgotado todos os números, se isto fosse possível, não teríamos mais espaços. Evidentemente jamais chegaremos a isso porque,para tal,era preciso viver um período infinito.

Como podemos encontrar um método para dedidir a ordem entre dois números nesta nova ordem?

Aqui vocês têm os números de 1 a 31 na nova ordem, na base dez e na base dois. Junto encontrarão uma árvore para êsses números.Por uma projeção, os números sôbre a árvore correspondem aos números sôbre a linha, na nova ordem. Olhe bem esta árvore para compreender bem o esquema de decisão que segue.

31	11111
15	1111
30	11110
7	111
29	11101
14	1110
28	11100
3	11
27	11011
13	1101
26	11010
6	110
25	11001
12	1100
24	11000
1	1
23	10111
11	1011
22	10110
5	101
21	10101
10	1010
20	10100
2	10
19	10011
9	1001
18	10010
4	100
17	10001
8	1000
16	10000



ESQUEMA DE ESCÔLHA (para os números na base dois)