IV FUNÇÃO

INTRODUÇÃO

Uma palavra que é um mundo... Uma palavra: "função".... um mundo: o mundo da ciência.

As situações de vida em que estamos envolvidos são Relações. Jamais nos lembramos de perguntar a um adulto se quer ouvir uma estória para ir dormir. No entanto, é natural este comportamento em relação a uma criança. Vemos, pois, que num conjunto de pessoas, a lei "... conta estória para ... na hora de dormir" determina pares ordenados onde o 1º componente do par será um adulto (ou mesmo uma criança - por que não?) e o 2º componente do par será <u>necessariamente uma criança</u>.

A vida nos exige que saibamos tratar com propriedade as relações. Isto por si já justificaria a aprendizagem do que é função, pois, <u>toda função é uma relação</u>. No entanto, há um motivo mais forte - a função nos garante, SEMPRE, um resultado determinado. Veremos, a seguir, como isso ocorre.

CONCEITO

Função de A em B é uma relação cuja lei associa a <u>todo</u> elemento de A um <u>único</u> elemento de B.

REPRESENTAÇÃO

Quando se estuda funções é muito importante salientar-se a <u>lei da função</u>. A lei da função é representada por letra minúscula como: f, h, g, r, ... Representamos o conjunto de pares ordenados - isto é - a função, por letras maiúsculas F, G, H, T, ..., uma vez que função é um conjunto.

NOTAÇÃO

Suponhamos que F seja uma função. Anotamos então:

F : A B

x f(x) = y

A é o domínio

B é o contra-domínio

F é a lei

EXEMPLO 1

Seja A o conjunto O, 1, 2, 3

B = 1, 2, 3, 4, 5

f : A B

x f(x) = x 1

F = (0, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4)

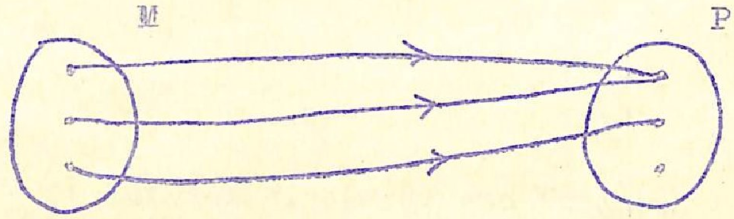
0 1 2 3 | 1 2 3 4 5

Podemos observar que de todo ponto do gráfico de A parte uma flecha, isto é, todo elemento de A está relacionado com algum elemento de B. Ainda mais - nenhum elemento de A se relaciona com mais de um elemento de B.

Temos pois, a f associa a todo elemento de A, um único elemento de B. Logo, F é uma função.

EXEMPLO 2

O gráfico abaixo representa uma função de M para P. Vamos examinar o problema



1º) De <u>todo</u> ponto do gráfico de M parte uma flecha?

- Sim, <u>todo</u> elemento de M está relacionado com algum elemento de P

2º) Existe algum elemento de M que se relacione com mais de um elemento de P?

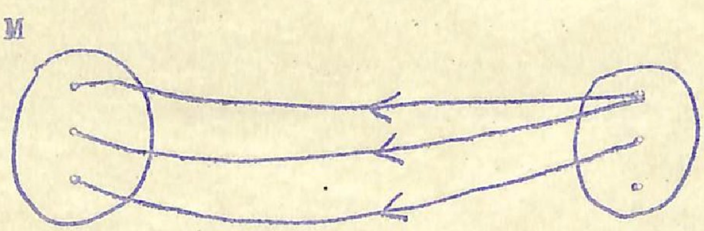
....

Como as duas consições são satisfeitas podemos afirmar que o gráfico representa uma função de M para P.

CONTRA-EXEMPLO

Pensemos agora na relação inversa

r: $P \longrightarrow M$



Esta relação não é uma função porque:

1º) ....

....

2º) ....

....

EXEMPLO 3

Seja: f   01 0,1

x = 2n   f(x) = 0   x

x = 2n 1   f(x) = 1

Estamos diante de uma função:

1º) Todo elemento de está relacionado

com ....

.... 0,1

2º) Nenhum elemento de se relaciona com

....

.... 0,1

No entanto, a relação

r: 0,1   inversa do estudo acima

0   2n

nE

1   2n 1 .

Não é uma função.

Qual das condições não se verifica?

....

....

....

V- TRANSFORMAÇÃO

INTRODUÇÃO

Para melhor siturmos êste novo conceito no contexto matemático façamos um diagrama:

$R = \{x/x \text{ é relação}\}$

$F = \{x/x \text{ é função}\}$

$T = \{x/x \text{ é transformação}\}$

A representação acima já nos fornece alguns dados a respeito dêste novo conceito. Temos que F é subconjunto de R, isto é, tôda função é uma Relação.

A reciproca, no entanto, não é verdadeira, nem tôda relação é uma função. Observemos agora o conjunto T.

T é subconjunto de F.

T ′ sub-conjunto de R.

Logo, tôda translação é uma função e uma relação

CONCEITO

Uma transformação é uma função cujo dominio e conjunto de chegada são iguais.

REPRESENTAÇÃO

Como uma transformação é uma função, a representação é análoga àquela, a lei da transformação é representada por uma letra minúscula p, g, h,...

Representaremos o conjunto de pares ordenados - isto é, a transformação por letra maiuscula F, G, H, pois uma transformação é um conjunto.

NOTAÇÃO

Seja H uma transformação anotamos então

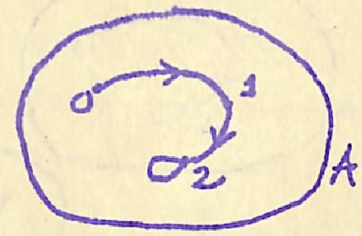
H: $E \longrightarrow E$

$x \longrightarrow h(x)=y$

h é lei de transformação
E é o dominio de H
E é o contra dominio de H.

EXEMPLO 1: Seja $A = \{0, 1, 2\}$

$T = \{(0,1), (1,2), (2,2)\}$



A relação representada no gráfico acima é uma função pois

1º) Todo elemento de A tem correspondente.

2º) Cada elemento de A se relaciona com um só elemento de A.

Como o dominio e o contra-dominio da função é o conjuntoA.

$T = (0,1), (2,2), (1,2)$ t é uma transformação.

CONTRAEXEMPLO

Seja $V = m,2,3,b$

Na relação representada no gráfico acima observamos que o elemento 3 está relacionado com m e com 2. Logo, a relação (é) (não é) uma função.

Podemos, então, afirmar que o gráfico representa uma relação de um conjunto nêle mesmo, mas não é uma transformação, uma vez que esta relação não é uma função.

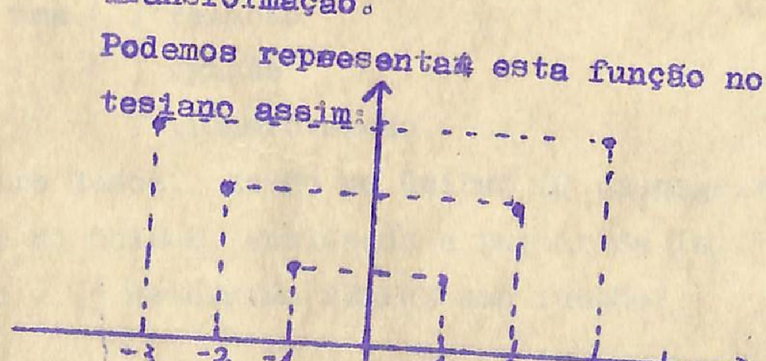
EXEMPLO 2

Seja $F: Z \longrightarrow Z$

$x \longrightarrow f(x)$

O conjunto P de pares ordenados que F determina em Z é uma função. Como esta função tem por dominio e contra-dominio o conjunto Z, P é uma transformação.

Podemos representar esta função no gráfico cartesiano assim:



Fica claro que F não é uma função sobrejetora pois os elementos de Z não se relacionam com o subconjunto $\{-1, -2, -3 \ldots\}$ de Z

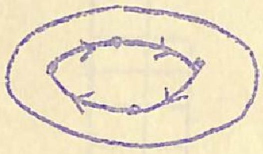
No entanto, isto não é exigido pelo conceito de transformação.

Questões de Revisão

1) Coloca (1) se é relação
(2) se é função
(3) se é transformação

$f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}^*$
$x \longmapsto x$

(...) (...) (...)



(...) (...) (...)

$M = \{(a,b), (d,b), (d,d), (b,b)\}$

(...) (...) (...)

2) Seja R = (0,2), (1,2), (0,1), (2,2) uma relação

Determina um conjunto $F \subseteq R$ tal que F seja uma função.

3) Nas funções abaixo, quais são transformações?

$A = \{ (a,0), (b,1), (c,3) \}$

$B = \{ (0,2), (2,0) \}$

$C = \{ (1,2), (2,2), (3,2), (4,2) \}$

$D = \{ (1,0), (2,0), (3,0), (4,0) \}$

4) Seja A=

a) Constroi em A uma relação que não seja função.

b) Constrói em A uma função.

c) a função construida acima é uma .... porque...............

5) Analisa matemàticamente as situações de vida que ocorrem num ônibus com capacidade para 35 passageiros sentados.

a) No ônibus sòmente estão viajando passageiros

1. A lei "... está sentado ao lado de..."

Determina uma ( ) relação

( ) função

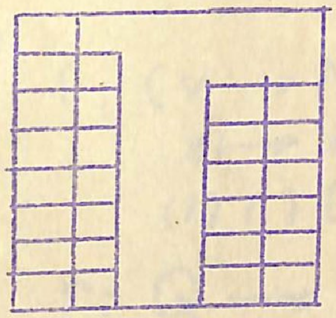
( ) transformação

b) Um passageiro desce. Estão no ônibus 20 passageiros.

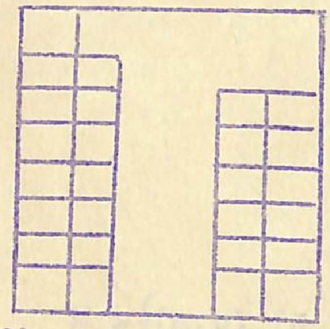
1. A situação no ônibus, analisada a partir da lei "está sentado ao lado de ..." determina SEMPRE uma função?

b. Usa pontos para indicar a localização dos 2o passageiros de modo que a lei " está sentado ao lado de..." determine

uma função



uma relação



c) Sempre que a situação no ônibus fôr uma função, podemos dizer que estamos diante de uma transformação.
Justifica.

d) Determina o número mínimo, entre os 20 passageiros que deve estar sentados sozinhos para que a situação não seja uma transformação.

e) Descreve a situação no ônibus que sempre seja expressa por uma transformação.

6. Define-se Permutação como uma função bijetora com dominio igual a contra-dominio.

$A = \{x/x \text{ é relação}\}$
$B = \{x/x \text{ é função}\}$
$C = \{x/x \text{ é transformação}\}$
D== x/x é permutação

Usando as informações acima, constrói os diagrama de A,B,C,D, que melhor expressem as conexões existentes entre A,B,C e D.

AUTO - CORREÇÃO

QUESTÕES DE REVISÃO

FUNÇÃO - TRANSFORMAÇÃO

1)

$F: (V \longrightarrow N^*)$

$x \longmapsto x$

(1) ( ) ( )

(1) (2) (3)

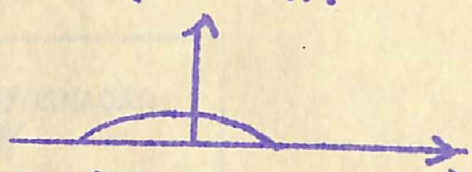
$r: Q \longrightarrow Q$

$y \longmapsto \frac{4}{2}$ (1) (2) (3)

$M = \{(a,b), (d,b)\ (d,d), (b,b)\}$

(1) ( ) ( )

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$



(1) (2) (3)

2) $F = \{(0,2)\ (1,2)\ (2,2)\}$ ou $F = \{(0,1), (1,2)\ (2,2)\}$

3) B e C

4) a) Existem várias possibilidades, por exemplo:
R = {(✱,2), (✱, 𝄞)}, qualquer conjunto de pares ordenados cujos elementos pertençam.

b) Deverás ter construído um conjunto de pares ordenados de tal forma que todos os elementos de A sejam uma única vez 1º componenete de um par ordenado.

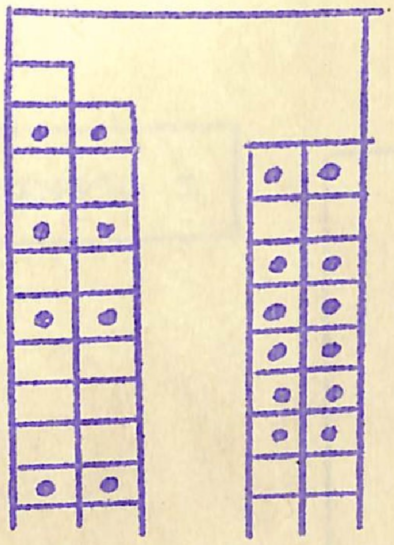
Por exemplo: {(✱,2), (2, 𝄞), (𝄞, 𝄞)}

c) Transformação e domínio será A e o conjunto de chegada será A.

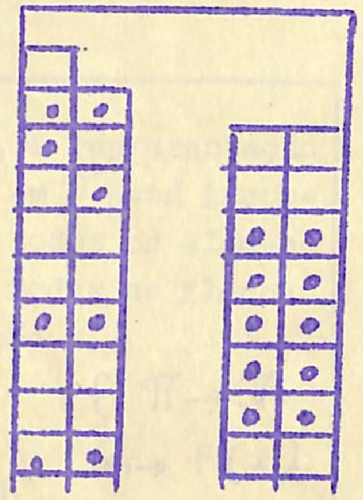
5) a) 1) Relação

b) 1) Não necessáriamente. Alguns passageiros poderão estar sentados sozinhos.

6) Existem outras maneiras de estabelecer esta função, basta que em cada banco estejam dois passageiros sentados em cada banco.



Deverá estar, ao menos um passageiro sentado em um banco de dois lugares para uma relação não função.



TRANSFORMAÇÃO EM π

INTRODUÇÃO

O conjunto π já foi axiomatizado no mapa de conceitos I.

No axioma 1

Vemos que π é ....

CONCEITO

O mapa de conceitos π trata de transformações. Assim, a idéia de matemática associada a Transformação em π é simplesmente uma ampliação dos conceitos anteriormente mapeados.

Transformação em π é uma função, cujo domínio e conjunto de chegada são π.

REPRESENTAÇÃO

$$f: \pi \longrightarrow \pi$$
$$x \longmapsto f(x)$$

f é a lei da função

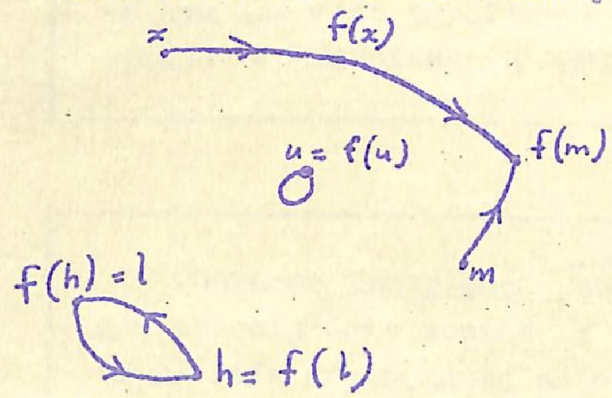
π é o domínio e o conjunto de chegada.

Logo, $x \in \pi$ e $f(x) \in \pi$.

EXEMPLO 1

Como o plano é infinito, a representação abaixo, de uma transformação em Π está incompleta. É impossível desenhar todos os elementos (pontos) de Π, e traçar todas as flechas determinadas pela transformação.

$$f: \Pi \to \Pi$$
$$x \mapsto f(x)$$



Vemos que a f é uma função porque de cada ponto do gráfico parte uma única flecha.

EXEMPLO 2

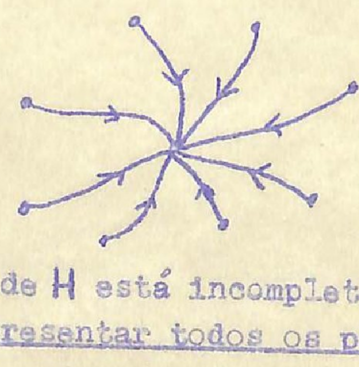
Um exemplo de uma transformação em é a <u>transformação constante</u>.

Chamemos de H a transformação constante definida por

$$H : \Pi \longrightarrow \Pi$$
$$x \longmapsto m$$

Vemos que todos elemento de Π é relacionado com $m \in \Pi$ (inclusive o próprio m se relaciona consigo mesmo)

O gráfico incompleto de H



O gráfico de H está incompleto porque é <u>impossível representar todos os pontos do plano Π</u>.

TRANSLAÇÃO

INTRODUÇÃO

Este é o último mapa de conceitos do trabalho. Podemos notar que os objetivos iniciais definidos para o mapeamento referem-se exatamente a diferentes aspectos do conceito de TRANSLAÇÃO

É a idéia pré-requisito para a construção de uma das mais importantes estruturas matemáticas: A ESTRUTURA DE ESPAÇO VETORIAL.

CONCEITO

Chama-se Translação $\overrightarrow{ab}$ a transformação em que associa dois pontos x e y de modo que (x,y) seja equipolente a (a,b).

REPRESENTAÇÃO

$t_{\overrightarrow{ab}} : \pi \longrightarrow \pi$ tal que $(x,y) \uparrow (a,b)$

$x \longmapsto y$

A lei da translação é $t_{\overrightarrow{ab}}$

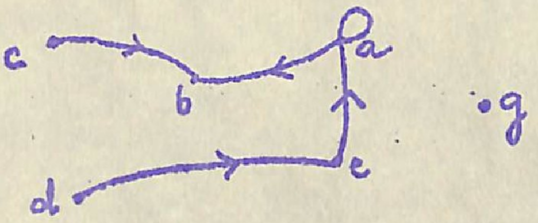
O domínio e conjunto de chegada é π

A translação é um conjunto de pares ordenados:

$$\overrightarrow{ab} = \{(x,y) \in \pi \times \pi \mid (x,y) \uparrow (a,b)\}$$

CONTRA-EXEMPLO

Seja o gráfico abaixo a representação fragmentada de uma relação de π em π .



Esta relação não é uma função pois existe um elemento $a \in \pi$ tal que a se relaciona com b.

a se relaciona com a.

Mesmo sem conhecermos o gráfico completo da relação, já está assegurada, pois, que não existe, neste caso, uma transformação em π .

EXEMPLO 3

A transformação idêntica em π é uma função que relaciona todo elemento de π consigo mesmo:

$$\begin{aligned} \pi &\longrightarrow \pi \\ x &\longmapsto x \end{aligned}$$

Alguns elementos desta transformação estão abaixo representados.