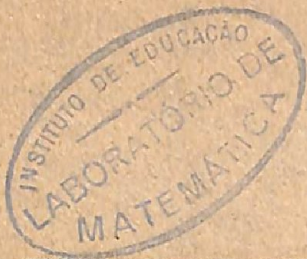


*Lab de Mat  
Dissertação*



Instituto de Educação  
Gen. Fiores da Cunha

ARQUIVOS

PUBLICAÇÃO

do LABORATÓRIO de MATEMÁTICA

Nº 4

PÔRTO ALEGRE

1962



INSTITUTO DE EDUCAÇÃO GENERAL FLORES DA CUNHA  
CURSO DE FORMAÇÃO DE TÉCNICOS EM SUPERVISÃO ESCOLAR  
PORTO ALEGRE, JUNHO DE 1961  
DIREÇÃO DE APRENDIZAGEM EM MATEMÁTICA  
TURMA 542 - PERÍODO 4º

PROFESSORA: ODILA BARROS XAVIER  
ALUNA : INGBORG STRACKE

TRADUÇÃO DE ALGUNS TRECHOS DO CAPÍTULO  
"SOLUÇÃO DE PROBLEMAS EM MATEMÁTICA"  
LIVRO:.....APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA, SUA TEORIA E PRÁTICA  
YEAR BOOK:...Nº 21  
AUTORES:.....KENNETH B. HENDERSON E ROBERT E. PINGRY  
Págs. 228 a 269

O presente capítulo sobre resolução de problemas em matemática foi escrito na suposição de que os professores compreendam a teoria básica a qual tem origem na pesquisa sobre este assunto e vê claramente as suas implicações nos métodos e processos usados em classe. Ambas são necessárias. A teoria separada das implicações e conseqüências é estéril. Os métodos e processos quando afastados da estrutura conceitual, tornam-se um repósitório de charadas. De acôrdo com isso o capítulo pode ser dividido em duas partes. A primeira trata da teoria do processo ou grupo de processos de resolução de problemas. Esperamos que este capítulo seja útil aos professores quando procuram ajudar seus alunos, não somente na solução de problemas particulares, nas também no melhoramento geral / das técnicas.

#### QUE É UM PROBLEMA

O conceito mais comum de problema é que se trata de uma questão proposta para uma resposta ou solução. É este o conceito que o professor tem quando diz em sua aula de matemática: "A tarefa de / vocês é fazer os problemas de um a dez, na página 164." A questão, que pode ser implícita ou explícita em cada problema é: "Qual é a resposta?"

O conceito de um problema como uma pergunta é o que temos em mente quando falamos de problemas educacionais, tais como, ensino de resolução de problemas, de transferência, de manutenção da disciplina, da providência de orientação educacional adequada. Nesses exemplos a questão está implícita. Pode-se dizer: "Como posso eu?" ou "Como podemos nós?"

Um segundo conceito considera a existência da situação problemática como uma necessidade, mas diverge do primeiro quando diz que essa existência não é suficiente. As demais condições pertencem ao indivíduo que está considerando a questão. O que é problema para uma pessoa, não é problema para outra. O que hoje constitui problema para determinada pessoa, pode não ser, amanhã.

#### COMO UMA PESSOA RESOLVE UM PROBLEMA

Foi mencionado que a condição necessária para haver um problema para um determinado indivíduo é que haja uma situação problemática. Para identificar as outras condições necessárias é conveniente analisar o processo psicológico da resolução de problemas, isto é, como uma pessoa procede para resolvê-lo.

A primeira parte identificável no processo de solução de proble-

mas é a atividade continuada do indivíduo. Se quiséssemos conhecer a causa desse comportamento, encontraríamos sempre um objetivo mais racionalizado, ou uma tensão psicossomática não resolvida. É esse / objetivo ou tensão que ocasiona e dirige o comportamento individual. Por ex.: um estudante resolve fazer seus temas de matemática. / Encontra um lugar para estudar, toma uma folha de papel e começa a trabalhar nos exercícios marcados. Esse estudante tem em mente um objetivo. Deseja completar o trabalho indicado.

O comportamento de um indivíduo pode ser também ocasionado / por um objetivo menos definido. Usando o aluno novamente como exemplo, ele completa a tarefa designada e dispõe de um certo tempo. / Escuta rádio por uns instantes, descobre que leu todos os seus livros cômicos, olha pela janela, chama um amigo pelo telefone - tudo numa tentativa de amenizar seu aborrecimento. Está sob o impacto de uma tensão, mas não definiu claramente o objetivo que vai / solucionar essa tensão.

É diferença entre a situação dada e a situação desejada (objeto) que provoca, dirige e mantém o comportamento individual. Quanto mais claros os objetivos de um indivíduo, tanto mais forte é / sua vontade de fazer ou motivação. Uma vaga sensação de mal-estar não conduz a um comportamento que renova esse sentimento. Uma atitude consciente e uma meta claramente definida ajudam o indivíduo a selecionar e organizar o comportamento de tal modo que haja maior probabilidade de serem atingidos os objetivos. A consecução do objetivo pelo indivíduo é satisfatória. As tensões libertadas, é / realçado o valor do indivíduo e ele sente-se melhor.

A segunda parte identificável do processo de resolução de problemas consiste num bloqueamento de comportamento normalmente empregado pelo indivíduo na realização de um objetivo. O bloqueio deve ser de tal natureza que os hábitos estabelecidos não possam imediatamente entrar em ação para desvia-lo ou renovê-lo. Suponhamos que uma menina esteja considerando o seguinte problema: "Uma receita para fazer 4 dúzias de bolinhos necessita de 1 xícara de leite doce, 1/4 de colher de chá de fermento e 2 xícaras de farinha. Quanto precisaria de cada ingrediente para fazer 2 dúzias de bolinhos?" Se ela imediatamente toma um meio de cada quantidade, realmente / não houve bloqueio. Mas, suponhamos que ela não saiba o que seja / um meio de um meio e um quarto. Agora ocorreu um bloqueio, e ela se tornou consciente de um "problema" no sentido de uma questão a ser respondida.

Alcançamos agora o terceiro passo da resolução de problemas. (Isto supondo que o aluno continue agindo de acordo com seu objetivo inicial. Se decidisse abandonar a tarefa, teria mudado seu objetivo. Não existe bloqueio e por conseguinte, nenhum problema). O / aluno começa a pensar e imaginar caminhos para resolver o bloqueio e desse modo atingir seu objetivo.

Essa análise do processo de resolução de problemas nos permite identificar as condições necessárias para que haja um problema para um indivíduo determinado:

- a) O indivíduo tem um objetivo claramente definido, do qual / está consciente e cuja realização deseja.
- b) Ocorre o bloqueio do caminho que conduz ao objetivo, e os padrões de comportamento fixados pelo indivíduo ou suas reações habituais não são suficientes para renovê-lo.
- c) Chega o momento da deliberação. O indivíduo torna-se consciente do problema, e define mais ou menos claramente, identifica várias e possíveis hipóteses (soluções) e experimenta as possibilidades.

### IMPLICAÇÕES PARA O SIGNIFICADO DE UM PROBLEMA

O segundo conceito de "problemas" aqui discutido, sustenta / que quando são encontradas essas três condições necessárias, o / problema existe para o indivíduo particular. Nota-se que esse / conceito difere do anterior. Nem toda questão proposta para solu- / ção é um problema. Como salienta Cronbach (7:34): "...não é / o examinar uma questão que faz o problema, mas o aceitá-la como / algo que se procura solucionar".

.....  
Aqui não se trata de saber qual dos dois conceitos é o corre- / to, isto é, se o dos problemas existindo independentes das pesso- / as que se defrontam com eles, ou o dos problemas que só existem / em relação às pessoas que os resolver. É antes uma questão de sa- / ber qual deles é mais útil para determinado propósito. Parece que / o segundo conceito é mais útil na maioria dos contextos educacio- / nais. É o que aceitamos no presente capítulo.

### OS PROBLEMAS DOS LIVROS-TEXTOS SÃO SEMPRE PROBLEMAS?

Os "problemas" dos livros-textos podem ser definidos, assim / como todos tipos de "problemas" pré-formulados, seja os dos livros / textos, seja os preparados e apresentados pelos professores nos / exercícios e provas de verificação. Para simplificar o assunto va- / mos supor que o aluno possa compreender problemas. É claro que se / a capacidade do aluno é deficiente, se desconhece o significado / dos símbolos matemáticos, ou não estabelece relações, os "proble- / mas" não têm chance de se tornarem problemas. Para esse aluno per- / manecem enigmas.

Podemos verificar se os "problemas" dos livros-textos são re- / almente problemas, examinando se estão presentes as três condi- / ções necessárias, anteriormente constatadas. Uma vez feito isso, / a única conclusão é que tudo depende da reação do aluno. Se ele / aceita o "problema" como coisa sua (isto é, se o ego é envolvido) / então a solução do problema torna-se seu objetivo. Neste caso o / problema do livro-texto preencheu a primeira condição de um pro- / blema.

É importante notar que realmente não faz diferença se o "pro- / blema" (situação problemática) é proposta pelo aluno para si mes- / mo ou se é proposto pelo professor ou livro-texto. O difícil é ve- / rificar até que ponto o eu do aluno é envolvido. Alguns professô- / res acham que o "problema" somente é um problema, quando o aluno / o formula para si mesmo, com pouca ou nenhuma ajuda do professor. / É difícil defender essa posição, mesmo no plano teórico. Continua / provado que o professor de matemática, muito entusiasmado, possui / dor de uma personalidade dinâmica e estudioso da psicologia, não / é capaz de envolver os alunos em maior número de problemas, do que / aquele que espera que o aluno seja movido pelo talento. A razão / principal pela qual tantos "problemas" dos livros-textos nunca se / tornam problemas, reside no fato de que o professor pouco se esfor- / ça no sentido de desafiar o aluno. Como diz Bakst (1:9): "um desa- / fio feito de modo adequado, raramente ficará sem resposta." Exis- / tem possibilidades em problemas pré-formulados. Depende, em gran- / de parte do professor, se são compreendidos.

Supondo, porém, que o aluno faz da solução do problema seu ob- / jetivo, ainda assim existe a possibilidade do problema ser fácil / para ele. A solução pode ser simplesmente uma questão de estudar a / resposta com afinco. Outra vez depende do aluno. Em todas as aulas / de matemática existem, provavelmente, alunos para quem somente os / primeiros problemas de uma tarefa são realmente problemas. Esses / alunos são suficientemente bem dotados para descobrirem com rapi- / dez a natureza problemática dos últimos "problemas" da tarefa. Pro

vavelmente, existem também alunos para quem cada "problema" é um problema. Alguns são tão eficazes em estabelecer bloqueios que o aluno é incapaz de eliminá-los e solucionar os problemas. Em resumo, o que para um aluno é problema, para outro constitui exercício e para um terceiro, frustração.

Na exposição precedente não foi feita distinção entre os assim chamados, "problemas verbais" e os exercícios comuns. Isso porque uma tal distinção nunca tem valor especial quanto às condições requeridas para que haja um problema. Os "problemas verbais" e os exercícios diferem na natureza, qualidade de habilidades requeridas e na dificuldade. Mas, um não pode ser mais problema que o outro. Tudo depende da orientação do aluno.

#### A IMPORTÂNCIA DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Se a vida fosse de natureza tão constante, que somente houvesse algumas tarefas a cumprir, as quais fossem feitas repetidas vezes, exatamente do mesmo modo, a necessidade de conhecer como resolver problemas não seria de caráter tão obrigatório. Cada um teria de fazer, de aprender umas poucas tarefas, no princípio; dali por diante teria ou poderia confiar na memória e no hábito. Felizmente - ou infelizmente, isso depende do ponto de vista de cada um, a vida não é tão simples e estática. É antes, tão rapidamente mutável, que quasi todos nós podemos predizer, que as coisas serão diferentes no futuro. Num mundo assim, a capacidade de ajustar-se e de solucionar problemas é de capital importância.

É evidente a necessidade de ensinar os alunos a formular e resolver problemas, que envolvam pensamento quantitativo. Depois de formados ou no emprego terão de ser capazes de resolver os problemas propostos a eles, tanto na sua educação mais avançada, como no trabalho que realizam. A maioria dos professores, embora não todos, defende esta posição, por isso dispender considerável esforço no ensino da matemática. Existem alguns tipos de ensino, que potencialmente têm mais valor.

#### OS CURSOS DE MATEMÁTICA DEVERIAM CONTER MAIOR NÚMERO DE PROBLEMAS?

De acordo com o que sabemos sobre aprendizagem só existe um meio de levar os estudantes a aprenderem a resolver problemas, isto é, pela resolução de problemas e pelo estudo do processo. Isso quer dizer que o aluno precisa defrontar-se com problemas. Talvez uma das razões pelas quais os professores atuaram tão mal no ensino da resolução de problemas, seja porque levaram os alunos a se defrontarem, ou os auxiliaram a formular poucos problemas reais. Entretanto, pode ser que essa não seja a única razão. A não ser que os alunos estudem o processo de resolução de problemas como um fim em si mesmo, pouca possibilidade haverá que aprendam as generalizações que os capacitarão a transferir sua habilidade de resolução para novos problemas apresentados. Woodruff dá ênfase, diretamente, à importância do estudo do processo de resolução de problemas quando diz: "Por conseguinte, em face do que sabemos sobre a relativa ausência de exercício de transferência na maioria das disciplinas escolares, é o maior dos disparates esperar que os alunos desenvolvam a habilidade de selecionar problemas, como aprendizagem incidental, a não ser que seja devotada diretamente a ela, considerável tempo e atenção, nesse caso, deixando de ser incidental. É muito mais provável que seja aprendido algo sobre feitos cívicos numa unidade sobre resolução de problemas, do que desenvolvida a capacidade de resolução de problemas numa unidade sobre feitos cívicos."

Antes que o processo possa ser estudado eficazmente, o curso de matemática deve conter muitos problemas que preencham as condições necessárias, já identificadas. Não se trata de usar "problemas" pré-formulados ou "problemas de situações vitais". Cada um / tem sua importância. No entanto, os professores têm estado inclinados a negligenciarem estes últimos. São os problemas que surgem de situações sociais, atividades industriais ou da vida pessoal / dos alunos e cuja solução, requer substancial quantidade de pensamento quantitativo. Hartung (12) cita algumas das características principais desses problemas.

- a) - Não têm pergunta definida, mas esta pergunta ou perguntas devem ser formuladas no início.
- b) - Os dados necessários não constam, mas devem ser selecionados e avaliados.
- c) - A análise e interpretação são muito mais complexas.
- d) - Muitas vezes, não é possível uma resposta definida; a verificação só é possível através de uma real tentativa.

É muito mais difícil encontrar problemas dessa espécie. Provavelmente não serão muito satisfatórios, se colocados em livros-textos, porque dependem grandemente de fatores exclusivos da escola / em que são estudados. No entanto, se esses problemas não forem incluídos nos cursos de matemática, é pouco provável que os alunos / se tornem competentes na sua resolução. A evidência da transferência / da do exercício não oferece muita esperança.

A FUNÇÃO DOS PROBLEMAS VERBAIS E DOS EXERCÍCIOS

Se o professor seleciona, cuidadosamente, os problemas verbais, de acordo com o nível de capacidade dos alunos e se ele consegue que eles se identifiquem com esses problemas, então os problemas verbais tornam-se problemas reais. Provavelmente, são tão / úteis no ensino da resolução de problemas como se não tivessem sido formulados (embora não sejam para a descoberta, definição e formulação do problema). Uma vez que a atenção dos alunos esteja dirigida para o processo que empregam na resolução de problemas e que eles compreendam, os problemas verbais fornecem o material prático, no qual os alunos possam aplicar os princípios que aprenderam. A função desses problemas, como material prático, é a mesma como a de qualquer outra prática. Isso foi claramente dito por Brunell e Erickson (3:102): "A provisão de abundante prática assegura aos educandos oportunidade de descobrirem seus próprios fins de aprendizagem (se os desejam), e a desenvolver confiança na sua capacidade de reagir rapidamente e com precisão, quando solicitados".

Com exceção de sua forma sintática, a principal diferença entre exercícios e "problemas verbais" está na finalidade de seu uso. Os exercícios, como os que tratam de operações fundamentais, excentos, radicais e assim por diante, têm o propósito de ensinar certos / conceitos e generalizações matemáticas. Os problemas verbais têm o propósito de ensinar generalizações relativas ao processo de resolução de problemas. Esses não têm, necessariamente, relação com um tipo determinado de problemas matemáticos; o processo de resolução de problemas é, essencialmente, o mesmo para todos os problemas. A verdadeira justificativa da seleção de problemas baseados em tempo, razão, distância, trabalho, misturas, moedas e negócios, é o estudo / do processo de resolução de problemas, e não, a utilidade de um determinado problema. Embora a principal função dos exercícios seja / levar à significação e oferecer oportunidade de aplicar generalizações e conceitos matemáticos, não existe nenhuma razão para que não sejam usados com a mesma finalidade que os "problemas verbais"; espe

cialmente, dar oportunidade de aplicar as generalizações, que os alunos aprenderam sobre resolução de problemas. O uso de exercícios com esse objetivo apenas, requereria uma transferência da / atenção, já que resultaria num alargamento da significação das / generalizações, que tratam do método de resolução de problemas.

Em resumo, tantos os exercícios, como os problemas verbais, têm a mesma função em relação à resolução de problemas. No entanto, esses últimos estão mais relacionados com a resolução de problemas do que os exercícios, porque poucos professores percebem os diferentes usos que podem ter os exercícios. Pesquisas futuras / provarão qual é o mais eficaz no ensino da resolução de problemas, se os exercícios ou os problemas verbais.

### ANÁLISES DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

De acordo com a definição de Dewey sobre pensamento refletivo, pouca diferença existe, entre este e a resolução de problemas. Logo, sua análise pode ser tomada como uma análise do ato de resolver problemas. Dewey reconhece 5 passos (8:107 - 116):

- a) - Certa inibição da ação direta, resultando num conhecimento de uma "situação de encruzilhada".
- b) - Uma intelectualização da dificuldade sentida, conduzindo a uma definição do problema.
- c) - "A identificação de várias hipóteses... para iniciar e guiar a observação e outras operações junto com material real".
- d) - Elaboração de cada uma das hipóteses pelo raciocínio e pela tentativa das hipóteses.
- e) - Elaboração de uma tentativa selecionada no passo d, desse modo chegando à última.

Esta análise idealizada descreve como uma pessoa deveria pensar se fosse um autômato governado, apenas, pela lógica. Não descreve o pensamento de uma pessoa real. Mesmo Dewey confirmou que, ordinariamente, o pensamento das pessoas não segue esta seqüência. Estudos realizados sobre como pensar alguns de nossos pensadores, mostram que, se existe um padrão lógico, não somos capazes de discerni-lo. Apesar de tudo isso a análise de Dewey serve para ilustrar estágios no processo deliberativo.

Johnson dá uma análise, ligeiramente. Identifica 3 processos ou grupos de processos, os quais, diz ele, ocorrem regularmente / durante a resolução de problemas:

- a) - Orientação para o problema.
- b) - Produção de material relevante; uma função elaborativa.
- c) - Julgamento, uma função crítica. (14:202)

A análise de Johnson está orientada mais para o processo psicológico associado com a resolução de problemas. Mas quando consideramos a resolução de problemas, os passos d e e de Dewey, isto é, a elaboração de cada hipótese pelo raciocínio e tentativa de hipótese e ação baseada numa hipótese selecionada, parecem ser mais proveitosos dentro de uma estrutura conceitual do que o 3º processo de Johnson, isto é, o julgamento. Isso, principalmente / porque o julgamento é menos problema numa ciência como a matemática, do que nos campos da sociologia, ciência política ou religião e no grande reino, que chamamos de atividades diárias da vida. / Já que neste capítulo nos limitamos à resolução de problemas em / matemática, o processo c de Johnson foi substituído por um "ensaio de hipóteses".

De acordo com a estrutura conceitual aceita neste capítulo, o período de pré-solução da resolução de problemas, consta do seguinte:

- a) - Orientação para o problema.

b) - Produção de material "relevante de pensamento".

c) - Ensaio de hipótese.

Esses processos não estão claramente delimitados. Como o próprio declara, há considerável inter-ação entre eles! "A resolução de problemas começa com a orientação inicial e termina com o julgamento final, mas entre esses dois limites algo já pode ir acontecendo, em qualquer seqüência. (14-203)

### ORIENTAÇÃO PARA O PROBLEMA

Johnson define a orientação "o processo pelo qual o organismo aprende o material de pensamento e o conserva disponível para deliberação". (14-204)

Esse processo ou grupo de processos consiste, por conseguinte num abarcar, num aprender, e inclui os outros dois: produção de "material de pensamento" e ensaio de hipóteses.

A orientação individual para um problema depende, em parte, das condições físicas e mentais. Não podemos esperar que seja eficaz a orientação de um aluno, que está sob o impacto de violenta dor de cabeça, e completamente subnutrido ou esteve de vigília até duas horas da madrugada. Do mesmo modo, não é eficaz o aluno, cujo cachorro foi morto naquele instante, ou o aluno escolhido para uma partida de futebol após a aula. A orientação individual para um problema depende também daquilo que o mesmo significa para o aluno, i. é, se compreende as palavras e relações. Depende ainda da maneira como o problema é apresentado aos motivos conscientes e como afeta as necessidades do ego, tais como, sucesso, aprovação, propriedade e segurança. O aluno está consciente dos dois primeiros e, inconsciente do terceiro.

Costuma-se afirmar que a significação é uma variável constante que vai do zero infinito. Quer dizer que não se trata de "ter ou não ter", mas é uma questão de grau. Logo, todo problema tem significado para o indivíduo.

Para exemplificar as várias significações que um problema pode ter, suponhamos estar observando um grupo de alunos ocupados na tarefa de resolver problemas. Para Roberto esses problemas significam um pequeno retardamento até a hora em que possa retornar à leitura de seu livro cômico. Seu objetivo é encontrar uma resposta que possa convencê-lo de que realizou a tarefa, não é necessariamente a resposta certa. Para Hebriqueta, o problema significa uma oportunidade de chamar sobre sua pessoa a atenção dos rapazes e de exibir-se diante das outras meninas da classe. Portanto, seu objetivo é resolver o problema para conquistar a admiração dos colegas ou do professor. Francisco, considera o problema mais uma ameaça ao seu amor próprio; para ele todos os problemas de matemática são. Francisco, simplesmente, não suporta derrotas; estabeleceu para si um nível de aspiração tão inflexível, que não pode ser modificado por suas várias aptidões. Seu único recurso é esforçar-se pelo problema. Caso contrário, poderia falhar. Para Tomás, o problema não significa quase nada. Não possui pontos de referência quanto a palavras como porcentagem, desconto, preço. Ao contrário de Francisco, Tomás não permite que uma coisa tão insignificante como um problema, o aborreça. Tanto ele como o professor estão acostumados a dizer "não" quando se pergunta se ele foi capaz de realizar a tarefa. Para Shirley, o problema significa "um tipo de problema que ela precisa aprender melhor, se quiser se empregar no comércio". Ela compreende o enunciado, começa a encontrar a resposta e experimenta memorizar o modo como pode ser resolvido aquele tipo de problema.

Aqui temos cinco alunos defrontando-se com um problema. Por



causa de sua motivação diferente, o problema significa algo diferente para cada um. Logo, serão diferentes os materiais de pensamento e os planos de ação de cada um. Muitos professores desconhecem isto. "... os motivos que os alunos trazem para a tarefa de matemática, raramente estão relacionados com os problemas em si mesmos". Talvez seja de grande auxílio para os professores, lembrar esta advertência de Cronbach.

A clarificação do problema pelo indivíduo é um processo que afeta sua orientação. Isso não é um passo distinto do anterior ou subsequente. De certo modo, é um processo contínuo. Cada um dos 5 alunos, acima descritos, esclareceu o problema até certo ponto, quando o enfrentaram. Cada um sabia, p. ex., que envolvia matemática, provavelmente teria de realizar uma ou mais operações matemáticas e que a resposta seria expressa em números. A clarificação ulterior de um problema depende da compreensão, por parte do aluno, das palavras e símbolos usados no enunciado do problema. Conforme a extensão em que os compreende, estará melhor capacitado para decidir sobre o que deve ser feito a fim de obter a resposta. Além disso, deve ser capaz de identificar o que é dado e solicitado. Se o problema não é pré-formulado, existe ainda a questão das percepções e conceitos que foran o "dado" e certa idéia das características de uma solução adequada. Duncker (9:35) salienta a relação entre o problema dado e a solução: "A solução surge sempre das exigências feitas pelo que é exigido do enunciado". O aluno estará melhor capacitado a organizar seus esforços e assegurar uma solução, quando tiver em mente essas duas coisas.

Duncker introduziu uma concepção útil na compreensão do processo psicológico da resolução de problemas. O conceito do "modelo de pesquisa". Esse modelo de pesquisa surge quando o indivíduo clarifica o problema. Preenche a lacuna entre o que é dado e o que é exigido e serve durante certo tempo, para conduzir a deliberação do indivíduo. Tomando um simples exemplo, suponhamos que você encontre um amigo, que lhe diz alguma coisa, que você precisa anotar para não esquecer. Não tem caneta, nem lápis. Nesse caso / tem alguma coisa que deseja recordar, necessita de um sinal para se lembrar. Seu modelo de pesquisa é uma construção mental, "algo com que escrever". É uma abstração obtida da situação total que contém muitos elementos confusos e inadequados. Mas isso fornece o estímulo, que dá início ao seu pensamento ou ação, dirige o que procura e lhe diz quando está pronto. Também determina a "região de pesquisa, nesse caso, o campo perceptual.

Suponhamos que um aluno considere o seguinte problema:

Dois homens viajaram 500 milhas depois de terem partido de / certa cidade ao mesmo tempo. O 1º viajou 10 milhas com 1 hora de mais velocidade que o 2º e deste modo, chegou 2 horas e meia antes, ao seu destino. Em que velocidade viajou cada um? Supondo / que o aluno entenda o problema e o aceite, seu modelo de pesquisa, se ele o verbalizar, pode ser "uma equação que relaciona as variáveis de um problema".

Sua região de pesquisa consiste em conceitos e generalizações matemáticas que aprendeu. Esses são avaliados e selecionados, de acordo com sua utilidade para obter o modelo de pesquisa. Quando / fornecem pressentimentos (hunches) ou sugestões de planos de procedimento, esses planos são experimentados para ver se dão a solução do problema.

Todos esses conceitos, generalizações e hipóteses, constituem o "material de pensamento" para o processo deliberativo. Parte do trabalho do professor consiste em ajudar os alunos a conceitualizar modelos funcionais de pesquisa, quando esclarecem problemas. Modelos de pesquisa errôneos são, sem dúvida, uma das princi

pais causas dos erros que os alunos cometem na resolução de problemas.

### PRODUÇÃO DE MATERIAL RELEVANTE DE PENSAMENTO

O segundo aspecto da resolução de problemas a ser considerado, é a produção de material relevante de pensamento. Esse material consiste de percepções obtidas, direta e indiretamente, aliás, imediatamente, da situação existente, dos conceitos e generalizações. O último pode ser obtido, até mesmo, de outro modo, durante o processo de resolução de problemas. Depende da natureza do problema, se predominam as percepções, conceitos e generalizações.

Os matemáticos estão cientes do papel que desempenham os conceitos e generalizações no processo deliberativo da resolução de problemas. São essas abstrações que tornam possível reestruturar e reorganizar experiências passadas e trazê-las à luz no problema em questão. Não existe substituto para uma compreensão das relações manifestadas pela posse de conceitos e generalizações. Poucos seriam os professores que discordariam disso.

A produção e retenção de material de pensamento depende do "alcance de apreensão" do indivíduo, às vezes chamada "alcance da memória imediata". O indivíduo deve ser capaz de recordar o que foi "dado", e o que se espera que encontre quando continua a trabalhar no problema. Também deve ser capaz de selecionar de sua aprendizagem passada, tudo quanto é importante para o problema.

O alcance de apreensão tem duas dimensões: extensão e duração. Variam de indivíduo para indivíduo. Certas pessoas podem lembrar com facilidade, fatos, princípios, conceitos, definições, teoremas, etc. A extensão e duração de seu alcance de apreensão é considerável. Outras pessoas, por uma razão ou outra, têm memória fraca e dificuldade de fazer uso da aprendizagem passadas. Algumas têm dificuldade até mesmo de aprenderem todas as relações dos problemas ou de relembrar os obstáculos que tiveram ao tentar resolver um problema.

O simbolismo conciso em matemática, é de grande auxílio para o desenvolvimento do alcance de apreensão. Pel simbolização conceitos e relações de um problema, esses se tornam entidades, imediatamente avaliáveis para um estudo de suas relações umas com as outras. As hipóteses podem ser prontamente verificadas e novos "insights" obtidos quando são manipulados os símbolos.

### COMO OS PROFESSORES DE MATEMÁTICA PODEM AJUDAR OS ALUNOS A PROGREDIREM NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Já mostramos neste capítulo que a resolução de problemas é um processo muito complexo. Com efeito, os psicólogos acham difícil distinguir entre resolução de problemas e aprendizagem em geral. São aspectos da resolução de problemas a motivação, atitudes, transferências de ensaio, exercício, formação de conceitos, linguagem e lógica. O professor, que deseja melhorar a capacidade de resolução de problemas, deve, necessariamente, dar ênfase adequada a cada um desses aspectos. Não é suficiente, porém, que um programa educacional envolva essas fases necessárias de aprendizagem. É importante que sejam preparadas experiências específicas destinadas a auxiliarem a capacidade de resolução de problemas.

Certas pessoas são dotadas de capacidades inatas, que se habitam, melhor que outras, a solucionar problemas. No entanto, é possível ajudar cada indivíduo a obter certas habilidades e atitudes que o ajudarão a se tornar um melhor solucionador de proble-

nas, do que seria sem elas.

.....

AJUDANDO OS ALUNOS A SE TORNAREM ORIENTADOS PARA OS PROBLEMAS

O professor pode ajudar seus alunos a se tornarem orientados para os problemas, através do ensino significado do problema. Todo professor de matemática já teve alunos que não querem concentrar-se ou refletir, sobre problemas. Esses alunos terão uma vez o problema verbal no livro-texto e, sem refletir, levantarão a mão dizendo: "Não compreendo o problema", ou - "Não posso resolver este problema". Muitas vezes, os professores atribuem esta reação à in-dolência, quando a dificuldade, talvez, resida no fato do aluno não saber o que seja problema. Será que as experiências passadas com relação a exercícios, não o levaram a generalizar que os problemas podem ser resolvidos sem reflexão? Ele pode pensar que se deve ler o problema e imediatamente saber a resposta.

O professor precisa ajudar este aluno a compreender o que significa um problema. O aluno tem de aprender que um problema é uma situação para a qual não se tem uma solução fácil. Precisa aprender que se supõe que tenha dificuldade com o problema, que tenha de refletir. O problema deve fazê-lo trabalhar se ele o aceita como problema; caso contrário, não é um problema para ele.

O professor pode dizer o seguinte para um aluno que não compreende o que seja um problema: "João, não esperamos que você saiba fazer este problema, mas que imagine uma maneira de fazê-lo. Se tem dificuldade, é justamente o que deve ter. Leia o problema várias vezes e trace um diagrama se fôr necessário. Pense vários minutos sobre ele, antes de pedir auxílio".

O PROFESSOR DE MATEMÁTICA É TAMBÉM PROFESSOR DE PSICOLOGIA

De certo modo, o professor de matemática é um professor de psicologia, ensinando a psicologia da resolução de problemas. Se os alunos devem aumentar a capacidade de resolução de problemas, então o professor deve dar a eles alguma orientação sobre o processo de resolução.

É importante, não só que os alunos saibam o que é um problema e conheçam alguns aspectos do processo de resolução de problemas, mas também que saibam porque motivo é desejável que saibam, aliás, resolver problemas na escola. A tarefa do professor é dupla com relação à resolução de problemas. Uma delas consiste em ajudar o aluno no problema. A outra, em auxiliá-lo a compreender os processos de resolução de problemas de per si.

É claro que antes de poderem ensinar resolução de problemas, devem compreendê-la. Os professores de matemática devem estudar os processos de resolução de problemas tanto quanto os alunos. É mais do que evidente que muitos professores não compreendem o que seja resolução de problemas, ou, se sabem, não têm como um objetivo de ensino. Um dos exemplos disto está na maneira como os professores de matemática ensinam os problemas verbais do curso de álgebra. Os problemas são catalogados em tipos de problemas, tais como, de mistura, de dinheiro, de idade e outros. O professor mostra como se resolve um determinado problema e depois dá uma lista daquele tipo de problemas. Os alunos não experenciam a resolução de problemas. Em vez disso, experenciam a prática de aplicar uma técnica memorizada.

Em nossa cultura certas situações são enfrentadas tão frequentemente que é desejável memorizar as técnicas para resolvê-las. Os problemas podem ser usados vantajosamente, para aumentar a capacidade de resolução de problemas. Mas quando esses problemas são ensina-

dos como tipos de soluções memorizadas, perde-se a oportunidade de aumentar essa capacidade.

A ORIENTAÇÃO PARA OS PROBLEMAS DEPENDE DE UMA ESTRUTURA BEM ORGANIZADA DE CONHECIMENTOS PERTINENTES AO PROBLEMA

Um aspecto para tornar-se orientado para um problema, é compreender o lugar do mesmo na organização total da disciplina. Portanto o professor deveria reservar um tempo para prover experiências que ajudem o aluno a conhecer os objetivos mais amplos da matéria, bem como, os menores. Às vezes, os professores perdem tanto tempo em detalhes que os alunos perdem a visão geral da organização. Não podem ver a floresta por causa das árvores.

Antes de entrar numa unidade de trabalho sobre números complexos, seria conveniente, uma lição que os leve a compreender o desenvolvimento histórico dos números. Essa lição ou lições poderia tratar do desenvolvimento e extensão dos sistemas numéricos, especialmente suas características e regras de operação. O aluno, compreenderia, então, os números num sentido mais lato e significativo.

.....

O PROFESSOR DE MATEMÁTICA É TAMBÉM UM PROFESSOR DE LEITURA

Os problemas verbais dos livros-textos têm uma dificuldade maior do que os problemas surgidos das experiências diárias do aluno. Essa dificuldade consiste na necessidade de fazer uma leitura da descrição da situação, antes que possa ser dirigido para o problema. Muitas vezes, os professores verificam que os alunos não podem trabalhar com problemas verbais porque não sabem ler. Isso é uma declaração muito vaga, porque o ato de ler é muito complexo e envolve muitas habilidades e compreensões. O que quer dizer o professor quando diz que o aluno não sabe ler? Significa que o aluno não pronuncia bem? Não lê suavemente, não compreende os conceitos, ou o que? Afirmar que um aluno não sabe ler é dizer que está usando palavras que podem significar um grande número de coisas.

A leitura de problemas verbais em livros-textos de matemática requer uma técnica diferente de leitura, de material descritivo ou de ficção. Os problemas verbais estão escritos num estilo breve e altamente condensado, com o uso de muitas palavras técnicas. As palavras técnicas devem ter significação para o aluno antes que este possa compreender o problema.

Consideremos o seguinte problema: Certo homem de negócios abriu falência com ações no valor de \$15,800 e dívidas de \$27,600. Que porcentagem de suas dívidas pagou?

Que significa constatar que um aluno não sabe ler este problema? Pode ser que a confusão do aluno seja causada pelo conhecimento significado de palavras como, "falência" ou "dívidas". Neste caso, a maneira do professor ajudar o aluno é ensinando o significado das suas palavras. Também podem ser úteis sugestões como esta: "Maria, você não pode ler um problema verbal como se lê uma história. Leia devagar, releia, uma frase de cada vez. Se for necessário, trace um diagrama para lembrar-se dos itens importantes. Muitas vezes, uma palavra é muito importante. Conhece o sentido de cada palavra?"

EXISTEM DIFERENÇAS INDIVIDUAIS COM RESPEITO À RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Salientamos, anteriormente, que uma determinada situação pode ser problema para um indivíduo, e para outro pode ser demasiado di-

fácil. O professor deve reconhecer essas diferenças e procurar oportunizar a cada um a aquisição de experiências de resolução de problemas de acordo com seu nível. Certos alunos podem assistir um semestre inteiro de aulas de matemática sem nunca se defrontarem com uma situação problemática desafiadora. Os problemas do livro-texto são, para eles, exercícios rotineiros.

O PROFESSOR PODE AUXILIAR OS ALUNOS NA ORIENTAÇÃO DE PROBLEMAS, ENCORAJANDO-OS A VERBALIZAR, TRAÇAR DIAGRAMAS, DRAMATIZAR E CONSTRUIR MODELOS

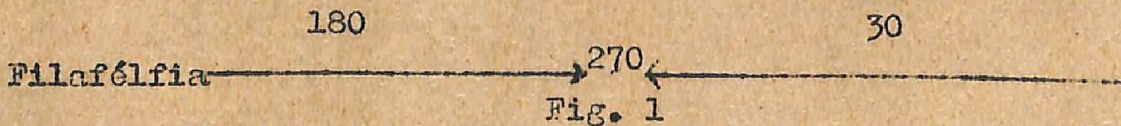
Um aluno se torna orientado para um problema, quando ele formou um modelo de pesquisa. Um conselho que pode ser usado pelo professor para auxiliar o aluno a desenvolver este modelo de pesquisa é mandá-lo contar com suas próprias palavras, o que entende do problema. Isto completa muitas coisas. Por meio desta experiência de contar, o aluno é forçado a organizar seus pensamentos e pode esclarecer certos aspectos da situação. Pode também perceber sua pouca habilidade de falar sobre determinados aspectos do problema e tornar-se consciente de seu conhecimento deficiente. Deste modo, o professor também tem uma oportunidade de diagnosticar as dificuldades do aluno. Quando a terminologia do livro-texto não favorece a compreensão, deveria ser feita uma campanha no sentido de que os alunos usem suas "palavras próprias".

O aluno pode fazer uma afirmação semelhante a este: "Sei isto..." "O que desejo fazer é isto..." Este depoimento verbal define o modelo de pesquisa para o aluno. Definiu o problema e está pronto agora para preencher as lacunas.

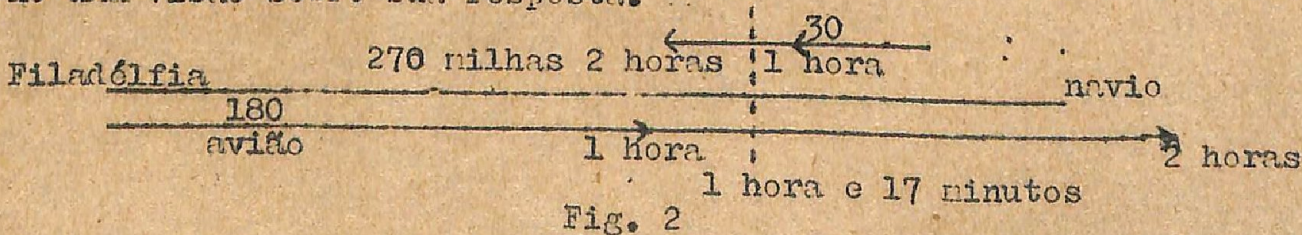
Para muitos alunos também é uma experiência de grande utilidade fazer diagramas de situações problemáticas. O diagrama ajuda a tornar mais claras as relações dos detalhes. O diagrama, mais do que a memória, ajuda também o aluno a manter imediatamente avaliáveis os muitos fatos e relações de uma situação problemática. Os alunos deveriam ser encorajados a traçar diagramas de muitos problemas que resolvem. O diagrama também pode servir para corrigir uma solução.

Um navio navega em direção a Filadélfia numa velocidade de 30 milhas por hora. Comunica pelo rádio que uma pessoa a bordo está doente e precisa ser recolhida. Quando o avião parte de Filadélfia o navio está a 270 milhas do avião. O avião percorre a 180 milhas por hora. Quanto tempo depois de ter deixado Filadélfia alcançará o navio?

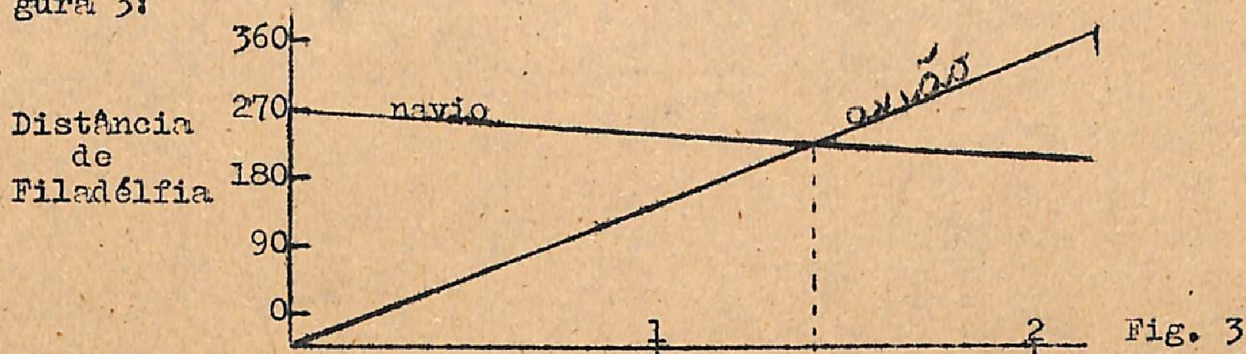
O diagrama pode ser um simples esquema rudimentar para ajudar o aluno a reter os fatos na memória, como mostra a figura 1:



Pode ser traçado em escala como na fig. 2, e assim dar ao aluno uma visão sobre sua resposta.



Com êste diagrama o aluno pode reconhecer que o avião encontrará o navio mais ou menos dentro de 1 hora e 15 minutos. O aluno pode também querer usar uma solução gráfica, como mostra a figura 3:



Certas situações problemáticas, especialmente, os problemas de 3 dimensões, tornam-se claros para os alunos, quando êles constroem um modelo. Êste modelo tem exatamente a mesma finalidade que o diagrama. Também é aconselhável que os alunos dramatizem a situação para que o problema se torne significativo.

.....

PARA AJUDAR OS ALUNOS A MELHORAREM SUA CAPACIDADE DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS O PROFESSOR DEVE CRIAR NA AULA UM CLIMA FAVORÁVEL A PERGUNTAS

Os alunos que são encorajados a responder, aliás, a fazer perguntas e que se sentem livres para assim agir, levantam seus próprios problemas. Muitas vezes, os alunos falham em fazer perguntas em classe, mesmo não vá dispendendo tempo para considerar sua pergunta. Em certas aulas tanto o professor como os alunos estão prontos para rirem de uma pergunta elementar feita por um aluno com toda seriedade. O professor que deseja criar em classe uma atmosfera favorável aos problemas, deve encorajar os alunos a fazerem perguntas, considera cada pergunta feita, elogiar os alunos que as fazem e não permitir risadas durante as mesmas.

Também deve fazer perguntas que estimulem o pensamento e em seguida dar aos alunos oportunidade de pensarem. Os professores, muitas vezes, fazem perguntas que requerem raciocínio, mas não têm paciência suficiente para deixar os alunos pensarem. Imediatamente, chamam um aluno e esperam a resposta. Alguns professores parecem ternerosos do período de silêncio que segue a pergunta.

Certo professor faz perguntas do seguinte modo:

"Agora pensem sobre isto. Não adivinhem. Esperem um pouco. Durante um momento não quero mãos levantadas. Depois de haverem pensado e dado evidência de o terem feito, poderão responder". "Segue-se a esta admoestação um período de silêncio. Às vezes, pode durar muitos minutos. Como esta situação difere daquela outra em que o professor faz uma pergunta e imediatamente chama João: Enquanto João procura coordenar suas idéias e dar resposta razoável, o professor fica impaciente e chama Jaime. Não deveria João, nesta aula, chegar à conclusão que êle deve saber, e não pensar?"

Numa aula de clima favorável ao raciocínio o professor pode renovar as perguntas para que os alunos as reconsiderem. É quando o professor encoraja os alunos a responderem algumas de suas próprias perguntas e dá tempo suficiente para que trabalhem nas mesmas, os alunos, verdadeiramente estão porulando problemas para si mesmos.

AJUDANDO OS ALUNOS A UMA MAIOR PRODUTIVIDADE DE MATERIAL DE PENSAMENTO

A produtividade para resolução de problemas depende de vários fatores. Os principais são: O nível geral da inteligência; o acervo

de experiências, conhecimentos, habilidades e compreensões; as condições do aluno; as motivações e o campo no qual é colocado o problema. Por isso, se o professor deseja auxiliar o aluno a melhorar na produtividade de hipóteses que conduzem à resolução de problemas, ele deve ensinar considerando cada um desses fatores.

O campo em que é colocado um problema afeta grandemente a produtividade. O tempo, lugar e padrão especial dos eventos, que conduzem um problema, fazem considerável diferença na produtividade / das hipóteses.

.....  
O campo particular dos acontecimentos que cercam um problema é algo que está sob o controle do professor. O modo como o professor formula uma pergunta ou o momento que ele escolhe para apresentar um problema influencia, grandemente, no modo de pesquisa dos estudantes. Um problema pode ser apresentado, seguindo outro, de tal maneira que o 1º sirva de sugestão para a solução do 2º.  
.....  
.....

Polya, no seu livro "Como resolvê-lo", recomenda com muita insistência, uma longa lista de perguntas que devemos nos fazer quando queremos resolver um problema. Estas perguntas também são boas para serem feitas pelo professor ao aluno. Eis algumas das perguntas sugeridas por Polya:

a) - Já o havia visto antes? Ou já deparou com o mesmo problema de uma forma ligeiramente diferente?

b) - Conhece um problema relacionado com este? Conhece um teorema que pudesse ser útil?

c) - Olhe para a incógnita! É experiente pensar num problema familiar que tenha a mesma incógnita ou uma parecida.

d) - Eis aqui um problema relacionado com o seu e resolvido / antes. Poderia valer-se dele? Poderia utilizar seu resultado? Poderia usar seu método? Poderia introduzir algum elemento auxiliar a fim de tornar possível o seu uso?

e) - Poderia reformular o problema? Poderia formulá-lo, até / mesmo, de maneira diferente? Volte às definições.

f) - Se não puder resolver o problema proposto, tente resolver primeiro um problema relacionado. Pode imaginar um mais acessível. Um problema mais geral? Um mais especial? Um análogo? Poderia resolver parte do problema? Mantenha parte da situação e desfaça-se da outra parte. Até que ponto persiste a incógnita então determinada? Como pode variar? Poderia concluir algo de útil dos dados? Poderia pensar em outros dados apropriados para determinar a incógnita? Poderia modificar a incógnita, ou os dados, ou ambos, se necessário, de tal modo que a nova incógnita ou os novos dados estejam mais próximos um do outro?

g) - Utilizou-se de todos os dados? Usou a condição toda? Levou em consideração todas as noções essenciais do problema?

O resultado destas perguntas que o professor ou o aluno fazem para si mesmo é uma direção para o campo em que o problema está estabelecido ou para o foco da atenção.

O professor também controla o campo de um problema pela maneira como ele faz uma pergunta ou pelo momento que escolhe para formulá-la. O problema, aliás, o professor pode apresentar um problema, seguindo imediatamente outro que dê ao aluno uma sugestão útil para o método de solução do problema seguinte.

Suponhamos que um aluno esteja procurando a soma de duas frações ordinárias de denominadores diferentes. Em lugar de dizer: / "Achen primeiro o mínimo múltiplo comum," o professor poderá dizer "Por que não somar as frações assim como estão? Quando o aluno ex

plica porque isto não pode ser feito, o professor poderá dizer: "O que terão de fazer então?" a pergunta deve estimular o raciocínio forçando o aluno a justificar suas respostas.

Muitas vezes, o professor desenvolve um problema para a aula toda ou para um aluno. Ou então um dos alunos põe a solução no quadro-negro. Há mais ou menos 20 anos, Westaway pronunciou-se contra essa prática. Seu argumento ainda é profundo. Para estarem certos, os alunos olham como resolver o problema. Mas Westaway disse: "Eles ainda estão ignorantes quanto ao caminho que o professor descobre para resolver o problema". É melhor fazer uma pergunta que vá dirigir a atenção do aluno a uma relação ou hipótese chave. Se são incapazes de responder, deveria ter-lhes dito, apenas, o necessário para capacitá-los a iniciarem. Dar-lhes mais, destrói seu sentimento de conquista e aumenta a dependência do professor.

AS VEZES, O NECESSÁRIO PARA AJUDAR UM ALUNO A FAZER DESAPARECER UMA "DISPOSIÇÃO" COM RELAÇÃO A UM PROBLEMA CONSISTE EM DIZER-LHE QUE NÃO PERSISTA NUM MODELO DE PESQUISA MAL SUCEDIDO.

Maier considera ótimo ajudar os alunos a evitar uma "disposição" improdutiva para uma solução. Se os alunos aprendessem isto / como um princípio de processo, a duração da disposição seria reduzida e a produtividade de hipótese aumentaria.

OS ALUNOS DEVERIAM SER ACONSELHADOS A ABANDONAR TEMPORARIAMENTE A TENTATIVA DE RESOLVER UM PROBLEMA, NO QUAL TRABALHARAM INUTILMENTE POR LONGO TEMPO, E VOLTAR PARA O MESMO MAIS TARDE.

Isto produz um período de incubação durante a qual a perspectiva pode ser restaurada. Também quando o aluno se cansa pode ser que necessite de um descanso. Quando o solucionador volta ao problema, o descanso ou desvio de atenção podem capacitá-lo a ser bem sucedido. Muitos exemplos podem ser citados de famosas descobertas / que nasceram de um súbito "insight", após um período de incubação / ou de descanso. Existem muitos provérbios em nossa cultura que encorajam a suspensão do trabalho em um problema: "Escute o conselho do seu travesseiro". "O que não puder ser hoje, poderá ser amanhã". É claro que não resolveremos problemas dormindo, descansando e pondo-os de lado. Essa técnica do período de incubação só atua após esforço e quando o solucionador está fortemente motivado para chegar à solução.

A TÉCNICA DE PESQUISAR UM PROBLEMA ANÁLOGO É DE GRANDE UTILIDADE PARA O ALUNO

O estudante que se depara com um problema de 3 dimensões. Por / exemplo, existem semelhanças entre a geometria de uma esfera e de um círculo. Coolidge ficou impressionado com esta analogia e declarou: "As semelhanças entre círculos e esferas estende-se aos teoremas particulares para os métodos gerais de prova. Muitas vezes, o / processo aplicável num caso pode ser diretamente transferido a outro".

.....





MUITOS PROFESSORES RECONHECERAM A UTILIDADE DE ESTIMULAR OS ALUNOS A INICIAREM COM A CONCLUSÃO OU O RESULTADO FINAL E TRABALHAREM ATRAVÉS DA ANÁLISE DO QUE FOI DADO

Professores de geometria e autores de livros-textos encorajam os alunos a raciocinarem analiticamente. O aluno deve aprender que quando ele se depara com uma situação, para a qual não tem solução imediata, pode dirigir seu pensamento, vantajosamente, dizendo para si mesmo: "Para demonstrar isso, devo primeiro provar isto. Isto por sua vez requer que eu saiba ...", até que dados sejam articulados, logicamente.

OS ALUNOS DEVEM SER INCORAJADOS A USAREM PROCESSOS INDUTIVOS PARA AJUDÁ-LOS A FAZEREM DESCOBERTAS E CONDUZÍ-LOS A CONJETURAS RELACIONADAS COM O PROBLEMA EM QUESTÃO

Várias relações específicas podem levar o aluno a descobrir / uma relação geral. Desenhos de configurações geométricas podem levar o aluno a descobrir as características essenciais de uma prova. A matemática é um sistema dedutivo, mas a indução desempenha / importante papel na descoberta e nos aspectos criadores da disciplina.

A PRÁTICA CONTINUADA DE APREENDER RELAÇÕES? AJUDARÁ O ALUNO A FORMULAR HIPÓTESES

O fato do aluno formular uma hipótese relacionada à solução / de um problema indica que ele persegue uma relação. Por exemplo: "Isto decorre daquilo"; "Este problema é parecido com o que fiz / ontem"; "Este é um caso de ..."; "O princípio a ser aplicado é..."; "Se eu puder achar ... então poderei solucionar o problema". Logo, quanto mais ênfase o professor der às relações, tanto mais capazes se tornarão os alunos para formular hipóteses sobre a matéria em / estudo.

DEVERIAM SER PROPORCIONADOS AOS ALUNOS A OCASIÃO DE ADQUIRIREM EXPERIÊNCIAS, NAS QUAIS TIVESSEM DE IDENTIFICAR E DEFINIR UM PROBLEMA, IDENTIFICAR AS VARIÁVEIS E CONSTANTES ENVOLVIDAS, FAZER SUPOSIÇÕES QUE SIMPLIFIQUEM O PROBLEMA, COLECTAR E AVALIAR DADOS RELEVANTES, DICIDIR SOBRE AS CARACTERÍSTICAS DE UMA SOLUÇÃO SATISFATORIA E FINALMENTE, CHEGAR A UMA SOLUÇÃO QUE SATISFAÇA ESSAS CARACTERÍSTICAS

Nos livros-textos raramente se encontram problemas que exijam essa habilidades. O autor do livro-texto de matemática escreve um problema verbal conciso e bem estruturado, que contenha todos os / dados e somente, os necessários para a solução daquele problema. / Esse tipo de problemas serve para determinados propósitos, mas um regime constante dos mesmos não dá o tipo de exercício necessário para a solução de problemas reais nas várias ocupações da vida diária. Esses problemas não aparecem acondicionados e prontos para imediata solução.

Uma maneira de iniciar os problemas do tipo conseqüente desse princípio, é começar com perguntas relativamente não estruturadas, tais como: De quanto deverão ser ~~XXX~~ os seus vencimentos para poder se casar? Que é mais barato comprar ou alugar uma casa?

.....  
Lund (17) descreve um problema que começa com a seguinte pergunta: "Como poderemos comparar a distância aérea com a distância das vi  
.....



as terrestres?" Os alunos se utilizaram de gráficos obtidos da ... U.U.E.E. COST e do Centro de Estudo Geodésico, bem como de uma coleção de mapas das rotas dos E.E.U.U. e as leis comuns. Antes que o principal problema pudesse ser resolvido, tiveram de ser respondidos sub-problemas, tais como, selecionar uma amostra representativa e fazer a coleta, apresentar e organizar dados. Embora o objetivo aparente seja dar alguns princípios elementares de estatística, as possibilidades que um tal problema real oferece para o ensino simultâneo da evolução de problemas são óbvias.

Meek e Zechiel (19) descreveram uma companhia de seguros planejada e desenvolvida pelos alunos do 7º ano. Isto deu lugar a que 7 outros tivessem sucesso semelhante, organizando suas turmas em companhias de venda a varejo.

Irland e Engsin (13) experimentaram determinar as distâncias das paradas de automóveis, as quais poderiam servir de projeto auxiliar entre as aulas de matemática e a prática de guiar automóvel. Existem muitas oportunidades para originalidade e iniciativa em tais projetos.

Miller (20) sugere uma situação problemática, envolvendo uma lata de água colocada sobre um bico de gás. Várias relações funcionais podem ser identificadas e estudadas. P. Ex.: A temperatura e o tempo com a chama alta e baixa; o tempo e a quantidade de água / que resta.

Montgomery (21) elaborou o seguinte plano: "Quanto custa possuir e dirigir o seu próprio carro"? A classe identificou as variáveis envolvidas, fez a coleta dos dados, simplificou suposições relativas a algumas variáveis e chegou a saber o preço por milha para cada um dos 3 anos de vida do carro. Cada aluno escolheu um carro diferente.

Muitos professores de geometria aconselham seus alunos a formularem seus próprios problemas por meio de diagramas e modelos / flexíveis. (25) Pela elaboração desses modelos e o estudo de diagramas flexíveis, os alunos podem acreditar intuitivamente que certas relações são verdadeiras. O aluno então resolve a questão: "A relação é sempre verdadeira?" Uma investigação minuciosa poderá / mostrar que a intuição estava certa ou errada. Mas, o aluno teve a experiência de formular e investigar seu próprio problema.

Esses exemplos mostram o que poderá ser feito no sentido de / apresentar problemas relativamente não estruturados, quando o professor está disposto a fazê-lo. Sem essas experiências os alunos / podem não obter uma compreensão ampla da resolução de problemas.

OS PROBLEMAS DOS LIVROS-TEXTOS DEVERIAM SER ELABORADOS DE TAL MANEIRA QUE PERMITISSEM UMA REDUÇÃO, POR PARTE DO ALUNO, DA APLICAÇÃO MECÂNICA E RÍGIDA DE FÓRMULAS

Luchins (15) fez diversas recomendações aos professores que / desejam ajudar seus alunos no desenvolvimento de sua capacidade de resolução de problemas. Ele sugere que após dar um método, o professor não deve dar uma série de exercícios parecidos, mas intercalar problemas que não podem ser solucionados pelo mesmo processo. Como resultado de pesquisas posteriores, Luchins e Luchins, recomendam (16:293):

A fim de que os problemas que visam a transferência da importância da descoberta, seleção, avaliação e rejeição de fatos hipotéticos na resolução, sejam efetivos, deveriam ser introduzidos em todas as disciplinas escolares, e não, tratados como curiosidade / que deve ser anunciada com uma introdução especial. Deveriam ser / livremente alternados com outros problemas mais rotineiros. A expo

riência indica que a inclusão de tais problemas pode retardar a // aprendizagem e torná-la um tanto menos eficiente que o processo // de Exercícios; mas, por outro lado, torna o comportamento menos mecânico, o pensamento mais produtivo. Em resumo, pergunta se as escolas desejam desenvolver eficiência mecânica e atitude de aplicação de fórmulas e associação de métodos determinados com situações determinadas ou se visam auxiliar indivíduos com certa capacidade // de enfrentar e reproduzir situações problemáticas novas e mutáveis.

Os livros-textos deveriam conter problemas que exigissem a // atenção e imaginação do aluno na resolução. O aluno deveria concluir que, sob determinadas condições o problema não tem solução. // Em lugar de serem solucionados sempre pela mesma técnica, deveria haver problemas com dados insuficientes e outros com dados em excesso. Alguns seriam absurdos, outros solúveis tanto por processos longos e complexos, como por processos curtos e fáceis.

O ALUNO QUE ENCONTRA A SOLUÇÃO POR MAIS DE UM CAMINHO / OU QUE É CAPAZ DE ENCONTRAR UMA SOLUÇÃO CERTA DE UM MODO DIFERENTE DEVERIA SER APRECIADO

Brownell (4:439) sugere: "Para que a técnica de resolução seja mais produtiva não deve constituir na repetição das soluções // dos mesmos problemas pelas mesmas técnicas, e sim, na resolução de problemas diferentes pela mesma técnica e na aplicação de diferentes técnicas para os mesmos problemas. Um problema não está necessariamente "resolvido" por ter sido encontrada a resposta correta.

Em muitas aulas de matemática os alunos recebem a nota, baseada nas "respostas" das tarefas de casa ou das provas. Será que os alunos não concluem disso que não importa o processo desde que se dê respostas certas? Muitas vezes os alunos mostram-se satisfeitos com um processo incorreto que resulta numa resposta correta.

Os alunos deveriam saber que o processo de solução é muito importante. Muitos problemas dos livros-textos podem ser solucionados por meio de diversos métodos ou elaborações diferentes. O aluno deveria desenvolver o hábito de experimentar várias soluções. // Isto o ajudaria a evitar a aproximação mecânica de solucionar o // problema por meio da aplicação de fórmulas, processo de fase ou // passos, além de dar ao aluno oportunidade de corrigir sua resposta. Os professores deveriam dar apropriado reconhecimento e prêmio ao aluno que tenta várias soluções ou que procurou, até encontrar, uma solução interessante e certa. O professor deveria perguntar: "Quem foi capaz de encontrar outro caminho"? "Qual é a solução que preferen"? "João encontrou um método muito interessante e rápido de resolver este problema, quer mostrar-nos sua solução"? "A nota justa também deve ser dada por meio de boletins de notas que considerem // tanto os processos como as respostas certas."

O PROFESSOR DEVE DESENVOLVER EM AULA UM CLIMA QUE FAVOREÇA A CONCENTRAÇÃO DO ALUNO SOBRE O PROBLEMA

Certos professores empregam métodos e estimulam recursos que distraem a atenção do aluno para recompensas e incentivos extrínsecos. Os alunos podem ter consciência de sua própria inadequação ou do quanto desgostam o professor. Com relação a incentivos, Luchins (10) observou em suas experiências que as crianças não se interessam pelo problema em si; somente pelos efeitos que os problemas // têm sobre as notas e boletins e pelo conhecimento que o diretor // tem de sua atuação. "Nós perguntamos se nossas escolas com sua ênfase nas notas, seus testes de tensão e atmosfera competitiva, não conduzem a uma atitude emocional altamente egocêntrica com relação

à resolução de problemas, e consequentemente se não está atuando em detrimento da produtividade e flexibilidade do pensamento."

Tensões emocionais pouco salutares se desenvolvem na aula do professor que faz do medo uma força motivadora; rejeita os alunos que têm dificuldades ou cometem erros; deprime o ego do aluno por meio do sarcasmo ou de notas pejorativas, faz comparações desfavoráveis do aluno com seus companheiros; que exige um padrão inflexível de todos os alunos ou que é nervoso e irritável e não tem sereno de amor. Os alunos de tais aulas terão mais dificuldade para concentrarem a atenção nas tarefas. Pode acontecer, que a aversão por tais métodos seja transferida à disciplina e generalizada a toda a matemática.

Os princípios a serem seguidos no desenvolvimento de um tomus emocional em aula que não desvie ou irrite os alunos estão bastante bem estabelecidos. Podem ser encontrados na maioria dos livros sobre higiene mental. Basta mencionar, apenas, alguns. Uma simpática e paciente atitude encorajará os alunos a tentarem. Isto é verdade, especialmente, quando o professor não rejeita os alunos que não podem acompanhar os outros na resolução de problemas, mas os aceita para desafiarem suas próprias capacidades de resolução.

O velho adágio "Nada acontece como o sucesso", sugere que o professor acompanha seus alunos cuidadosamente: não os frustrando e os desencorajando por meio de contínuas tarefas que não podem cumprir, mas começando com coisas que possam fazer e, gradualmente, ir aumentando as dificuldades, à medida que adquirem confiança. O elogio, o reconhecimento e o encorajamento há muito são reconhecidos como meios excelentes para diminuir as tensões emocionais. Finalmente, a atenção às relações interpessoais dos membros da aula e as relações que têm uns com outros, podem servir para aliviar os sentimentos de agressividade ou medo de certos alunos. Quando existe tais sentimentos é difícil pôr toda a atenção na solução de um problema complexo.

#### A DIAGNOSE DA DIFICULDADE E OS MEIOS DE CORREÇÃO SÃO IMPORTANTES

O professor pode ajudar o aluno a tornar-se um melhor solucionador de problemas por meio de diagnose dos processos que usa para resolvê-los e através de um ensino corretivo. Bloom e Broder fizeram um estudo interessante e valioso sobre processos de resolução de problemas de estudantes universitários, o qual incluía um programa corretivo, cujo principal objetivo era desenvolver essa capacidade. Primeiro os alunos recebiam ordem de resolver os problemas oralmente. Os comentários feitos pelos alunos ao encontrar uma solução eram anotados. A seguir o aluno analisava seu próprio método e comparava com os usados por seus colegas. Os resultados desta experiência são encorajadoras para um professor que deseja que seus alunos progredam na capacidade de resolução de problemas. Com esta experiência os alunos melhoraram significativamente e sua confiança na resolução aumentou. O professor pode observar o aluno enquanto este trabalha. Eis algumas das perguntas que ele deve ter em mente em estas ocasiões:

"Ele lê o problema cuidadosamente e o relê quando necessário? Distrai-se facilmente? Sua atenção é desviada por devaneios? Escreve as computações sobre o papel de maneira desorganizada? Revisa a resposta? Destas e de outras perguntas o professor pode formular hipóteses relativas às dificuldades dos alunos. Esta hipótese pode ser aplicada no corretivo necessário para remover as dificuldades. A técnica de fazer os alunos trabalharem em voz alta nos dá alguma esperança na ajuda aos alunos.

O PROFESSOR PODE AJUDAR OS ALUNOS A MELHORAREM NA RESOLUCAO DE PROBLEMAS NAO EXIGINDO PROCESSOS QUE ENVOLVAM FASES OU PASSOS

Grande número de pesquisas foram realizadas no campo da aritmética sobre métodos para melhorar a capacidade de resolução de problemas por meio de vários processos de passos ou fases. Clark e Vincent elaboraram um plano conhecido como o método gráfico de análise. Muitos autores apresentaram um plano mais convencional em que o aluno deve seguir passos:

- a) - O que foi dado?
- b) - O que deve ser encontrado?
- c) - Que operação deve ser usada?
- d) - Qual é a resposta?

Outro método é o das dependências, que leva o aluno a concluir: "Devo achar ....., isto depende de ....." As descobertas das pesquisas têm sido contraditórias. Presentemente ficou demonstrado que os processos que não envolvem passos são satisfatórios para ensinar os alunos. Para os alunos de mentes ágeis uma seqüência fixa representa um obstáculo. Para os alunos lentos a seqüência pode ocasionar a perda de vista das relações envolvidas no problema. Para a leitura do problema e descoberta do que se pede, parece não haver seqüência fixa de passos.

.....

AJUDANDO OS ALUNOS A MELHORAREM NA TENTATIVA DE HIPÓTESES

Os aspectos da resolução de problemas usados neste capítulo tais como, orientação, produtividade e tentativa de hipóteses, provavelmente não ocorrem na sucessão apresentada acima, mas alternada numa contextura de pensamento, na qual se torna difícil discerni-las. Convém comentar estes aspectos. Após havermos formado uma hipótese, ou simultaneamente à sua formação, ela deve ser tentada. Nossa intuição pode ser de enorme auxílio na formação de hipóteses ou conjeturas, mas também nos pode levar a conclusões erradas. As principais habilidades e compreensões necessárias na tentativa de hipóteses são as de pensamento dedutivo e indutivo. É preciso um grande número de dados que reúnem e analisem habilidades e compreensões geralmente associadas com processos indutivos. Requerem compreensões e habilidades no uso do pensamento do "Se - Então". Também é necessário o conhecimento dos enganos lógicos. O aluno deve habituar-se a suspender o julgamento até haver estudado, sistematicamente, os muitos aspectos do problema. Deve compreender que conclusões apressadas são frequentemente errôneas.

DEVERIA SER EXPLICADAS AOS ALUNOS A TÉCNICA DE EXAMINAR AS HIPÓTESES ATRAVÉS DA PREDIÇÃO E VERIFICAÇÃO

Isto lhes proporcionaria um compreensão de parte dos processos de resolução de problemas e daria direção a seus esforços.

DEVER-SE-IA ENSINAR QUE É MELHOR FAZER HIPÓTESES ERRADAS E SUBMETE-LAS A PROVA A FIM DE DESCOBRIR OS ERROS, DO QUE NÃO FAZÊ-LAS

As vezes, os alunos pensam que fazer tentativas mal sucedidas revela ignorância. Convém recordar a resposta de Tomás Edison quando foi interrogado se não ficava desanimado depois de trabalhar inutilmente durante tanto tempo numa determinada invenção. Supõe-se que Edison tenha respondido que absolutamente não se sentia desencorajado, porque agora conhecia uma série de coisas, que não dão certo. Se os alunos se recordassem de todas as coisas que não dão certo, só esse conhecimento já seria útil.

EM VEZ DE DIZER AO ALUNO QUE A HIPÓTESE EM QUE ESTÁ TRABALHANDO É ERRADA, DEVEMOS DEIXÁ-LO DESCOBRIR ISSO POR SI

Dêste modo o aluno adquirirá a valiosa experiência de ter tentado uma hipótese que não serve.

O PROFESSOR PRECISA SER PACIENTE E OBJETIVO QUANDO O ALUNO TENTA AS HIPÓTESES, A FIM DE EVITAR QUE ESSE O FAÇA / OPSERVANDO A SUA REAÇÃO EM VEZ DE EXPERIMENTÁ-LAS

Muitos professores ficam desanimados com os alunos que, após lerem o problema tentam adivinhar a resposta, aliás, a operação que devem efetuar. "Subtração?", perguntará o aluno. Talvez experiências passadas lhe tenham ensinado que, se ele observar as reações do professor descobrirá qual operação deve fazer. Nestes casos o professor deverá responder: "Que pensa você?" ou "Talvez", ou ainda / "Como é que você sabe?" Dêste modo o aluno não poderá adivinhar a resposta através da reação do professor. Nos debates de aula também a resposta correta de um aluno deve ser desafiada por outros alunos. Muita aprendizagem se realiza quando o professor não se apressa demais em informar a aula de que a resposta está certa. O aluno deve, na medida do possível, experimentar ele mesmo suas hipóteses.

### S U M Á R I O

Os professores de matemática acreditam que a capacidade de resolução de problemas do aluno depende da profundidade de compreensão da matemática. Também depende das compreensões, atitudes e habilidades relativas aos processos de resolução de problemas. Isto implica que o professor de matemática compreenda a matemática, bem como os processos psicológicos da resolução de problemas. Com o fim de promover esta compreensão, este capítulo procurou estabelecer / uma estrutura conceitual da resolução de problemas e salientar algumas implicações disto para o procedimento de classe. Esperamos / que isto proporcione esforços para ensinar os alunos a estabelecerem compreensões, atitudes e habilidades, que conduzam à resolução de problemas.

### B I B L I O G R A F I A

- 1 - Asron Bakst
- 2 - Benjamin Bloon e Lois Broder
- 3 - William Brownell e Hendrickson
- 4 - John Clark e Leona Vincent
- 5 - Coolidge (Universidade de Oxford)
- 6 - Lee Cronbach
- 7 - John Dewey
- 8 - Karl Duncker
- 9 - Jacques Hadanard
- 10 - Paul Hanna
- 11 - Maurice Hartung
- 12 - Irland e ensign
- 13 - Donald Johnson
- 14 - Abtahan Luchins
- 15 - Edith Luchins
- 16 - Torster Lund
- 17 - Maier (Autor inglês)
- 18 - Meek, Ruth e Zechiel
- 19 - Norman Miller
- 20 - Montgomery
- 21 - Poincaré
- 22 - Polya
- 23 - John Reid
- 24 - John Sghacht e John Kinsella
- 25 - Robert Thorndike
- 26 - Westaway (Autor inglês)
- 27 - Asahel Woodruff
- 28 - Robert Woodworth

